



HAL
open science

Modélisation de la turbulence. Prise en compte de l'influence des parois par relaxation elliptique

Remi Manceau

► **To cite this version:**

Remi Manceau. Modélisation de la turbulence. Prise en compte de l'influence des parois par relaxation elliptique. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Nantes, 1999. Français. NNT : . tel-03040403

HAL Id: tel-03040403

<https://univ-pau.hal.science/tel-03040403>

Submitted on 4 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR
DE NANTES

1999

Thèse de **DOCTORAT**

Discipline : sciences de l'ingénieur
Spécialité : dynamique des fluides et des transferts

Présentée et soutenue publiquement par

Rémi MANCEAU

le 9 décembre 1999

à l'École centrale de Nantes

**MODÉLISATION DE LA TURBULENCE.
PRISE EN COMPTE DE L'INFLUENCE DES PAROIS PAR
RELAXATION ELLIPTIQUE.**

Jury :

| | | |
|------------|----------------|--|
| Présidente | M. LARCHEVÊQUE | Professeur, université Paris VI |
| | B. AUPOIX | Directeur de recherches, ONERA, Toulouse |
| | D. LAURENCE | Professeur, UMIST, Manchester |
| | J. PIQUET | Professeur, École centrale de Nantes |
| | R. SCHIESTEL | Directeur de recherches, IRPHE, Marseille |
| | M. VISONNEAU | Chargé de recherches, École centrale de Nantes |

Rapporteurs :

| | |
|--------------|---|
| P. CHASSAING | Professeur, ENSICA, Toulouse |
| R. SCHIESTEL | Directeur de recherches, IRPHE, Marseille |

Directeur de thèse : Jean PIQUET

Laboratoire : Laboratoire de mécanique des fluides

École centrale de Nantes

Adresse : 1, rue de la Noë, BP 92 101
44 321 Nantes Cedex 3

Remerciements

Cette thèse a été entièrement financée par Électricité de France et réalisée au sein de son Laboratoire national d'hydraulique. Je tiens à remercier la hiérarchie de ce laboratoire et, en particulier, du Groupe recherches et études en thermohydraulique, qui a soutenu ce travail sans lui imposer trop de contraintes industrielles à court terme.

L'encadrement a été effectué conjointement par Dominique Laurence, ingénieur EDF, et désormais également professeur de l'université de Manchester, et par le professeur Jean Piquet, de l'École centrale de Nantes.

Le professeur Laurence m'a fait profiter de sa compétence et de son enthousiasme pour le côté le plus fondamental de la modélisation de la turbulence, en gardant toujours un œil sur la réalité industrielle. Il a su, tout en orientant la thèse dans la bonne direction aux moments cruciaux, la laisser voler de ses propres ailes.

Le professeur Piquet a apporté, lors de rencontres régulières, un point de vue extérieur à la fois critique et constructif, qui a souvent permis de mettre en valeur les points importants sur lesquels les efforts devaient porter. Il a également joué un grand rôle dans la genèse de l'organisation logique du présent ouvrage.

Je tiens à remercier Michel Visonneau, pour m'avoir fait profiter de ses conseils au cours de cette thèse, et pour avoir accepté d'être membre du jury de soutenance.

Toute ma reconnaissance va aux autres membres du jury et rapporteurs, le professeur Michèle Larchevêque, le professeur Patrick Chassaing, Roland Schiestel et Bertrand Aupoix, qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.

Ensuite, il est bon de souligner le rôle important qu'ont joué certaines personnes au sein d'EDF pendant la thèse : tout d'abord, Frédéric Archambeau et Émile Razafindrakoto, sans qui le code N3S resterait un mystère ; Olivier Bonnin, qui m'a guidé dans mes premiers pas vers l'utilisation des Cray d'EDF ; Christophe Peniguel, qui a rendu possible le calcul thermique couplé fluide–solide présenté dans la dernière partie de cet ouvrage ; Thierry Goutorbe, qui a réalisé les calculs k – ε servant de référence ; enfin, et surtout, Sacha Parneix, dont le passage à EDF a été aussi court qu'efficace, avec qui l'implantation du modèle $\overline{v^2}$ – f a été réalisée, et sans qui cette opération aurait sans

doute été beaucoup plus difficile.

Cette thèse a définitivement pris un tour plus fondamental qu'industriel au cours du *Summer Program* du *Center for Turbulence Research* de l'université de Stanford. C'est pourquoi je tiens à remercier le CTR et en particulier son directeur, le professeur Parviz Moin, pour m'avoir accueilli pour ce programme de recherche d'un mois. De nombreuses personnes ont contribué au travail en fournissant la base de donnée de simulation directe, en aidant à son post-traitement ou tout simplement en apportant leur propre point de vue, en particulier Paul Durbin, Robert Moser, Javier Jimenez, William Cabot, Joel Ferziger et Peter Bradshaw. Mais une mention toute particulière revient à Meng Wang, pour l'aide inappréciable qu'il m'a apportée dans le post-traitement et dans la rédaction des publications qui ont suivi ce travail, ainsi que pour l'immense patience dont il a su faire preuve.

Enfin, je n'oublie pas tous les thésards, CDD et stagiaires d'EDF qui se sont succédé au bâtiment I et qui se reconnaîtront, avec qui mes rapports furent aussi divers qu'enrichissants, et qui ont permis à cette thèse de se dérouler dans des conditions très agréables.

À Véro

Table des matières

| | |
|--|------------|
| Remerciements | iii |
| Notations et symboles | xi |
| 1 Introduction | 1 |
| 1.1 Cadre général | 1 |
| 1.2 Impact de la paroi sur l'écoulement | 2 |
| 1.3 Historique de la modélisation de la zone de proche paroi | 3 |
| 1.3.1 Les fonctions de paroi | 4 |
| 1.3.2 Approches valables jusqu'à la paroi | 6 |
| 1.4 Objectifs de l'étude | 7 |
| 1.4.1 Démarche générale | 7 |
| 1.4.2 Organisation de l'ouvrage | 8 |
| 2 Physique de la proche paroi | 9 |
| 2.1 Phénoménologie | 9 |
| 2.1.1 Mécanismes d'instabilité | 9 |
| 2.1.2 Structures cohérentes | 11 |
| 2.1.3 Lien entre structures instantanées et champ moyen | 15 |
| 2.2 Effets induits par la paroi à prendre en compte dans les modèles | 17 |
| 2.2.1 Effets dynamiques | 18 |
| 2.2.2 Effets cinématiques | 19 |
| 2.2.3 Conséquences pour la modélisation | 22 |
| 2.3 Comportements asymptotiques des termes de l'équation de transport du tenseur de Reynolds | 23 |
| 2.3.1 Introduction des développements de Taylor | 23 |
| 2.3.2 Tensions de Reynolds | 26 |
| 2.3.3 Bilans asymptotiques des tensions de Reynolds | 27 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.3.4 | Importance du comportement asymptotique de ϕ_{ij}^* pour la modélisation | 33 |
| 2.3.5 | Décomposition du terme de pression | 34 |
| 2.4 | Lois « universelles » | 36 |
| 2.4.1 | Lois de paroi | 38 |
| 2.4.2 | Loi de défaut de vitesse | 38 |
| 2.4.3 | Loi logarithmique | 39 |
| 2.4.4 | Validité du comportement « universel » | 40 |
| 2.5 | Conclusion du chapitre | 42 |
| 3 | Modélisation classique | 43 |
| 3.1 | Modèles au second ordre | 43 |
| 3.1.1 | Modélisation haut-Reynolds | 44 |
| 3.1.1.1 | Le terme de pression | 44 |
| 3.1.1.2 | Taux de dissipation | 50 |
| 3.1.1.3 | Diffusion turbulente | 51 |
| 3.1.1.4 | Diffusion par la pression | 51 |
| 3.1.2 | Extension vers la paroi | 51 |
| 3.1.2.1 | Diffusion moléculaire | 52 |
| 3.1.2.2 | Diffusion turbulente | 52 |
| 3.1.2.3 | Diffusion par la pression | 53 |
| 3.1.2.4 | Tenseur de dissipation | 54 |
| 3.1.2.5 | Taux de dissipation | 57 |
| 3.1.2.6 | Terme de pression | 59 |
| 3.1.3 | Analyse critique des modèles classiques | 62 |
| 3.1.3.1 | Problèmes de mise en œuvre | 62 |
| 3.1.3.2 | Difficultés à reproduire certains phénomènes | 63 |
| 3.1.3.3 | Problèmes de conception | 67 |
| 3.2 | Modèles à viscosité turbulente | 71 |
| 3.2.1 | Modèles haut-Reynolds | 72 |
| 3.2.2 | Extension vers la paroi | 73 |
| 3.2.3 | Limitations des modèles à viscosité turbulente | 75 |
| 3.3 | Conclusion du chapitre | 76 |
| 4 | Modélisation des effets de paroi par relaxation elliptique | 77 |
| 4.1 | Présentation | 77 |
| 4.1.1 | L'équation de relaxation elliptique | 77 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.1.2 | Modélisation de ε_{ij} | 81 |
| 4.1.3 | Conditions aux limites | 82 |
| 4.1.3.1 | Bilan asymptotique de $\overline{v^2}$ | 82 |
| 4.1.3.2 | Comportement asymptotique des tensions de Reynolds | 83 |
| 4.1.4 | Modèle complet | 85 |
| 4.2 | Hypothèses sous-jacentes | 88 |
| 4.2.1 | Fonction de corrélation scalaire | 88 |
| 4.2.2 | Modélisation de la fonction de corrélation | 89 |
| 4.2.3 | Inversion du produit de convolution | 90 |
| 4.2.4 | Échelle de longueur | 91 |
| 4.2.5 | Condition aux limites homogène sur le gradient de pression | 94 |
| 4.2.6 | Utilisation de la fonction de Green de \mathbb{R}^3 | 95 |
| 4.2.7 | Utilisation de la fonction f_{ij} | 97 |
| 4.3 | Analyse critique du modèle au second ordre | 99 |
| 4.3.1 | Améliorations apportées | 99 |
| 4.3.2 | Problèmes non-résolus | 101 |
| 4.3.3 | Points faibles spécifiques | 102 |
| 4.4 | Reformulation du modèle | 104 |
| 4.4.1 | Fonction de corrélation asymétrique | 104 |
| 4.4.2 | Transformation de l'espace | 108 |
| 4.4.3 | Test <i>a priori</i> des nouvelles formulations | 110 |
| 4.5 | Conclusion du chapitre | 113 |
| 5 | Le modèle $\overline{v^2}-f$. Utilisation dans un code industriel | 115 |
| 5.1 | Présentation du modèle | 115 |
| 5.1.1 | Équations | 115 |
| 5.1.2 | Sens de $\overline{v^2}$ dans un cas général | 118 |
| 5.1.3 | Conditions aux limites | 118 |
| 5.1.4 | Contraintes de réalisabilité | 118 |
| 5.2 | Implantation du modèle $\overline{v^2}-f$ dans N3S | 120 |
| 5.2.1 | Description | 120 |
| 5.2.1.1 | Le code N3S | 121 |
| 5.2.1.2 | Implantation du modèle $\overline{v^2}-f$ | 121 |
| 5.2.2 | Validation | 124 |
| 5.2.2.1 | Écoulement en canal à $Re_\tau = 395$ | 124 |
| 5.2.2.2 | Marche descendante | 126 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.2.3 | Canal garni de <i>ribs</i> | 128 |
| 5.2.3.1 | Présentation du cas test | 128 |
| 5.2.3.2 | Cas sans transferts thermiques | 128 |
| 5.2.3.3 | Cas avec transferts thermiques | 130 |
| 5.3 | Conclusion du chapitre | 132 |
| 6 | Conclusion | 145 |
| A | Rapport paru dans : <i>Proceedings of the Summer Program 1998, Center for Turbulence Research, Stanford University</i> | 149 |
| B | Article paru dans : <i>Proceedings of the first Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, Santa Barbara, 1999</i> | 171 |
| C | Article soumis à : <i>Journal of Fluid Mechanics</i> | 179 |
| D | Article paru dans : <i>Proceedings of the fourth Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, Porticcio, Corsica, 1999</i> | 215 |
| | Bibliographie | 227 |

Notations et symboles

Opérateurs mathématiques

| | | | |
|---------------------------------|---|-------------------------------------|---|
| $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ | Produit scalaire de \mathbf{u} et \mathbf{v} | $\partial f / \partial \mathbf{u}$ | $\nabla f \cdot \mathbf{u}$ |
| $\ \mathbf{u}\ $ | $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ | $\partial^2 f / \partial \varphi^2$ | Dérivée seconde partielle de f par rapport à φ |
| \bar{f} | Moyenne d'ensemble de la fonction f | Df/Dt | Dérivée particulaire de f |
| $df/d\varphi$ | Dérivée totale de f par rapport à φ | $\text{dév}(M_{ij})$ | Déviateur du tenseur M_{ij} : $\text{dév}(M_{ij}) = M_{ij} - \frac{1}{3}M_{kk}\delta_{ij}$ |
| $d^2f/d\varphi^2$ | Dérivée seconde totale de f par rapport à φ | ∇f | Gradient de f : $\nabla f = (\partial f / \partial x; \partial f / \partial y; \partial f / \partial z)$ |
| $\partial f / \partial \varphi$ | Dérivée partielle de f par rapport à φ | $\nabla^2 f$ | Laplacien de f : $\nabla^2 f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2$ |

Symboles latins

| | | | |
|----------|---|-----------------|---|
| a_i | Termes du développement asymptotique de u en $y = 0$ | A_3 | Troisième invariant du tenseur d'anisotropie $A_3 = a_{ij}a_{jk}a_{ki}$ |
| a_i^+ | $\nu^i a_i / u_\tau^{i+1}$ | \mathcal{A}_i | Termes du développement asymptotique de U en $y = 0$ |
| a_{ij} | Tenseur d'anisotropie $a_{ij} = \overline{u_i u_j} / k - \frac{2}{3}\delta_{ij}$ | b_i | Termes du développement asymptotique de v en $y = 0$ |
| A | Paramètre d'aplatissement de Lumley, $A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3)$ | b_i^+ | $\nu^i b_i / u_\tau^{i+1}$ |
| A_2 | Deuxième invariant du tenseur d'anisotropie $A_2 = a_{ij}a_{ji}$ | c | Célérité |
| | | c_i | Termes du développement asymptotique de w en $y = 0$ |

| | | | |
|------------------|--|----------------------|---|
| c_i^+ | $\nu^i c_i / u_\tau^{i+1}$ | f | Fonction de corrélation en deux points de Durbin |
| C_1 | coefficient du terme linéaire dans la forme générale de ϕ_{ij}^1 | | $\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ |
| C'_1 | coefficient du terme quadratique dans la forme générale de ϕ_{ij}^1 | \mathcal{F} | Fonction de corrélation en deux points « classique » |
| | | | $\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ |
| C_{ij} | Terme de convection des tensions de Reynolds | f_{ij} | \mathcal{P}_{ij}/k |
| | | G_Ω | Fonction de Green du domaine Ω pour l'opérateur ∇^2 |
| C_f | Coefficient de frottement : $C_f = \tau_p / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2$ | | |
| C_p | Coefficient de pression : $C_p = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_\infty) / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2$ | \mathcal{G}_Ω | Fonction de Green du domaine Ω pour l'opérateur $1/L^2 - \nabla^2$ |
| d | Distance à la paroi | | |
| dV | Volume élémentaire | h | Demi-largeur d'un canal ou, en général, dimension caractéristique d'un écoulement |
| dS | Surface élémentaire | | |
| $\partial\Omega$ | Frontière du domaine Ω | | |
| D_e | Diamètre Hydraulique | i | $\sqrt{-1}$ |
| D^p | Terme de diffusion par la pression de k | k | Énergie cinétique turbulente par unité de masse : $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ |
| D_{ij}^p | Terme de diffusion par la pression des tensions de Reynolds | k_x | Nombre d'onde dans la direction x |
| | | ℓ | Longueur de recirculation |
| D^T | Terme de diffusion turbulente de k | L | Longueur de corrélation caractérisant f , la fonction de corrélation en deux points de Durbin |
| D_{ij}^T | Terme de diffusion turbulente des tensions de Reynolds | | |
| D^ν | Terme de diffusion moléculaire de k | L_{int} | Échelle intégrale caractérisant ϕ_{ij}^* |
| D_{ij}^ν | Terme de diffusion moléculaire des tensions de Reynolds | L_T | Échelle de longueur turbulente, $L_T = C k^{3/2} / \varepsilon$ |
| e | $\exp(1)$ | | |
| f | Fonction scalaire de utilisée dans le modèle $\overline{v^2} - f$ | L_K | Échelle de longueur de Kolmogorov, $L_K = C \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$ |

| | | | |
|----------------------|---|-------------------|--|
| \mathbf{n} | Normale unitaire sortante en un point de frontière | s | Abscisse curviligne le long d'une paroi (cas 2D) |
| \mathbf{n}' | \mathbf{n} au point \mathbf{x}' | S_{ij} | Tenseur des taux de déformation moyenne, $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial U_i/\partial x_j + \partial U_j/\partial x_i)$ |
| Nu | Nombre de Nusselt : $Nu = \dot{q}_p D_e / \lambda (\Theta_p - \Theta_b)$ | t | Temps |
| \tilde{p} | Pression instantanée | T | Échelle de temps turbulente |
| p | Pression fluctuante | \tilde{u} | Composante suivant x de la vitesse instantanée |
| p_i | Termes du développement asymptotique de p en $y = 0$ | u | Composante suivant x de la vitesse fluctuante |
| \mathcal{P} | Pression moyenne | u' | Écart-type de u (valeur <i>rms</i>), $u' = \overline{u^2}^{1/2}$ |
| \mathcal{P}_∞ | Pression moyenne à l'infini en écoulement externe | u'_∞ | u' à l'infini |
| P | Taux de production de k | u_1 | cf. u |
| P_{ij} | Terme de production des tensions de Reynolds | u_2 | cf. v |
| \mathcal{P}_{ij} | $\phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^*$ | u_3 | cf. w |
| Pr_T | Nombre de Prandtl turbulent | u_τ | Vitesse de frottement : $u_\tau^2 = \tau_p / \rho$ |
| \dot{q}_p | Flux de chaleur à la paroi | \overline{uv}^+ | \overline{uv} / u_τ^2 |
| r | $\ \mathbf{x}' - \mathbf{x}\ $ | U | Composante suivant x de la vitesse moyenne |
| \mathbb{R} | Ensemble des nombres réels | U^+ | U / u_τ |
| R_{ij} | Composantes du tenseur de Reynolds | U_1 | cf. U |
| Re | Nombre de Reynolds $Re = hU_b / \nu$ | U_2 | cf. V |
| Re_c | Nombre de Reynolds critique en écoulement de Poiseuille | U_3 | cf. W |
| Re_T | Nombre de Reynolds turbulent : $Re_T = k^2 / \nu \varepsilon$ | U_∞ | U à l'infini en écoulement externe |
| Re_δ | Nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de la couche limite : $Re_\delta = \delta U_\infty / \nu$ | U_b | U moyen, dans le cas d'un canal (vitesse débitante ou <i>bulk velocity</i>) |
| Re_τ | Nombre de Reynolds de frottement : $Re_\tau = hu_\tau / \nu$ | U_m | U maximum, dans le cas d'un canal |

| | | | |
|-----------------|--|----------------|--|
| \tilde{v} | Composante suivant y de la vitesse instantanée | x | 1 ^{re} coordonnée cartésienne, en général suivant l'axe longitudinal (axe principal de l'écoulement) |
| v | Composante suivant y de la vitesse fluctuante | | |
| v' | Écart-type de v (valeur <i>rms</i>), $v' = \overline{v^2}^{1/2}$ | x^+ x_1 | xu_τ/ν cf. x |
| V | Composante suivant y de la vitesse moyenne | x_2 x_3 | cf. y cf. z |
| \tilde{w} | Composante suivant z de la vitesse instantanée | y | 2 ^e coordonnée cartésienne, en général suivant l'axe normal (perpendiculaire à la paroi) |
| w | Composante suivant z de la vitesse fluctuante | y^+ | yu_τ/ν |
| w' | Écart-type de w (valeur <i>rms</i>), $w' = \overline{w^2}^{1/2}$ | z | 3 ^e coordonnée cartésienne, en général suivant l'axe transversal (parallèle à la paroi, perpendiculaire à l'axe principal de l'écoulement, (x,y,z) formant un repère direct orthonormé) |
| W | Composante suivant z de la vitesse moyenne | | |
| \mathbf{x} | Vecteur position | | |
| \mathbf{x}' | Vecteur position | | |
| \mathbf{x}'^* | Symétrique de \mathbf{x}' par rapport à la paroi | z^+ | zu_τ/ν |

Symboles grecs

| | | | |
|------------|--|----------------------|---|
| α | Diffusivité thermique | δ | Épaisseur de la couche limite ($U/U_\infty = 99\%$) |
| α_T | Diffusivité thermique turbulente | δ^ν | Épaisseur de la couche limite visqueuse ($u'/u'_\infty = 99\%$) |
| α | Bijection d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sur lui-même | $\delta(\mathbf{x})$ | Distribution de Dirac au point \mathbf{x} |
| Γ | Coefficient d'amplification théorique en zone logarithmique associé à une équation de relaxation elliptique : $\Gamma = \phi_{ij}^*/\phi_{ij}^h$ | δ_{ij} | Symbole de Kronecker |
| | | ε | Taux de dissipation de k |
| | | ε_p | Valeur de ε à la paroi |

| | | | |
|----------------------|---|--------------------------------------|--|
| ε_{ij} | Terme de dissipation des tensions de Reynolds | ϕ_{ij}^1 | Partie lente de ϕ_{ij} |
| ε_{ij}^* | Forme limite utilisée pour modéliser ε_{ij} à proximité d'une paroi | ϕ_{ij}^2 | Partie rapide de ϕ_{ij} |
| η | y/h | ϕ_{ij}^h | Modèle quasi-homogène pour ϕ_{ij} |
| θ | Température fluctuante | ϕ_{ij}^S | Partie surfacique de ϕ_{ij} |
| Θ | Température moyenne | ϕ_{ij}^* | Terme de corrélation vitesse–gradient de pression (ou terme de pression) |
| Θ_b | Température moyenne débitante : $\Theta_b = \int_0^{2H} \Theta U y dy / \int_0^{2H} U y dy$ | Ψ | Fonction de courant |
| Θ_p | Température moyenne à la paroi | $\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ | Corrélation vitesse–laplacien du gradient de pression |
| κ | Constante de Kármán | $\tilde{\omega}_x$ | Vorticité instantanée suivant x |
| λ | Conductivité thermique | $\tilde{\omega}_1$ | cf. $\tilde{\omega}_x$ |
| μ | Viscosité moléculaire dynamique | $\tilde{\omega}_y$ | Vorticité instantanée suivant y |
| ν | Viscosité moléculaire cinématique $\nu = \mu/\rho$ | $\tilde{\omega}_2$ | cf. $\tilde{\omega}_y$ |
| ν_T | Viscosité turbulente | $\tilde{\omega}_z$ | Vorticité instantanée suivant z |
| $\nu_{T_{lm}}$ | Viscosité turbulente généralisée : $\nu_{T_{lm}} = C_\mu \overline{u_l u_m} T$ | $\tilde{\omega}_3$ | cf. $\tilde{\omega}_z$ |
| ρ | Masse volumique | Ω | Domaine de \mathbb{R}^3 |
| τ_p | Contrainte de cisaillement à la paroi : $\tau_p = \mu \partial U / \partial y$ | Ω_x | Vorticité moyenne suivant x |
| ϕ | Transformée de Fourier de Ψ suivant x et t | Ω_1 | cf. Ω_x |
| ϕ_{ij} | Terme de corrélation pression–déformation | Ω_y | Vorticité moyenne suivant y |
| | | Ω_2 | cf. Ω_y |
| | | Ω_z | Vorticité moyenne suivant z |
| | | Ω_3 | cf. Ω_z |
| | | Ω_{ij} | Tenseur de vorticité moyenne, $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial U_i / \partial x_j - \partial U_j / \partial x_i)$ |

Chapitre 1

Introduction

1.1 Cadre général

La modélisation de la turbulence est considérée comme l'un des grands défis à relever par le monde scientifique au siècle prochain. L'étude du phénomène physique qu'est la turbulence a réellement commencé il y a déjà une centaine d'années, avec les travaux d'Osborne Reynolds, et, malgré les efforts conjugués d'innombrables scientifiques au cours de ce siècle, de nombreux écoulements dit « de la vie réelle », par opposition aux cas d'école, sont toujours physiquement mal compris et leur prédiction est loin d'être satisfaisante.

L'un des exemples les plus criants de phénomène mal maîtrisé est l'influence de la présence d'une paroi solide sur la turbulence, ce qui est assez déconcertant pour quelqu'un qui n'est pas familier avec la dynamique des fluides, tant les parois sont omniprésentes. Mis à part certains écoulements dit *libres*, tels que les jets et les couches de mélange, et quelques cas d'école comme la turbulence de grille, la plupart des écoulements se font soit autour d'un obstacle, comme un véhicule ou un bâtiment (écoulements *externes*), soit à l'intérieur d'un domaine limité par des parois, dans une conduite, une turbine ou un moteur (écoulements *internes*).

Cependant, la présence de la paroi ne se fait sentir que sur une région souvent très mince, la *couche limite*. En dehors de celle-ci, on peut prédire un écoulement externe en négligeant la viscosité du fluide, c'est-à-dire en considérant un fluide parfait, régi par les équations d'Euler. C'est le cas notamment en aérodynamique externe. L'obstacle présent dans l'écoulement, par exemple une aile d'avion, n'a plus qu'une influence géométrique. On est alors capable de prédire les caractéristiques de l'écoulement avec une très bonne précision, ainsi que la force verticale qui s'exerce sur l'aile, la *portance*.

Cependant, on obtient invariablement une force de *traînée* nulle, comme si le fluide n'offrait aucune résistance au mouvement, ce qui va totalement à l'encontre de l'expérience. Ce résultat est connu sous le nom de *paradoxe de d'Alembert*. Pour lever ce paradoxe, on doit prendre en compte la couche limite, qui, bien que d'une très faible épaisseur, est le siège d'une intense transformation d'énergie cinétique en énergie interne, responsable de la résistance à l'avancement.

1.2 Impact de la paroi sur l'écoulement

L'apparition de la couche limite est une conséquence de la viscosité moléculaire, qui oblige le fluide à adhérer à la paroi. De nombreux phénomènes en découlent, qui seront décrits au cours de cette étude. En fonction du poids relatif de ces divers phénomènes, la couche limite peut elle-même être divisée en plusieurs zones (cf. 2.4). Notamment, l'analyse dimensionnelle [150] montre qu'il doit exister, dans la zone la plus proche de la paroi, une *sous-couche visqueuse*, qui, comme son nom l'indique, est dominée par les effets visqueux, et qui est caractérisée, entre autres, par des gradients de vitesse bien plus forts que dans le reste de la couche limite. On peut estimer [49] que, bien que cette zone soit, en pratique, d'une taille d'au moins deux ordres de grandeur inférieure à la taille caractéristique de l'écoulement, elle est typiquement le siège de 50 % de la perte de vitesse entre l'écoulement libre et la paroi. La prise en compte de la sous-couche visqueuse est donc très importante, mais malheureusement, elle est également très délicate.

La paroi est à l'origine de phénomènes physiques intenses qui régissent l'ensemble de la couche limite. Notons, tout d'abord, qu'elle est la cause essentielle de la turbulence elle-même. En effet, la conjugaison de la viscosité du fluide et de la présence de la paroi est souvent à l'origine de la transition de l'état laminaire à l'état turbulent (d'autres phénomènes peuvent aussi provoquer la transition). De plus, lorsque la turbulence est établie, elle est essentiellement maintenue par l'équilibre entre deux phénomènes concurrents, qui sont tous les deux actifs très près de la paroi : la production et la dissipation. La production, qui atteint son maximum à la frontière externe de la sous-couche visqueuse, est un phénomène de conversion de l'énergie cinétique du mouvement moyen en énergie cinétique turbulente, qui par conséquent « alimente » la turbulence. La dissipation, quant à elle, atteint son maximum à la paroi même, et tend à faire diminuer l'intensité de la turbulence en transformant son énergie cinétique en énergie interne. On voit donc que la région de très proche paroi est le siège des principaux phénomènes énergétiques qui « pilotent » la turbulence, dont l'influence se

fait sentir sur toute la couche limite par le biais des phénomènes de transport : diffusion moléculaire, diffusion turbulente et diffusion par la pression.

De plus, dans un cadre industriel, les quantités les plus importantes à prédire sont souvent celles qui se mesurent à la paroi même. En dehors du coefficient de pression à la paroi C_p , qui permet de calculer la portance, et pour lequel on peut faire abstraction de la couche limite, les grandeurs à la paroi ne peuvent être prédites correctement que si l'on est capable de simuler avec précision le comportement de la turbulence au voisinage de celle-ci. L'une de ces grandeurs est le *coefficient de frottement* C_f , qui permet de calculer la force de traînée qu'exerce le fluide sur les parois. Les exemples ne manquent pas : pertes de charges dans une conduite ; forces latérales s'exerçant sur un bâtiment ou sur un pont ; résistance de l'air sur une voiture ou un avion, de l'eau sur un bateau ; etc. Une autre de ces grandeurs primordiales est le coefficient de transfert thermique, dit *nombre de Nusselt* (Nu). Ce dernier permet de calculer les échanges de chaleur entre solide et fluide, et il est souvent le paramètre le plus important à prédire industriellement : échanges thermiques dans les centrales électriques, refroidissement des composants électroniques d'un ordinateur, échauffement d'un moteur, etc. Et pourtant, nous allons voir que la prédiction réaliste du comportement de la turbulence à proximité d'une paroi n'a commencé à se développer que très récemment.

1.3 Historique de la modélisation de la zone de proche paroi

On dispose de très peu de résultats théoriques en turbulence, en dehors de la turbulence homogène ou isotrope. Ces résultats ayant servi de base à la modélisation, celle-ci n'est plus valable dans les situations fortement inhomogènes et anisotropes, ce qui est le cas à proximité d'une paroi. De plus, les mesures expérimentales étant invariablement rendues très difficiles, voire impossibles, dans les régions proches des parois, notre connaissance de la physique régissant ces régions est restée longtemps lacunaire. Très récemment, au milieu des années 80, l'avènement de super-calculateurs a permis de réaliser des simulations directes de la turbulence (DNS¹), qui consistent à résoudre directement les équations de Navier–Stokes, sans aucune modélisation. Ces « expériences numériques », très fiables et très précises, ont éclairé d'un jour nouveau la physique de la proche paroi et ont permis à la modélisation de réaliser d'importantes avancées.

Cependant, il existe un délai important entre le moment où un nouveau type de

1. *Direct numerical simulations.*

modélisation apparaît dans le cadre de la recherche et celui où il est utilisé de manière extensive dans l'industrie. Ce temps d'adaptation n'est pas seulement dû à une certaine inertie du monde industriel, mais aussi à la complexité des nouveaux modèles et à la finesse des maillages qu'ils requièrent. C'est pourquoi les méthodes les plus anciennes ont encore la vie dure et seront probablement encore largement utilisées à moyen terme.

1.3.1 Les fonctions de paroi

La sous-couche visqueuse représente une très faible portion de l'écoulement : en effet, on peut estimer, à partir de formules empiriques donnant le coefficient de frottement en fonction du Reynolds [88], que le rapport de sa taille à celle de la couche limite varie à nombre de Reynolds modéré comme $Re_\delta^{-7/8}$ (cf. [56]), où Re_δ est le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de la couche limite, et à nombre de Reynolds élevé comme $Re_\delta^{-9/10}$. Dès lors, la finesse des maillages nécessaires pour résoudre les équations jusqu'à la paroi, avec suffisamment de points dans la sous-couche visqueuse pour capter les très forts gradients dont elle est le siège, devient très vite prohibitif, sachant que le nombre de Reynolds peut atteindre plusieurs millions dans les applications industrielles. C'est pourquoi, depuis les premières simulations numériques de la fin des années 60, la technique des fonctions de paroi a été très populaire, et elle est encore largement utilisée aujourd'hui dans l'industrie.

L'utilisation des fonctions de paroi a l'avantage certain de ne pas nécessiter l'intégration des équations de transport des vitesses et des quantités turbulentes jusqu'à la paroi. En effet, la sous-couche visqueuse est contenue dans la seule maille de paroi, et on applique au premier point intérieur au domaine des conditions aux limites estimées en considérant que les différentes grandeurs suivent un comportement universel (cf. § 2.4). De très bonnes descriptions détaillées de cette technique, formalisée par Patankar & Spalding [122], sont données par Laurence [88], Schiestel [134], ou encore Launder [77].

Le principe général qui sous-tend les diverses formulations utilisées est l'expression des différentes quantités en fonction des échelles de vitesse et de longueur caractéristiques de l'écoulement dans la sous-couche visqueuse. Ces grandeurs sont u_τ , la vitesse de frottement, et ν/u_τ , où ν est la viscosité moléculaire cinématique du fluide. On montre que les variables de l'écoulement, adimensionnées par ces échelles, obéissent à un comportement universel. La méthode la plus simple consiste alors à évaluer les conditions aux limites sur les différentes variables du problème directement grâce à leurs valeurs dans la zone logarithmique. L'inconvénient est que, dans ce cas, le calcul est très sensible à la position du premier point intérieur et devient par conséquent très dépendant du maillage. C'est pourquoi des méthodes plus élaborées ont été appliquées,

fondées sur l'intégration de profils estimés des variables turbulentes à travers la sous-couche visqueuse et la zone tampon : il s'agit par exemple de la formulation de Chieng & Launder [14] ou de celle à trois couches de Amano & Goel [1].

Ces techniques de fonctions de paroi sont toutes fondées sur l'hypothèse d'une zone de l'écoulement, dite *zone inertielle* ou *logarithmique*, caractérisée par une contrainte de cisaillement constante, qui n'existe que dans la limite des grands nombres de Reynolds. Le comportement « universel » qui en est déduit est en fait dans le cas général une approximation au premier ordre : la correction au second ordre fait apparaître une dépendance en fonction du nombre de Reynolds [150]. Ce résultat théorique a été maintes fois observé expérimentalement, et a même été récemment confirmé par la simulation directe [2, 110]. On peut alors se demander si les fonctions de paroi ont une réelle justification et si elles peuvent être d'une quelconque utilité pratique. Il est alors assez surprenant de constater qu'elles donnent des résultats plausibles dans un certain nombre de situations dont certaines semblent de prime abord totalement hors de leur champ d'application [107].

Cependant, les exigences industrielles requièrent mieux qu'une solution simplement plausible, notamment lorsqu'il s'agit de prédire les quantités citées plus haut (C_f , Nu). Par exemple, en ce qui concerne le nombre de Nusselt, les fonctions de paroi donnent des résultats totalement erronés dès que l'écoulement n'est plus parallèle à la paroi (jet impactant), ou lorsque les conditions aux limites thermiques varient brutalement [78]. D'autre part, elles doivent être ajustées d'un écoulement à un autre : le cas de la convection naturelle le long d'une plaque plane nécessite des fonctions de paroi particulières, comme celles utilisées par Yuan *et al.* [166], basées sur les développements théoriques de George & Capp [44]. So & Yoo [142] recensent de nombreuses autres situations pour lesquelles les fonctions de paroi sont complètement inadaptées : séparation, relaminarisation, transpiration, écoulements complexes (tridimensionnels, notamment).

Dans cette dernière catégorie, le cas test du cube posé dans un canal [53] est particulièrement probant. Les simulations que nous avons effectuées dans le cadre du *workshop* ERCOFTAC de 1997 [149], que ce soit avec un modèle $k-\varepsilon$ ou un modèle au second ordre, ont montré qu'une partie très importante de l'information sur les structures turbulentes près de la paroi était « oubliée » par les fonctions de parois [102]. Notamment, les expériences montrent des profils de vitesse tridimensionnels complexes très près de la paroi qui ne peuvent évidemment pas être retrouvés lorsque le premier point de calcul est au-dessus de cette zone. Il en résulte une très mauvaise prédiction des lignes de frottement à la paroi, qui ne peut être améliorée qu'en rapprochant le premier point de calcul de cette dernière, tombant alors dans une zone dans laquelle les conditions aux

limites sur les grandeurs turbulentes ne sont plus valables.

Ces premières simulations numériques, qui ont eu lieu en début de thèse, nous ont fortement incités à nous orienter vers des modèles bas-Reynolds, qui constituent le sujet principal de ce rapport. De même, Launder [76] a suggéré, il y a déjà quinze ans, d'abandonner définitivement les fonctions de parois. Malgré cela, en raison de leur simplicité et des réductions drastiques du nombre de points de maillage qu'elles autorisent, elles sont toujours très utilisées dans l'industrie et probablement pour de longues années encore...

1.3.2 Approches valables jusqu'à la paroi

Pour éviter l'utilisation des fonctions de paroi, de nombreux efforts ont été dirigés depuis une trentaine d'années vers l'intégration des équations de transport de la turbulence jusqu'aux frontières solides du domaine. L'idée de base est de simuler l'effet de la paroi sur la turbulence à l'aide de fonctions d'amortissement. La formule de Van Driest [157] est la plus ancienne, et elle a été d'abord appliquée à des modèles de type longueur de mélange [125]. Elle a servi de base à un grand nombre de modèles, dit *bas-Reynolds*. À la suite de Jones & Launder [57], de nombreux $k-\varepsilon$ bas-Reynolds basés sur des fonctions d'amortissement ont été proposés. De même, depuis Hanjalić & Launder [49], ce type d'approche a été utilisé pour étendre le domaine de validité des modèles au second ordre jusqu'aux frontières solides. Dans ce cas, il est également nécessaire d'introduire des termes dits d'*écho de paroi* [28, 45, 141].

L'évolution actuelle de la modélisation est de chercher à éviter également ce type de corrections. En effet, celles-ci sont ajustées en général par référence à des expériences : elles ne peuvent alors être valables que sur certains types d'écoulements, proches de celui sur lequel elles ont été calibrées, et souffrent par conséquent d'un manque d'universalité. Actuellement, il est généralement reconnu que des approches plus élaborées, basées le plus possible sur des considérations théoriques, sont nécessaires. Le comportement de la turbulence au voisinage des parois peut être reproduit grâce à l'incorporation de termes non-linéaires, que ce soit dans des modèles à viscosité turbulente [146] ou au second ordre [24]. Enfin, une autre approche est celle proposée par Durbin [35, 38], qui évite l'introduction de termes non-linéaires en résolvant une équation différentielle supplémentaire dite de *relaxation elliptique*. L'influence de la paroi se fait alors sentir à travers l'opérateur elliptique. C'est cette approche, à notre sens la plus prometteuse, qui a été étudiée durant la thèse.

1.4 Objectifs de l'étude

1.4.1 Démarche générale

Cette thèse se situe dans le cadre des applications industrielles de la modélisation de la turbulence au sein d'EDF. En particulier, l'un des points difficiles rencontrés actuellement est le calcul des transferts thermiques au sein des circuits des centrales électriques, régissant les échanges de chaleur entre solides et fluides [87]. On comprendra aisément qu'il y ait une véritable exigence de précision, dans la mesure où ces échanges sont déterminants pour les rendements, le dimensionnement des circuits et la sécurité.

La division recherche et développement d'EDF cherche alors constamment à concilier deux contraintes : la fiabilité des prédictions et le moindre coût des simulations numériques. Dans bien des cas, par le passé, la complexité des géométries et les forts nombres de Reynolds ne permettaient pas d'éviter l'utilisation du modèle $k-\varepsilon$ haut-Reynolds standard, associé à des fonctions de paroi. Cependant, depuis quelques années, la puissance sans cesse accrue des super-calculateurs a permis la mise en œuvre de méthodes plus élaborées : modèles bas-Reynolds, modèles au second ordre [91, 128], mais aussi simulation des grandes échelles [129].

Parmi les modèles bas-Reynolds apparus durant les dernières décennies, aucun ne semblait vraiment émerger comme étant supérieur aux autres [123]. L'apparition de données de simulation directe et l'éclairage qu'elles ont apporté sur la physique de la proche paroi, ainsi que le développement d'un cadre théorique pour la modélisation (modélisation invariante [98]), ont un moment apporté l'espoir que le problème de la prise en compte de la paroi allait être résolu rapidement. Malheureusement, si d'indéniables progrès ont été réalisés, la complexité des modèles non-linéaires les plus récents et l'impression générale de « manipulation » arbitraire des termes pour les adapter un par un à des écoulements particuliers n'ont pas permis à la modélisation bas-Reynolds de s'imposer en dehors du microcosme de la recherche.

C'est pourquoi l'approche de Durbin, qui rompt radicalement avec les précédentes, en se basant sur des considérations théoriques et en évitant au maximum l'introduction de termes *ad hoc*, paraît être la plus prometteuse en terme d'universalité et, ce qui est peut-être l'essentiel, en terme d'accessibilité au plus grand nombre.

Cependant, de nombreuses questions restent ouvertes. Nous nous attacherons en particulier à l'analyse des raisons des succès rencontrés jusqu'à maintenant par cette approche. Nous tenterons de lever le voile sur les objections qui sont habituellement formulées en ce qui concerne la validité des hypothèses sous-jacentes au modèle. L'un des buts de cette étude est d'explorer des pistes d'amélioration des performances de ce

dernier, en adoptant résolument une démarche scientifique à l'encontre des « manipulations » citées plus haut. De plus, dans l'optique industrielle qui nous concerne, nous tenterons de démontrer l'applicabilité de cette approche dans le cadre d'un code généraliste, aux éléments finis, utilisant des maillages non-structurés adaptés aux géométries complexes.

1.4.2 Organisation de l'ouvrage

Dans un premier temps, nous analyserons les spécificités des écoulements en présence de parois solides. Nous nous attacherons à la description phénoménologique de la turbulence en proche paroi et à la compréhension des différents mécanismes dont la prise en compte est nécessaire dans les modèles bas-Reynolds. Nous nous attarderons également sur les comportements asymptotiques des différentes grandeurs de l'écoulement, ainsi que sur le caractère universel de leur comportement dans le cas simple du canal.

Ensuite, nous exposerons les méthodes classiquement utilisées pour développer les modèles de turbulence haut-Reynolds et les corrections qu'elles rendent nécessaires pour étendre le domaine de validité de ces modèles jusqu'aux parois. Nous analyserons alors les problèmes que ces approches rencontrent pour prédire certains écoulements et en rechercherons les causes dans les hypothèses de modélisation.

Nous présenterons alors la méthode de la relaxation elliptique et les hypothèses qui la sous-tendent. Nous mettrons l'accent sur les améliorations que cette méthode apporte par rapport aux méthodes plus classiques, ainsi que sur les problèmes qu'elle ne résout pas. L'un des points les plus importants de ce travail consiste en l'analyse, à partir de données de simulation directe, de la validité des hypothèses qui fondent la base théorique du modèle, qui nous conduira à montrer que des améliorations sont possibles en prenant en compte un peu plus finement les corrélations en deux points, permettant de développer de nouvelles formulations de l'équation de relaxation elliptique.

Enfin, nous démontrerons l'applicabilité industrielle du modèle réduit à trois équations de transport, le $\overline{v^2-f}$, en décrivant son implantation dans le code N3S et son utilisation sur le cas du canal garni de *ribs*, avec ou sans transferts thermiques.

Chapitre 2

Physique de la proche paroi

2.1 Phénoménologie

2.1.1 Mécanismes d'instabilité

L'étude de la stabilité linéaire des écoulements laminaires est un outil mathématique puissant pour prédire la transition vers la turbulence. En effet, il est aujourd'hui généralement admis que la turbulence résulte d'une succession d'instabilités subies par l'écoulement laminaire initial lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds. La solution devient alors de plus en plus complexe et instationnaire, traversant une *cascade de bifurcations*, pour devenir finalement chaotique. Cette vision de la transition, assez ancienne, est due à Landau [75], et bien qu'elle soit toujours sujette à controverse, elle a reçu un certain nombre de confirmations expérimentales. Elle a été remise récemment au goût du jour par Ruelle & Takens [132], qui ont remarqué qu'il suffisait de quelques bifurcations pour obtenir un état chaotique, et elle a bénéficié de nombreux travaux mathématiques sur le chaos [8, 9, 103].

Bien qu'on ne puisse pas déduire directement de l'étude de la transition les propriétés de la turbulence, il est très utile d'en comprendre les mécanismes. En effet, comme le souligne Ferziger [43], il est étonnant de constater la similitude qui existe entre les structures instantanées présentes dans les écoulements turbulents et celles qui résultent directement de la déstabilisation des écoulements laminaires. Dans les écoulements libres cisailés, les instabilités sont dues à la présence de points d'inflexion dans les profils de vitesse moyenne, correspondant à un maximum de vorticité (instabilité de Kelvin–Helmholz). Ce mécanisme est totalement inviscide, c'est-à-dire qu'il ne fait pas intervenir la viscosité moléculaire du fluide. En revanche, la transition qui se produit près des parois obéit à une physique totalement différente, les profils de vitesse moyenne

ne présentant pas, en général, de point d'inflexion.

Il existe essentiellement deux mécanismes qui peuvent conduire à la transition des écoulements de proche paroi. Le premier, appelé *bypass transition*, est encore de nos jours assez mal connu. Il se produit lorsque l'écoulement au loin de la paroi est lui-même déjà pleinement turbulent. Les structures turbulentes de l'écoulement externe viennent alors perturber l'écoulement laminaire présent à proximité de la paroi et déclenchent la transition. Orzag & Kells [116] notent qu'une perturbation tridimensionnelle peut, en générant de la vorticité longitudinale, être à l'origine de profils inflexionnels instantanés qui provoquent localement une bouffée turbulente (*spot*), sans que l'on puisse distinguer de véritables structures organisées.

Le second mécanisme, appelé *transition naturelle*, est beaucoup mieux compris. On peut en particulier étudier de manière théorique la stabilité linéaire de la solution laminaire d'un écoulement de Poiseuille. Pour cela, il suffit d'étudier le comportement temporel de perturbations infinitésimales bidimensionnelles¹, dont les modes de Fourier s'écrivent :

$$\Psi(x,y,t) = \phi(y)e^{ik_x(x-ct)} \quad (2.1)$$

où Ψ est la fonction de courant de la perturbation. L'évolution de ces perturbations est donnée par l'équation d'Orr–Sommerfeld [29, 116] :

$$\frac{1}{ik_x Re} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k_x^2 \right) \phi = (U - c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k_x^2 \right) \phi - \phi \frac{d^2 U}{dy^2} \quad (2.2)$$

   très bas nombre de Reynolds Re , la solution laminaire est stable, c'est-à-dire que les perturbations infinitésimales sont amorties.    partir d'un nombre de Reynolds critique, $Re_c = 5\,772$, il existe une bande de nombres d'onde instables, comme l'illustre la figure 2.1. Il est à noter que, même à des nombres de Reynolds inférieurs à Re_c , on observe des modes qui décroissent si lentement qu'ils survivent longtemps dans l'écoulement. Ce sont les modes les moins stables, connus sous le nom d'*ondes de Tollmien–Schlichting*. Ils se développent dans une zone à une certaine distance de la paroi, appelée *couche critique*. Ils prennent la forme de tourbillons alignés dans la direction transverse, qui sont sujets eux-mêmes, à plus haut Reynolds, à une instabilité secondaire qui tend à les aligner dans la direction de l'écoulement. Il en résulte des tourbillons en forme d'épingle (*hairpin vortices*), qui sont étirés par l'action du cisaillement moyen [130]. En augmentant de nouveau le nombre de Reynolds, ces tourbillons, soumis à de nouvelles instabilités, forment de nouvelles structures de plus en plus complexes qui finissent par dégénérer en un écoulement chaotique, la turbulence.

1. Le théorème de Squire [29, 116] montre que le premier mode instable est bidimensionnel.

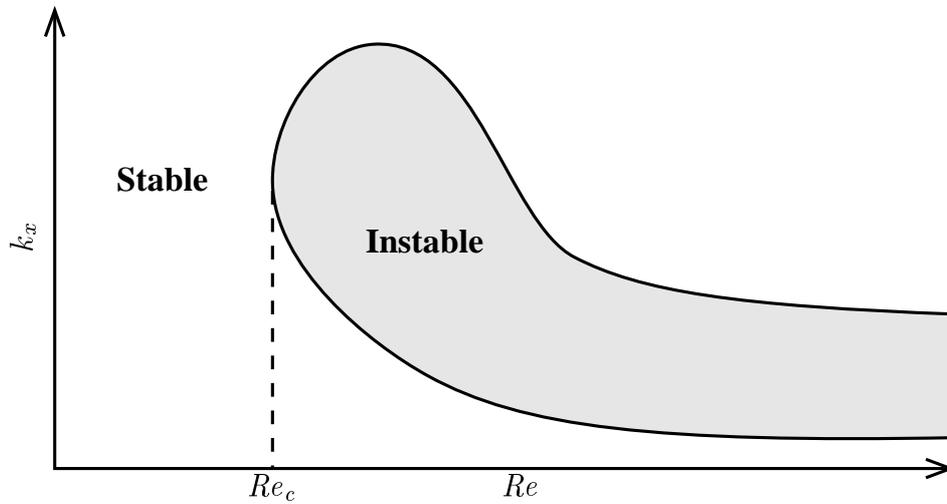


FIG. 2.1 – Vue schématique de la courbe de stabilité marginale de l'écoulement de Poiseuille laminaire.

Ce type de résultats mathématiques ne peut être obtenu que dans des écoulements laminaires simples. Cependant, le mécanisme que nous venons de décrire est également à l'origine de la formation de structures cohérentes observées dans la zone de proche paroi en turbulence développée. Ces structures sont elles-mêmes la cause des phénomènes de production et de transport de la turbulence qui jouent un rôle essentiel dans les équations de transport du tenseur de Reynolds.

2.1.2 Structures cohérentes

Bien que la turbulence ait, depuis Reynolds, été essentiellement traitée comme un processus stochastique, elle est loin d'être complètement aléatoire. Si on regarde son état à un instant donné, on voit apparaître des tourbillons plus ou moins bien formés, qui semblent, de plus, avoir une certaine durée de vie. Ces structures, dites *cohérentes*², jouent un rôle prépondérant dans les mécanismes énergétiques de la turbulence.

La détection, la description et la compréhension de l'évolution de ces structures en proche paroi a été l'objet d'une intense recherche. De nombreux moyens expérimentaux ont été mis en œuvre dans ce but : certains permettent de visualiser directement ces structures, par injection de colorant [61, 68], de particules de taille visible [19, 42] ou de bulles d'hydrogène [61, 68] ; d'autres permettent d'extraire les structures cohérentes

² La définition rigoureuse de ce qu'est une structure cohérente est très difficile et est encore un sujet de débats. Nous nous contenterons ici de donner un sens intuitif à cette notion.

associées à certains événements (par exemple, les pics de production), en réalisant des moyennes conditionnelles [55, 61, 62, 63, 72]; d'autres encore utilisent l'ensemble des corrélations en deux points [95, 108]. Ces techniques ont été appliquées également à des champs turbulents calculés par simulation des grandes échelles [65, 108] ou par simulation directe [58, 67, 100].

De tous ces travaux, un consensus émerge sur la présence de structures cohérentes près de la paroi, et un accord relativement général sur leur description. En revanche, il existe à peu près autant d'interprétations des mécanismes qui régissent leur création et leur évolution que d'auteurs. Dans un premier temps, nous allons donc nous contenter d'une description des phénomènes. Ensuite, nous donnerons un aperçu des interprétations les plus « plausibles », qui seront, *ipso facto*, empreintes d'une certaine subjectivité.

Contrairement à ce qu'on a longtemps pensé, la sous-couche visqueuse n'est pas une région calme et « lisse ». Au contraire, elle abrite des structures turbulentes qui apparaissent de manière évidente, notamment dans les expériences de visualisation, les *stries*³ (*streaks*). Elles consistent en des zones de haute et basse vitesse longitudinale, qui alternent dans la direction z avec une périodicité moyenne en unité de paroi (adimensionalisées par ν/u_τ) de $z^+ \simeq 100$. Ces stries sont très allongées dans la direction de l'écoulement, avec une longueur x^+ de plusieurs centaines. Elles se forment très près de la paroi, de manière totalement aléatoire, à une distance $y^+ \leq 10$. Les stries à basse vitesse s'éloignent progressivement de la paroi jusqu'à atteindre une zone où elles se déstabilisent, éjectant du fluide à basse vitesse vers le haut. Cet événement est tout simplement appelé *éjection* (*ejection*). Aux stries à basse vitesse sont associés des *tourbillons en épingle* (*hairpin vortices*), dont les jambes sont des tourbillons contra-rotatifs disposés de part et d'autre des stries. Ces tourbillons sont d'une extension longitudinale bien moindre que celle des stries, et sont inclinés d'une trentaine de degrés par rapport à la paroi. Leur tête, qui relie les deux jambes, est pincée à la base et quasi-circulaire, prenant une forme en Ω (cf. figure 2.2).

Un autre événement, lié à l'éjection, est nommé *sweep* (balayage). Il s'agit de l'incursion dans la sous-couche visqueuse de grosses structures venues de la zone externe, qui viennent impacter la paroi avec une grande vitesse instantanée \tilde{u} . Il existe une très forte corrélation entre les *sweeps* et les éjections, et l'ensemble des événements décrits ci-dessus (*sweep*, formation des stries et des tourbillons en épingle, éjection) forment un enchaînement désigné par *explosion* (*burst*).

3. Toutes ces structures ont à l'origine des noms anglais. Nous emploierons en général l'équivalent français, mais ce ne sera pas toujours possible.

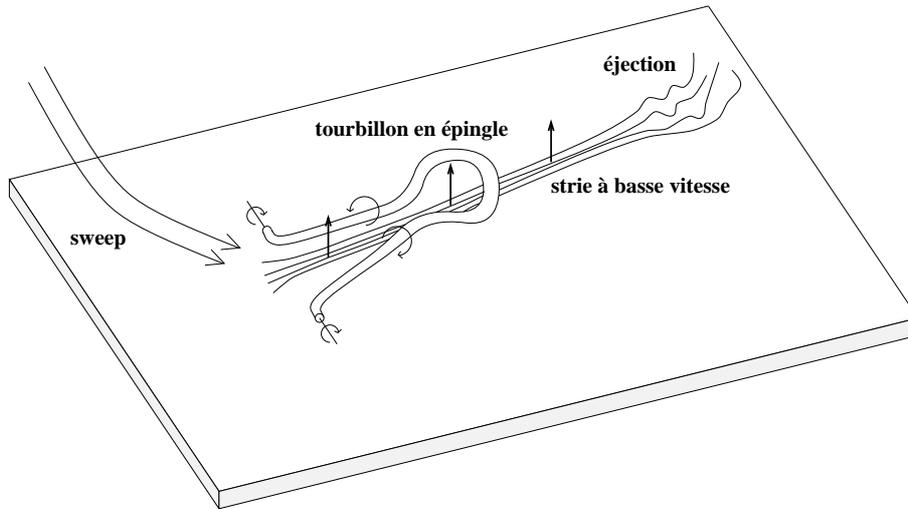


FIG. 2.2 – Vue schématique d'une explosion en proche paroi. Un seul tourbillon en épingle est représenté, mais en fait chaque strie à basse vitesse est associée à un paquet de tourbillons en épingle [152].

Il semble à peu près admis que ce sont les *sweeps* qui provoquent le déclenchement de tout le processus d'explosion. En revanche, l'origine de ces structures et les raisons de leurs incursions dans la zone de proche paroi ne sont pas clairement comprises. Il pourrait s'agir de gros tourbillons en épingle qui se forment loin de la paroi [65, 108] en raison du fort cisaillement et dont les têtes en Ω finissent par former des tourbillons en anneaux qui viennent impacter la paroi [42].

De plus, peu d'auteurs se risquent à expliquer la formation des stries. Parmi ceux qui proposent un mécanisme, il y a essentiellement deux visions concurrentes, et parfois le même auteur donne des interprétations différentes d'un article à l'autre.

Dans le premier mécanisme proposé [72, 108], les *sweeps* créent les tourbillons en épingle qui à leur tour créent les stries à basse vitesse. Les *sweeps*, en impactant violemment la paroi, induisent localement un champ de vitesse divergeant autour du point d'impact (*splating effect*). Ceci a pour effet de créer des gradients de vitesse longitudinale dans la direction transverse ($\partial\tilde{u}/\partial z$). L'effet de ces gradients est de transformer la vortacité transverse $\tilde{\omega}_z$ en vortacité longitudinale $\tilde{\omega}_x$. En effet, rappelons l'équation

de transport de la vorticité instantan e⁴ :

$$\frac{D\tilde{\omega}_i}{Dt} = \tilde{\omega}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.3)$$

où $D\tilde{\omega}_i/Dt$ désigne la dérivée particulaire de $\tilde{\omega}_i$. Dans cette équation, c'est le premier terme du membre de droite, dit terme de *torsion-étirement*, qui joue le rôle le plus important. Du fait de la condition d'adhérence à la paroi, il y a un fort gradient de vitesse moyenne $\partial U/\partial y$, et, par conséquent, une intense vorticité moyenne Ω_z . La vorticité instantanée $\tilde{\omega}_z$ fluctue donc autour d'une forte valeur moyenne, sans qu'il y ait véritablement de tourbillons cohérents (nappes de vorticité [108]). L'équation (2.3) montre que le terme $\tilde{\omega}_z \partial \tilde{u}/\partial z$ produit de la vorticité $\tilde{\omega}_x$ (effet de torsion). Il y a alors formation d'un tourbillon cohérent en épingle, qui induit un champ de vitesse qui a tendance à amener du fluide à basse vitesse entre ses deux jambes, puis à l'éloigner de la paroi, formant ainsi une strie à basse vitesse. Le tourbillon en épingle, lui, a tendance à s'incliner par rapport à la paroi, sous l'action de l'étirement dû au cisaillement moyen, les axes propres du tenseur de déformation moyenne S_{ij} formant un angle de 45  par rapport aux axes principaux.

Le second mécanisme proposé [42, 62, 63, 68] est l'inverse du premier. L'impact du *sweep* produit directement les stries à basse vitesse, soit en imposant un gradient de pression adverse qui ralentit le fluide [42, 62], soit par un processus plus subtil d'étirement des tourbillons [68], qui nous ramène à l'équation (2.3). Dans cette dernière, c'est cette fois-ci les gradients $\partial \tilde{w}/\partial z$ qui sont invoqués. Ils agissent sur la vorticité $\tilde{\omega}_z$ à travers le terme $\tilde{\omega}_z \partial \tilde{w}/\partial z$ en l'étirant dans la région d'impact des *sweeps* et en la compressant dans les régions de remontée du fluide (entre deux régions d'impact, il y a nécessairement une région de remontée, par continuité). L'étirement a pour effet de diminuer le diamètre des tourbillons et de les intensifier. Ceci est à l'origine, au sommet du tourbillon, d'une zone de vitesse instantanée \tilde{u} plus forte que l'écoulement ambiant, créant ainsi une strie à haute vitesse. Inversement, dans les zones de compression, des stries à basse vitesse apparaissent. L'alternance suivant l'axe z de stries à haute vitesse et   basse vitesse fait apparaître des gradients $\partial \tilde{u}/\partial z$, qui transforment la vorticité $\tilde{\omega}_z$ en tourbillons en épingle, suivant le processus invoqué plus haut.

On voit donc que, dans le premier cas, les *sweeps* créent des tourbillons en épingle qui à leur tour créent les stries, alors que dans le second cas, ils créent des stries qui elles-mêmes créent les tourbillons en épingle. En fait, il y a assez peu de preuves expérimentales de l'un ou l'autre mécanisme, et les séquences d'événements proposées

4. La convention d'Einstein (sommation sur les indices répétés) s'applique dans cet ouvrage, sauf lorsque les indices sont notés par des lettres grecques.

semblent quelque peu arbitraires. Il paraît donc difficile d'établir un rapport de cause à effet entre les tourbillons en épingle et les stries. Probablement, les uns et les autres sont créés simultanément et s'intensifient mutuellement par les mécanismes décrits plus haut.

Les deux jambes contra-rotatives des tourbillons en épingle ont donc tendance à éjecter des poches de fluide à basse vitesse vers le haut. Ces poches arrivent alors dans la couche de cisaillement intense entre la strie et le fluide plus rapide au-dessus d'elle, accéléré par le *sweep* [19]. Elles semblent alors soumises à une instabilité due à des profils inflexionnels instantanés [61], qui crée des oscillations et des tourbillons qui dégénèrent très rapidement en un état chaotique, produisant ainsi de la turbulence. La figure 2.2 résume l'enchaînement des événements qui constituent l'explosion.

2.1.3 Lien entre structures instantanées et champ moyen

Introduisons la décomposition classique de Reynolds des grandeurs instantanées en parties moyennes et fluctuantes :

$$\tilde{\varphi} = \Phi + \varphi \quad (2.4)$$

où $\tilde{\varphi}$ est une grandeur instantanée quelconque et $\Phi = \overline{\tilde{\varphi}}$ désigne sa moyenne d'ensemble⁵. Le mouvement instantané du fluide est régi par les équations de Navier–Stokes⁶ :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.5)$$

et, pour un fluide incompressible, par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.6)$$

En introduisant la décomposition (2.4), on obtient les équations de Navier–Stokes moyennées⁷ :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

$R_{ij} = \overline{u_i u_j}$ est appelé *tenseur de Reynolds*. L'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.8)$$

5. Le fait d'utiliser une moyenne d'ensemble montre qu'on ne traite plus, à partir de maintenant, la turbulence comme un phénomène chaotique (donc déterministe), mais comme un phénomène aléatoire.

6. On se place délibérément dans le cas le plus simple, sans forces volumiques ni rotation d'ensemble.

7. On note \mathcal{P} la pression moyenne car on réserve P pour la production d'énergie turbulente.

Les équations de transport des tensions de Reynolds sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \underbrace{U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}_{\mathcal{C}_{ij}} = & \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}}_{D_{ij}^\nu} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}}_{D_{ij}^T} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\phi_{ij}^*} \\ & - \underbrace{\frac{u_i u_k}{\partial x_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{u_j u_k}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{P_{ij}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

où \mathcal{C}_{ij} , D_{ij}^ν , D_{ij}^T , ϕ_{ij}^* , P_{ij} et ε_{ij} sont appelés respectivement terme de *convection*, de *diffusion moléculaire*, de *diffusion turbulente*, de *corrélation vitesse–gradient de pression* (ou plus simplement de *pression*), de *production* et de *dissipation*.

Il n'est pas évident *a priori* de faire le lien entre les différents termes de l'équation (2.9) et les structures instantanées décrites plus haut. Dans un écoulement en canal, le terme le plus important est le terme de production P_{11} , qui « alimente » la composante $\overline{u^2}$, et qui est ensuite redistribué sur les autres composantes diagonales par le terme de pression. C'est le seul terme qui produit de l'énergie turbulente $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$, puisque $P = \frac{1}{2} P_{ii}$, qui est son taux de production, vaut en canal $\frac{1}{2} P_{11}$. Il est possible, par une technique de moyennes conditionnelles, d'associer la production turbulente aux explosions qui ont lieu dans la zone de proche paroi [61, 100]. Cette technique consiste à calculer une moyenne d'ensemble sur les réalisations de l'écoulement associées à des événements particuliers. Cette méthode reste assez subjective dans la mesure où le résultat dépend du critère choisi pour délimiter la période d'explosion. Cependant, quel que soit ce critère, une constatation s'impose : l'essentiel de la production de turbulence a lieu pendant les explosions. Kim *et al.* [61], sans donner de critère clair sur la détection des périodes d'explosion, signalent que la totalité de la production a lieu durant ces périodes dans la zone de proche paroi ($y^+ \leq 100$). Alors que les explosions, telles qu'ils les délimitent, ne couvrent que 50 % du temps, elles sont à l'origine de presque 100 % de la production (il y a une incertitude de 25 % sur les résultats). Les auteurs envisagent même que ce chiffre puisse dépasser 100 %, la période inter-explosions pouvant être une période de production négative. Corino & Brodkey [19] ne s'intéressent qu'aux éjections : telles qu'ils les définissent, elles ne couvrent que 18 % du temps, mais rendent compte de 50 % de la production. Lyons *et al.* [100] arrivent à des conclusions similaires à partir de données de simulation directe.

Le mécanisme de production est assez simple : ce sont les *sweeps* et les éjections qui en sont responsables. Lors d'un *sweep*, du fluide venant de l'extérieur vient impacter la paroi ($v < 0$). Comme le gradient de vitesse moyenne est positif, le fluide se trouve

alors dans une zone où la vitesse « ambiante » est plus faible que la sienne. Il provoque alors localement une vitesse fluctuante $u > 0$. Il crée donc de l'énergie turbulente sur la composante $\overline{u^2}$ du tenseur de Reynolds. Cette production est traduite dans (2.9) par le terme P_{ij} : le *sweep* correspond à un \overline{uv} négatif, qui, combiné au gradient de vitesse positif, produit de la turbulence. Il en est de même pour le phénomène d'éjection ($v > 0$) de fluide à basse vitesse ($u < 0$).

De plus, les éjections sont responsables d'une forte diffusion turbulente D_{ij}^T . En effet, si elles produisent essentiellement de l'énergie turbulente aux alentours de $y^+ = 11$ (maximum de production), le fluide éjecté continue sur son élan à s'éloigner de la paroi, contribuant ainsi à la diffusion. La déstabilisation, décrite précédemment, du fluide éjecté par les gradients de vitesse instantanée, provoque des mouvements chaotiques dont les plus violents peuvent même venir impacter la paroi [19], contribuant ainsi également à la diffusion turbulente en direction de cette dernière.

Corino & Brodkey [19] définissent ainsi trois zones différentes dans l'écoulement : la première ($0 \leq y^+ \leq 5$), est une zone passive, mais absolument pas laminaire, car on y trouve des mouvements désordonnés dus à l'influence de la zone au-dessus d'elle ; la deuxième ($5 \leq y^+ \leq 70$), est la zone active, siège des éjections de poches fluides et de leur éclatement dû aux profils de vitesse instantanée ; la troisième ($70 \leq y^+$), contient de nombreux tourbillons originaires de la zone active, dont la taille croît au fur et à mesure qu'ils s'éloignent de la paroi.

On voit donc que les événements qui ont lieu près de la paroi et les structures cohérentes qui leur sont associées jouent un rôle déterminant : ils produisent la turbulence et influencent une grande partie de l'écoulement. Forts de cette constatation, nous allons désormais nous intéresser plus spécifiquement aux effets induits par la paroi sur les champs moyens, qu'il est nécessaire de prendre en compte pour modéliser les équations de transport du tenseur de Reynolds (2.9).

2.2 Effets induits par la paroi à prendre en compte dans les modèles

Dans la cadre de la modélisation aux moyennes de Reynolds, basée sur la décomposition (2.4), il est nécessaire de prendre en compte la manière dont la présence d'une paroi dans l'écoulement affecte celui-ci, non plus au niveau des champs instantanés, mais au niveau des moyennes d'ensemble. Nous avons vu, à la section précédente, comment les explosions affectent la production et le transport turbulent. Le but de cette section est

de recenser les effets les plus importants induits par la paroi sur les grandeurs moyennes. Nous allons classer ceux-ci parmi deux catégories, qui n'ont rien d'arbitraire, dans la mesure où elles correspondent à des phénomènes physiques de nature différente : les effets dynamiques et les effets cinématiques.

2.2.1 Effets dynamiques

Cisaillement moyen. Les effets dynamiques qui se manifestent en présence d'une paroi sont ceux qui sont dus à la viscosité moléculaire du fluide. Le premier, qui est le plus évident, est l'apparition d'un fort gradient de vitesse moyenne U . Il est dû à la condition d'adhérence à la paroi. Nous avons vu au § 2.1.3 que c'est l'existence de ce gradient de vitesse moyenne qui permet aux structures instantanées de l'écoulement de produire de l'énergie turbulente. Cette production étant intense dans la région autour de $y^+ = 11$, elle est à l'origine d'une forte inhomogénéité de la turbulence dans la direction normale à la paroi, qui fait apparaître des phénomènes de transport. La production de turbulence est évidemment l'effet le plus important à prendre en compte dans les modèles, mais cette tâche est loin d'être la plus difficile. Notamment, dans les modèles au second ordre, dans lesquels on résout les équations de transport du tenseur de Reynolds (2.9), le terme de production P_{ij} ne fait pas intervenir de termes d'ordre supérieur (corrélations triples), et ne nécessite donc aucune modélisation.

Amortissement visqueux de la turbulence. Cependant, d'autres effets très importants se manifestent, qui peuvent être plus aisément appréhendés en l'absence de cisaillement moyen. C'est pourquoi il est utile de s'intéresser à un écoulement particulier, dans lequel la paroi se déplace à la même vitesse que l'écoulement. La condition d'adhérence est alors respectée sans que le profil de vitesse moyenne ne soit perturbé : le gradient $\partial U/\partial y$ est nul et il n'y a plus de production de turbulence. Cet écoulement a fait l'objet de diverses études expérimentales [4, 151, 155], d'une simulation directe [124], ainsi que d'une description théorique [51, 52]. De la même manière que pour la vitesse moyenne, la viscosité moléculaire impose l'annulation des vitesses fluctuantes dans le plan tangent à la paroi, en dissipant l'énergie cinétique en chaleur. Il en résulte une chute de turbulence à l'approche de la paroi et donc l'apparition d'une inhomogénéité, qui génère des phénomènes de transport turbulent. Lorsque l'écoulement arrive sur le bord d'attaque d'une plaque mouvante (tapis roulant [4, 151, 155]) située dans l'écoulement, ou lorsqu'on introduit la paroi à un instant $t = 0$, numériquement [124] ou par la pensée [51, 52], l'effet de la viscosité ne se fait sentir que progressivement. Une couche limite visqueuse se développe, dont l'épaisseur δ^ν , définie

par la hauteur à laquelle $u' = \overline{u^2}^{1/2}$ atteint 99 % de sa valeur à l'infini, peut être estimée [52] par $\delta^\nu = 4.0(x\nu/U_\infty)^{1/2}$, $x = 0$ correspondant au bord d'attaque de la plaque. L'effet de la viscosité se fait donc sentir progressivement, dans des zones de plus en plus éloignées de la paroi.

Effet bas-Reynolds. Un troisième effet dynamique est provoqué indirectement par la diminution de la turbulence : l'effet bas-Reynolds. En effet, lorsque le nombre de Reynolds turbulent $Re_T = k^2/\nu\varepsilon$ est suffisamment élevé, la turbulence atteint un état limite, dans lequel les gros tourbillons les plus énergétiques et les petits tourbillons, sièges de la dissipation, correspondent à des échelles séparées de plusieurs ordres de grandeur. Cette séparation d'échelle permet de considérer que les grosses structures ne sont pas influencées par la viscosité moléculaire et que les structures dissipatives sont isotropes [71]. Lorsque le nombre de Reynolds turbulent décroît en dessous d'une certaine valeur, typiquement $Re_T \leq 100$, les échelles des tourbillons énergétiques et dissipatifs commencent à se recouvrir mutuellement. La viscosité commence à se faire sentir sur les gros tourbillons et la diffusion moléculaire D_{ij}^ν devient significative dans (2.9). De plus, la séparation d'échelle est insuffisante pour que l'anisotropie des grosses structures n'ait pas une influence à toutes les échelles du spectre : les structures dissipatives perdent alors leur caractère isotrope.

2.2.2 Effets cinématiques

Écho de paroi. Le premier des effets cinématiques, souvent considéré à tort comme le plus important, est l'effet dit d'*écho de paroi*. Ce concept a pour origine l'expression intégrale de la pression dans le cas d'un écoulement dans un domaine Ω borné par une plaque plane infinie située en $y = 0$. La pression fluctuante vérifie une équation de Poisson, obtenue en prenant la divergence des équations de Navier–Stokes :

$$\nabla^2 p = -2\rho \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (2.10)$$

À la paroi, $\partial p/\partial y = \nu \partial^2 v/\partial y^2$, mais on peut, en première approximation, appliquer la condition aux limites $\partial p/\partial y = 0$ (cela revient à négliger la pression de Stokes [64]). Dans cette géométrie, la solution de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \nabla^2 p(\mathbf{x}') \underbrace{\left(-\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} - \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|} \right)}_{G_{\Omega}} dV(\mathbf{x}') \quad (2.11)$$

où \mathbf{x} et \mathbf{x}' sont des vecteurs positions et dV l'élément de volume. \mathbf{x}'^* représente l'image de \mathbf{x}' par symétrie par rapport à la paroi. On voit tout d'abord que la pression dépend des fluctuations de vitesse sur l'ensemble du domaine : elle est dite *non-locale*. De plus, on voit apparaître dans la fonction de Green G_Ω l'image du point \mathbf{x}' . On peut réécrire l'équation (2.11) sous la forme :

$$p(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 p(\mathbf{x}') \frac{dV(\mathbf{x}')}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \quad (2.12)$$

en étendant la fonction p par symétrie à l'espace \mathbb{R}^3 entier : $p(\mathbf{x}'^*) = p(\mathbf{x}')$. On voit donc que tout se passe comme si la pression était influencée par la turbulence dans le domaine et par son image par symétrie par rapport à la paroi. Ceci est dû à la condition aux limites $\partial p / \partial y = 0$, qui est une condition de réflexion totale. On appelle donc cet effet l'*écho de paroi*, par analogie avec l'acoustique. Comme le fluide est incompressible, l'écho est instantané. Il en résulte, comme le montre l'équation (2.11), une *amplification* de la pression en un point donné. Lorsque \mathbf{x} est à la paroi, le terme principal et le terme image sont égaux, et la pression est donc double de ce qu'elle serait sans cet effet.

On décompose généralement le terme de corrélation vitesse–gradient de pression ϕ_{ij}^* qui apparaît dans les équations de transport des tensions de Reynolds en termes de corrélation pression–déformation $\phi_{ij} = \rho^{-1} \overline{p (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)}$ et de diffusion par la pression $D_{ij}^p = -\rho^{-1} \partial / \partial x_k (\overline{u_i p} \delta_{jk} + \overline{u_j p} \delta_{ik})$. ϕ_{ij} hérite alors directement des propriétés de la pression : il est non-local et sujet à l'écho de paroi. En effet, son expression intégrale se déduit de (2.11) :

$$\rho \phi_{ij}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \nabla^2 p(\mathbf{x}') \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) \left(\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} + \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|} \right) dV(\mathbf{x}') \quad (2.13)$$

Ce terme a pour effet de redistribuer l'énergie cinétique entre les tensions de Reynolds. Généralement, il redistribue l'énergie de la composante « riche », $\overline{u^2}$, vers les composantes « pauvres », $\overline{v^2}$ et $\overline{w^2}$, ayant donc tendance à rétablir l'isotropie de la turbulence. Or, en présence d'une paroi, on constate expérimentalement que l'effet de retour à l'isotropie est atténué. Dans un article très célèbre, Launder *et al.* [81] ont affirmé que la forme intégrale (2.13) montre que l'effet d'écho de paroi est à l'origine de cette réduction. Cet argument est devenu très populaire dans la communauté de la modélisation de la turbulence, et a servi de base à toute une classe de modèles, utilisant des termes correctifs dits *termes d'écho de paroi*.

Cependant, cet argument est incorrect : dans l'équation (2.13), le terme image est du même signe que le terme principal. Son effet, en chaque point \mathbf{x}' , est donc un effet d'amplification. L'effet global, après intégration sur tout le domaine, pourrait à

la rigueur être de signe opposé si les zones où l'intégrande de ϕ_{ij} est localement de signe opposé à ϕ_{ij} étaient amplifiées considérablement par le terme image, ce qui n'est pas le cas. Une étude détaillée de ce problème peut être trouvée en annexe C : la base de données de simulation directe de Moser *et al.* [110] d'un canal à $Re_\tau = 590$ a été analysée. La question de l'effet d'écho de paroi⁸ a été étudiée à la section § 4.1 de l'article. On voit sur les figures 1(a,b) que l'écho de paroi ne peut résulter qu'en une amplification de la redistribution, contrairement à ce qui est affirmé le plus souvent. L'effet d'atténuation du retour à l'isotropie, qui masque cette amplification, ne peut donc être dû qu'à d'autres phénomènes physiques.

Effet de blocage. L'imperméabilité de la paroi impose la condition aux limites $v = 0$. Les fluctuations normales à la paroi sont donc bloquées par celle-ci. Ce blocage impose donc un amortissement de v' (valeur *rms*). Mais cet amortissement est augmenté par l'incompressibilité de l'écoulement : en effet, les conditions aux limites $u = w = 0$, dues à la viscosité, imposent indirectement, par le biais de l'équation de continuité, la condition $\partial v / \partial y = 0$. Cette condition est donc avant tout cinématique, car elle découle de la continuité, mais elle est indirectement liée à la viscosité moléculaire. L'effet conjugué des conditions $v = 0$ et $\partial v / \partial y = 0$ fait que v' subit un amortissement bien plus fort que celui de u' et de w' . Il en résulte que la turbulence atteint, près de la paroi, un état limite à deux composantes.

L'effet de ce blocage est quasi-immédiat, contrairement à l'effet d'amortissement visqueux. Dans le cas de l'écoulement, cité plus haut, le long d'une plaque plane en mouvement à la vitesse U_∞ , le blocage se fait sentir très rapidement à partir de l'instant où l'écoulement atteint le bord d'attaque de la plaque [52]. Ceci est dû à la non-localité de la pression, qui peut donc « sentir » la présence de la paroi immédiatement, même si celle-ci est éloignée. Il en résulte un amortissement de v' , jusqu'à une distance de la paroi de l'ordre de la taille des plus grosses structures. L'énergie est redistribuée vers les composantes u' et w' , provoquant l'augmentation de ces dernières. Ce n'est qu'ensuite que l'effet visqueux entre en jeu pour amortir à leur tour ces composantes [4, 124].

L'effet d'atténuation de la redistribution est donc bien un effet de la pression, mais n'a rien à voir avec l'écho de paroi. Une fluctuation de vitesse en direction de la paroi crée une augmentation de pression qui la bloque et force l'énergie cinétique à se détourner sur les autres composantes. C'est le même effet qui crée les tourbillons en fer à cheval en amont d'obstacles placés dans l'écoulement. La pression s'adapte de manière

8. Dans l'article en annexe C, c'est ϕ_{ij}^* et non ϕ_{ij} qui est étudié, pour des raisons qui apparaîtront clairement au § 4. Cependant, les conclusions sont valables également pour ϕ_{ij} .

à imposer à tout instant la contrainte de continuité⁹. Cet effet s'oppose au retour à l'isotropie, et crée donc un amortissement du terme ϕ_{ij}^* .

La difficulté réside ici dans le fait que le blocage est une conséquence de l'incompressibilité, qui n'est prise en compte dans les modèles qu'au niveau moyen. La résolution explicite de cette contrainte et le calcul du champ de pression qui lui correspond permet de reproduire l'effet de blocage sur la composante moyenne normale à la paroi V . En revanche, l'incompressibilité au niveau fluctuant n'est pas imposée, et la pression fluctuante n'est pas résolue. Il en résulte que l'effet de blocage de la composante fluctuante v , et par conséquent des tensions de Reynolds $\overline{v^2}$, \overline{uv} et \overline{vw} , n'est pas reproduit explicitement. Il faudra donc déployer une certaine ingéniosité pour prendre en compte cet effet dans les modèles de turbulence.

2.2.3 Conséquences pour la modélisation

Les effets dynamiques et cinématiques sont de nature profondément différente. Ils peuvent d'ailleurs se manifester indépendamment les uns des autres. Par exemple, près d'une interface entre deux fluides de densités différentes, les effets cinématiques seront seuls à jouer un rôle. Au contraire, dans un écoulement libre, si on baisse le nombre de Reynolds, seuls des effets dynamiques apparaîtront.

De plus, en écoulement de proche paroi, ces effets ont une influence sur des échelles de longueur très différentes. Les effets dynamiques se manifestent dans une région très proche de la paroi, d'une taille proportionnelle à la sous-couche visqueuse, tandis que les effets cinématiques se font sentir jusque dans la zone logarithmique [46].

Il convient donc de distinguer deux notions qui sont souvent confondues : la notion d'écoulement bas-Reynolds, et celle d'écoulement de proche paroi, qui allie les effets bas-Reynolds aux effets cinématiques induits par la géométrie. Cette distinction a des conséquences très importantes pour la modélisation : on doit prendre en compte séparément ces effets [46]. L'approche bas-Reynolds classique, présentée au § 1.3.2, qui cherche à reproduire l'impact de la paroi sur l'écoulement grâce à des fonctions d'amortissement dépendant uniquement de Re_T est insuffisante. Il est nécessaire d'introduire également une information sur la présence de la paroi. Ce peut être une dépendance directe en y , méthode qui est malheureusement inapplicable en géométrie complexe ; en un paramètre de structure, comme le paramètre d'aplatissement A de Lumley [98] (*flatness parameter*) ; ou, idéalement, par l'intermédiaire d'une équation différentielle, comme l'équation de relaxation elliptique.

9. En incompressible, la pression joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange.

2.3 Comportements asymptotiques des termes de l'équation de transport du tenseur de Reynolds

2.3.1 Introduction des développements de Taylor

Il est utile, dans l'optique de modéliser les différents termes de l'équation de transport des tensions de Reynolds, d'étudier le comportement asymptotique de chacun de ces termes au voisinage de la paroi. Nous allons donc nous placer dans le cadre simple d'un écoulement en canal, pour lequel les vitesses moyennes V et W sont nulles, et les autres quantités moyennes sont des fonctions de y uniquement, mise à part la pression moyenne \mathcal{P} , qui varie linéairement avec x . On peut alors introduire les développements de Taylor suivants :

$$\begin{cases} U = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 y + \mathcal{A}_2 y^2 + O(y^3) \\ u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + O(y^3) \\ v = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + O(y^3) \\ w = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + O(y^3) \\ p = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + O(y^3) \end{cases} \quad (2.14)$$

Les coefficients \mathcal{A}_i sont constants. En revanche, les coefficients a_i , b_i , c_i et p_i sont des variables aléatoires, qui dépendent en outre des coordonnées d'espace x et z . Les conditions aux limites à la paroi étant $U = u = v = w = 0$, on a $\mathcal{A}_0 = a_0 = b_0 = c_0 = 0$. De plus, l'équation de continuité donne, pour les vitesses fluctuantes :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.15)$$

ce qui se traduit, à la paroi, par $\partial v / \partial y = b_1 = 0$. Les développements (2.14) se réduisent donc à :

$$\begin{cases} U = \mathcal{A}_1 y + \mathcal{A}_2 y^2 + O(y^3) \\ u = a_1 y + a_2 y^2 + O(y^3) \\ v = b_2 y^2 + O(y^3) \\ w = c_1 y + c_2 y^2 + O(y^3) \\ p = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + O(y^3) \end{cases} \quad (2.16)$$

Notons qu'il existe une infinité de relations entre les différents coefficients. Les plus simples découlent des équations de Navier–Stokes, qui donnent à la paroi :

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \quad (2.17)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide. On a donc

$$\begin{cases} \frac{\partial p_0}{\partial x} = 2\mu a_2 \\ p_1 = 2\mu b_2 \\ \frac{\partial p_0}{\partial z} = 2\mu c_2 \end{cases} \quad (2.18)$$

Ces relations seront très utiles plus loin.

D'autres relations peuvent être facilement déduites des équations du mouvement. Par exemple, l'équation de continuité en donne une infinité. En effet, pour tout i , on a :

$$\frac{\partial a_i}{\partial x} + (i+1) b_{i+1} + \frac{\partial c_i}{\partial z} = 0 \quad (2.19)$$

D'autres relations très importantes proviennent des propriétés de symétrie de l'écoulement. En effet, les tensions de Reynolds \overline{uw} et \overline{vw} sont nulles, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} \overline{uw} = \overline{a_1 c_1} y^2 + (\overline{a_1 c_2} + \overline{a_2 c_1}) y^3 + O(y^4) = 0 \\ \overline{vw} = \overline{b_2 c_1} y^3 + O(y^4) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

et donc $\overline{a_1 c_1} = 0$, $\overline{b_2 c_1} = 0$, $\overline{a_1 c_2} + \overline{a_2 c_1} = 0$, etc.

L'analyse mathématique ne donne ici que des résultats asymptotiques et aucune précision sur les coefficients. On voit par exemple qu'en première approximation, la vitesse moyenne varie linéairement avec la distance à la paroi. Seules les expériences ou les simulations directes peuvent préciser l'épaisseur de la région sur laquelle cette approximation est valable. C'est cette région que l'on appelle la *sous-couche visqueuse* (cf. § 2.4).

La figure 2.3 montre l'évolution de U^+ en fonction de y^+ , donnée par la simulation directe de Moser *et al.* [110] d'un canal à $Re_\tau = 590$ ($Re_\tau = hu_\tau/\nu$). Les exposants « + » indiquent que les quantités sont adimensionnées par la viscosité ν et par la vitesse de frottement u_τ définie par :

$$u_\tau^2 = \nu \left. \frac{dU}{dy} \right|_0 \quad (2.21)$$

Par définition de u_τ , on a donc $dU^+/dy^+ = 1$ à la paroi. Ceci montre que le premier coefficient non nul du développement de Taylor de U est $\mathcal{A}_1 = u_\tau^2/\nu$. La figure 2.3 montre que l'approximation linéaire de U est valable environ jusqu'à $y^+ = 5$. C'est ce qui définit l'épaisseur de la sous-couche visqueuse.

Les coefficients des termes dominants, a_1 , b_2 , c_1 et p_0 étant des fonctions aléatoires, on ne peut s'intéresser qu'à leurs valeurs *rms*, qui sont liées aux valeurs *rms* de u , v , w

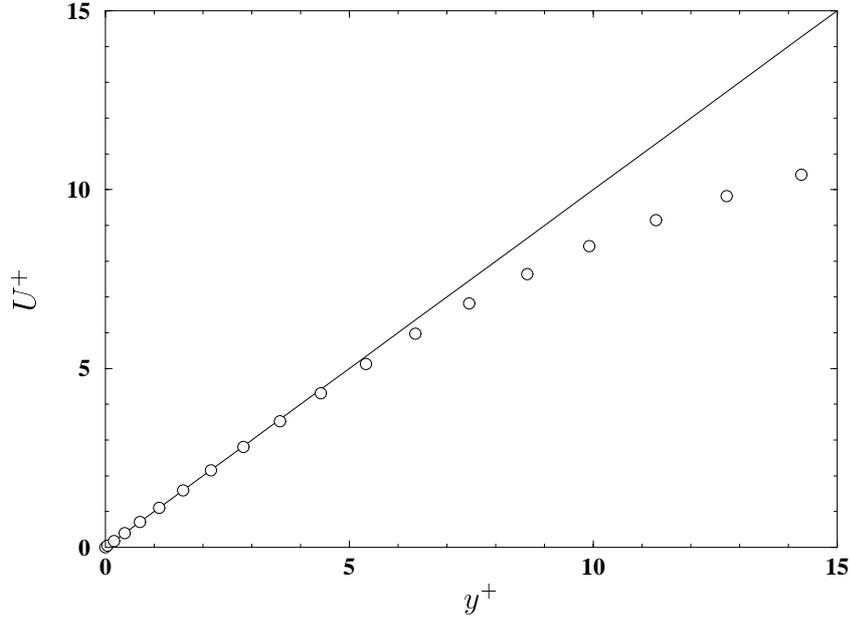


FIG. 2.3 – Profil de U dans la sous-couche visqueuse. DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. \circ U donné par la DNS ; — Profil linéaire $U^+ = y^+$.

et p , respectivement. En effet, on a :

$$\begin{cases} u' = a'_1 y + O(y^{3/2}) \\ v' = b'_2 y^2 + O(y^{5/2}) \\ w' = c'_1 y + O(y^{3/2}) \\ p' = p'_0 + O(y^{1/2}) \end{cases} \quad (2.22)$$

Les profils de ces grandeurs estimées à partir de la même DNS sont tracés sur la figure 2.4, en axes logarithmiques. L'approximation de u' à l'ordre 1 est valable jusqu'à $y^+ \simeq 5$, comme pour U . Il en est de même pour p' . En revanche, les termes dominants de v' et w' ne sont de bonnes approximations que jusqu'à $y^+ \simeq 2$. Les valeurs *rms* des coefficients peuvent être estimées par régression linéaire. On obtient : $a'^+_1 \simeq 0,40$; $b'^+_2 \simeq 0,011$; $c'^+_1 \simeq 0,26$; $p'^+_0 \simeq 5,18$.

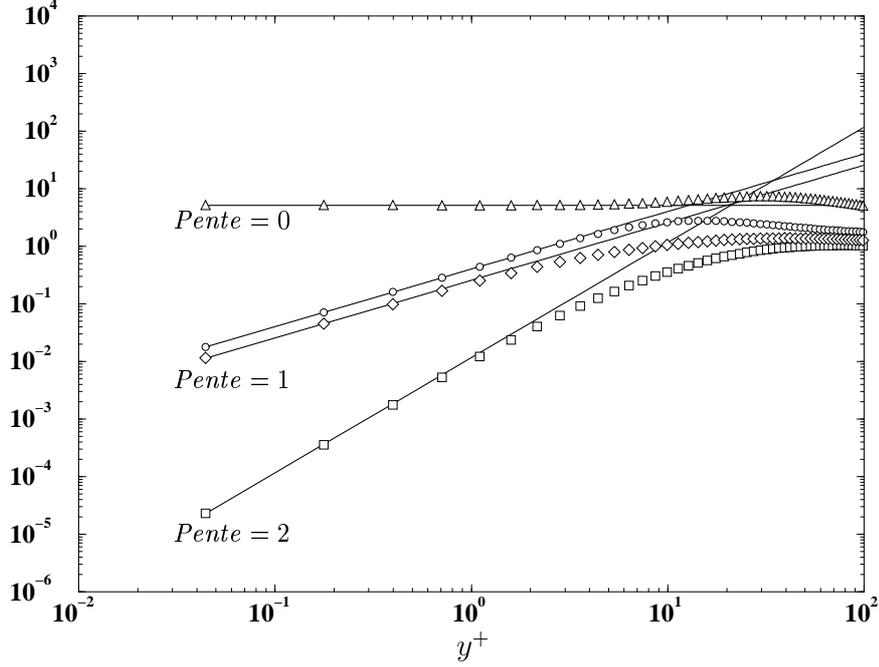


FIG. 2.4 – Profils de u' , v' , w' et p' (valeurs rms) donnés par la DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. \circ u' ; \square v' ; \diamond w' ; \triangle p' ; — approximations au premier ordre.

2.3.2 Tensions de Reynolds

Des équations (2.16) on peut déduire facilement les comportements asymptotiques des tensions de Reynolds :

$$\begin{cases} \overline{u^2} = \overline{a_1^2} y^2 + 2\overline{a_1 a_2} y^3 + O(y^4) \\ \overline{v^2} = \overline{b_2^2} y^4 + 2\overline{b_2 b_3} y^5 + O(y^6) \\ \overline{w^2} = \overline{c_1^2} y^2 + 2\overline{c_1 c_2} y^3 + O(y^4) \\ \overline{uv} = \overline{a_1 b_2} y^3 + (\overline{a_2 b_2} + \overline{a_1 b_3}) y^4 + O(y^4) \end{cases} \quad (2.23)$$

On voit que, du fait de l'amortissement plus fort de v , les composantes du tenseur de Reynolds qui contiennent v décroissent plus vite que les autres au voisinage de la paroi. En particulier, $\overline{v^2}$ se comporte à l'ordre dominant comme y^4 , induisant une très forte anisotropie. A la limite $y \rightarrow 0$, la turbulence atteint donc un état à deux composantes. Cette propriété est très importante à reproduire dans les simulations numériques, et elle constitue un point d'achoppement pour beaucoup de modèles. On peut définir la proportion d'énergie cinétique turbulente portée par la composante diagonale $\overline{u_\alpha^2}$ par le rapport $\overline{u_\alpha^2}/2k$. Le développement asymptotique de k étant :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \frac{1}{2} (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) y^2 + (\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y^3 + O(y^4) \quad (2.24)$$

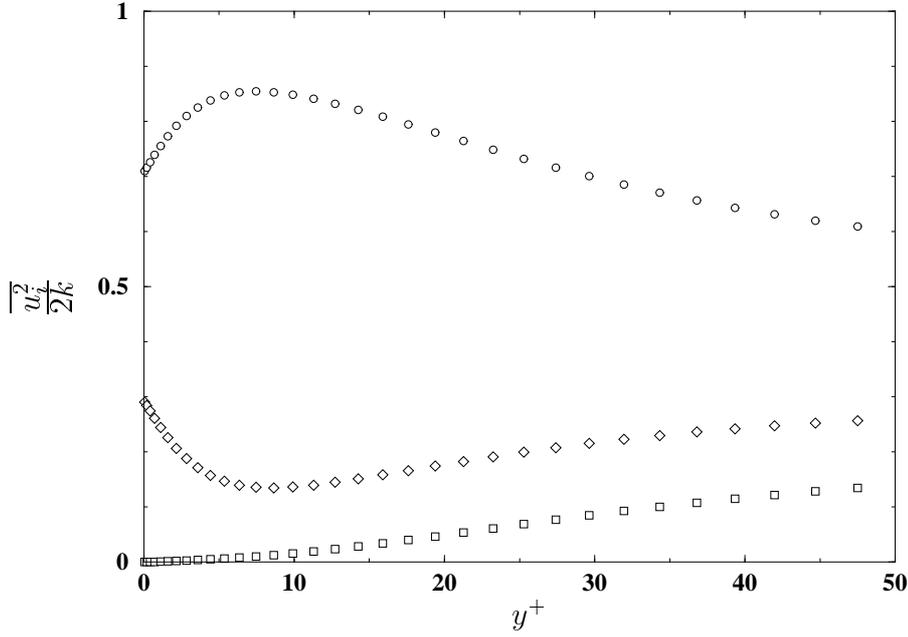


FIG. 2.5 – Répartition de l'énergie cinétique turbulente. DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. $\circ \overline{u^2}/2k$; $\square \overline{v^2}/2k$; $\diamond \overline{w^2}/2k$.

on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{u^2}}{2k} = \frac{\overline{a_1^2}}{\overline{a_1^2 + c_1^2}} + O(y) \\ \frac{\overline{v^2}}{2k} = \frac{\overline{b_2^2}}{\overline{a_1^2 + c_1^2}} y^2 + O(y^3) \\ \frac{\overline{w^2}}{2k} = \frac{\overline{c_1^2}}{\overline{a_1^2 + c_1^2}} + O(y) \end{array} \right. \quad (2.25)$$

On voit donc qu'au voisinage de la paroi, $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$ sont porteurs d'une partie finie de l'énergie turbulente, tandis que celle portée par $\overline{v^2}$ tend vers zéro. Ce comportement est illustré par la figure 2.5.

2.3.3 Bilans asymptotiques des tensions de Reynolds

Les équations de transport des tensions de Reynolds se réduisent en canal à :

$$\underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{u^2}}{\partial y^2}}_{D_{11}^\nu} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u^2 v}}{\partial y}}_{D_{11}^T} - \underbrace{\frac{2}{\rho} \overline{u} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\phi_{11}^*} - \underbrace{2 \overline{u v}}_{P_{11}} \frac{\partial U}{\partial y} - \underbrace{2 \nu \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{11}} = 0 \quad (2.26)$$

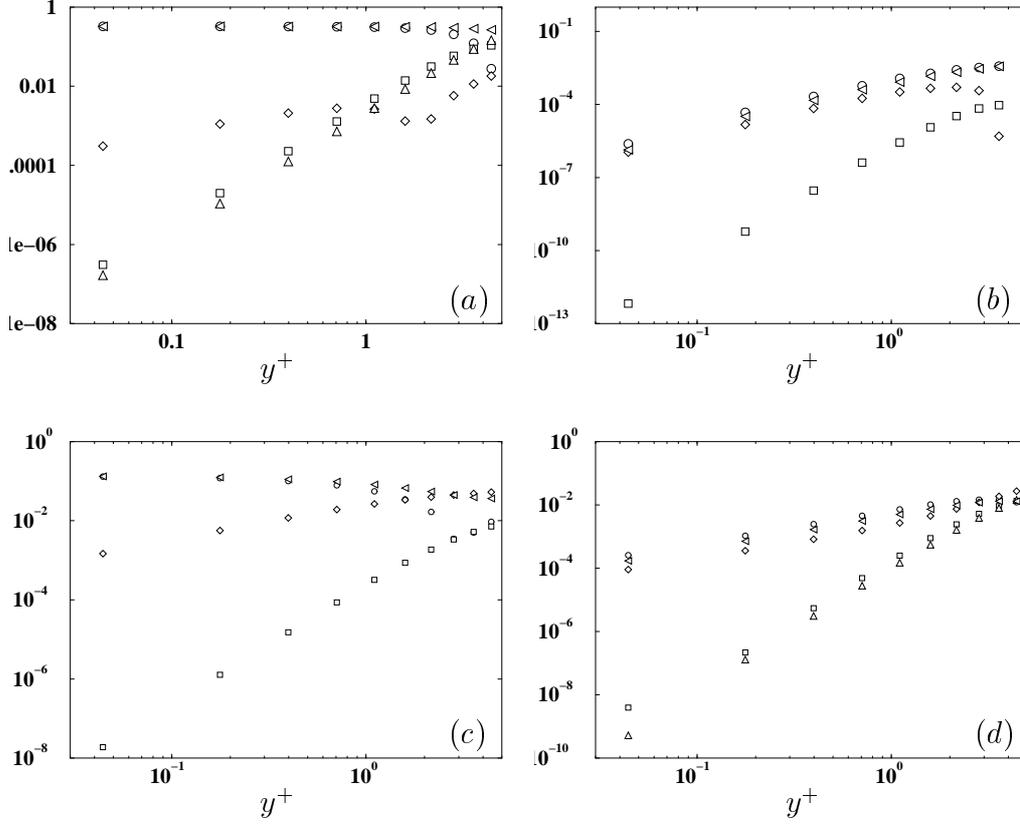


FIG. 2.6 – Comportements asymptotiques des termes du bilan des tensions de Reynolds (en valeur absolue) : (a) $\overline{u^2}$; (b) $\overline{v^2}$; (c) $\overline{w^2}$; (d) \overline{uv} . DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. $\circ D_{ij}^\nu$; $\square D_{ij}^T$; $\diamond \phi_{ij}^*$; $\triangle P_{ij}$; $\triangleleft \varepsilon_{ij}$.

$$\underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial y^2}}_{D_{22}^\nu} - \underbrace{\frac{\partial \overline{v^3}}{\partial y}}_{D_{22}^T} - \underbrace{\frac{2}{\rho} \overline{v \frac{\partial p}{\partial y}}}_{\phi_{22}^*} - \underbrace{2\nu \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{22}} = 0 \quad (2.27)$$

$$\underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{w^2}}{\partial y^2}}_{D_{33}^\nu} - \underbrace{\frac{\partial \overline{vw^2}}{\partial y}}_{D_{33}^T} - \underbrace{\frac{2}{\rho} \overline{w \frac{\partial p}{\partial z}}}_{\phi_{33}^*} - \underbrace{2\nu \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{33}} = 0 \quad (2.28)$$

$$\underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{uv}}{\partial y^2}}_{D_{12}^\nu} - \underbrace{\frac{\partial \overline{uv^2}}{\partial y}}_{D_{12}^T} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{u \frac{\partial p}{\partial y}} - \frac{1}{\rho} \overline{v \frac{\partial p}{\partial x}}}_{\phi_{12}^*} - \underbrace{\frac{v^2}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y}}_{P_{12}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{12}} = 0 \quad (2.29)$$

Les comportements asymptotiques de ces différents termes sont résumés dans le tableau 2.1. Notons que pour éliminer les coefficients p_i qui interviennent dans les dé-

veloppements de ϕ_{ij}^* , on a utilisé les relations (2.18). Les résultats sont illustrés par la figure 2.6. On peut voir que, quelle que soit la composante du tenseur de Reynolds, les termes de production P_{ij} et de diffusion turbulente D_{ij}^T sont négligeables au voisinage de la paroi : ils décroissent vers zéro à un ordre au moins supérieur de trois unités à celui des termes dominants. Pour les composantes $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$ (figures 2.6a,c), on constate à l'ordre dominant du bilan un équilibre entre la diffusion moléculaire, qui a un rôle de terme source, et la dissipation, qui est un terme puits : la turbulence est transportée vers la paroi depuis la zone où les tensions de Reynolds sont alimentées en énergie (par la production pour $\overline{u^2}$, par la redistribution pour $\overline{w^2}$), qui se situe aux alentours de $y^+ = 11$ (cf. § 2.1.3 et les figures 2.7 et 2.9), puis transformée en énergie interne par la dissipation. On voit donc que, dans la sous-couche visqueuse, ce sont bien les phénomènes faisant intervenir la viscosité du fluide qui prédominent.

Pour les composantes $\overline{v^2}$ et \overline{uv} (figures 2.6b,d), la situation est un peu différente. Le terme de pression ϕ_{ij}^* est en effet du même ordre que D_{ij}^v et ε_{ij} et joue le rôle d'un terme puits. Dans la quasi-totalité de l'écoulement, ϕ_{22}^* est positif, comme le montre la figure 2.8 : ce terme redistribue vers $\overline{v^2}$ l'énergie produite sur $\overline{u^2}$, ayant ainsi tendance à restaurer l'isotropie de la turbulence. Cependant, en dessous de $y^+ \simeq 5$, ϕ_{22}^* change de signe, redistribuant alors l'énergie de la composante « pauvre » $\overline{v^2}$ vers les composantes plus « riches » $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$. Ce phénomène peut s'expliquer par un effet d'impact sur la paroi : un volume fluide se déplaçant avec une vitesse v vers la paroi se verra écrasé sur celle-ci, l'énergie cinétique étant redistribuée vers les autres directions. Ce phénomène est très élégamment désigné en anglais par l'onomatopée *splat* (voir le cas des *sweeps* au § 2.1.2). L'effet de redistribution de la composante normale vers les autres composantes pour $y^+ \leq 5$ n'est pas en nature différent de l'atténuation de ϕ_{22}^* qui agit sur une plus grande distance et qui a été soulignée au § 2.2. Cependant, il est beaucoup plus intense, puisqu'il arrive à inverser le signe de ϕ_{22}^* , et surtout on en trouve les traces dans les champs instantanés [124]. Perot & Moin notent que cet effet est indissociable de la dissipation. En effet, à proximité d'une surface libre, où les *splats* existent mais où la dissipation est faible à la paroi, on n'observe pas de changement de signe de ϕ_{22}^* : des *splats* en différents points de la paroi créent des jets radiaux autour de ces points ; quand les jets provenant de ces différents *splats* se rencontrent, le fluide est éjecté vers le haut. Ce phénomène est appelé *anti-splat* par Perot & Moin. Les *splats* et *anti-splats* se compensent mutuellement en moyenne et ne jouent donc aucun rôle de redistribution. Mais dans le cas d'une paroi solide, l'énergie cinétique transférée vers u et v par les *splats* est soumise à une intense dissipation. Les *anti-splats* sont donc considérablement affaiblis, et ne compensent pas l'effet des *splats*. En moyenne, il y a

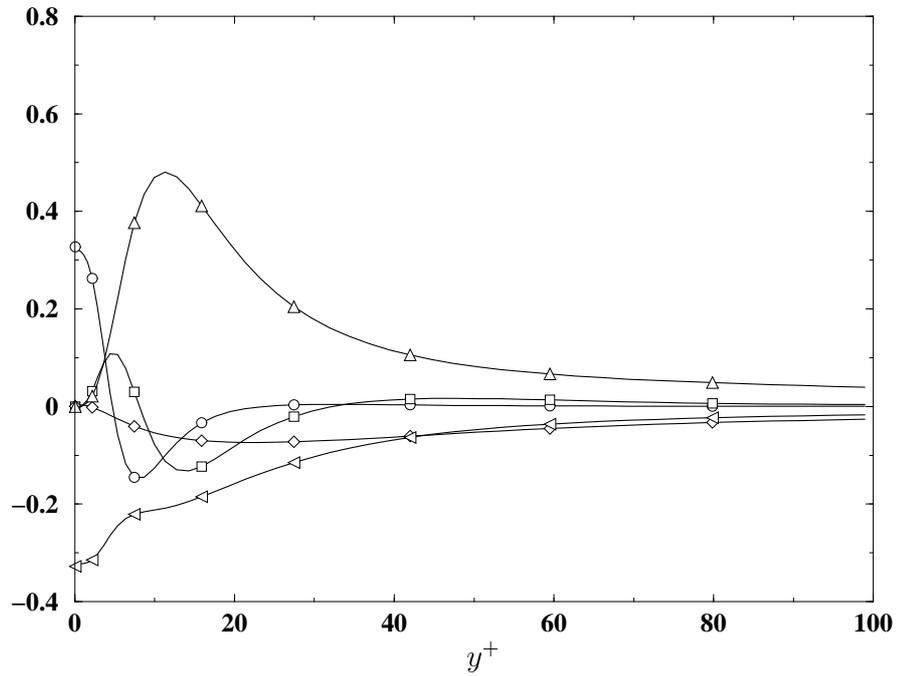


FIG. 2.7 – Bilan de $\overline{u^2}$. DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. $\circ D_{11}^\nu$; $\square D_{11}^T$; $\diamond \phi_{11}^*$; $\triangle P_{11}$; $\triangleleft \varepsilon_{11}$.

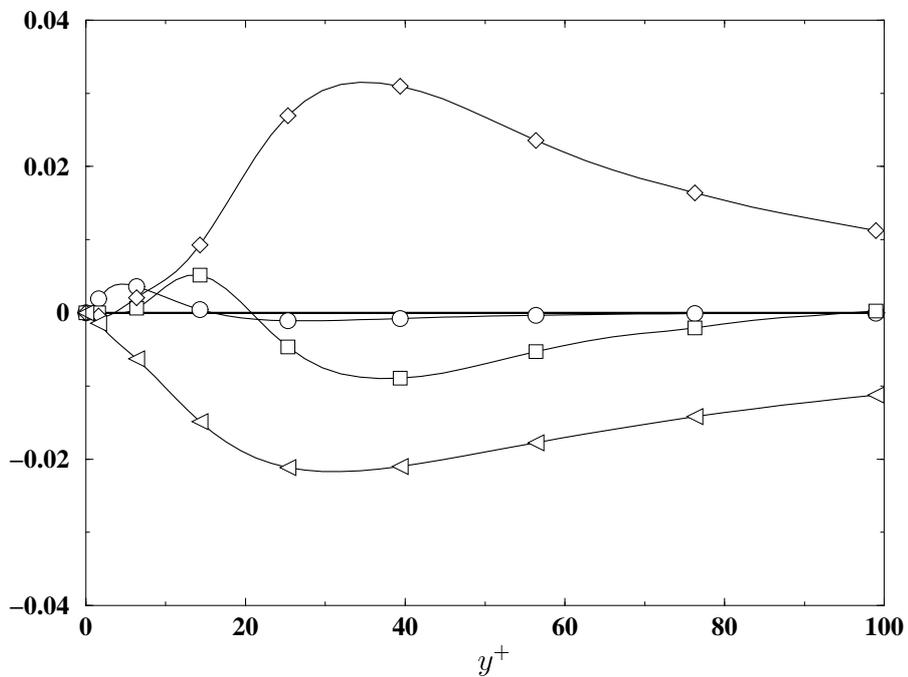


FIG. 2.8 – Bilan de $\overline{v^2}$. DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. $\circ D_{22}^\nu$; $\square D_{22}^T$; $\diamond \phi_{22}^*$; $\triangleleft \varepsilon_{22}$.

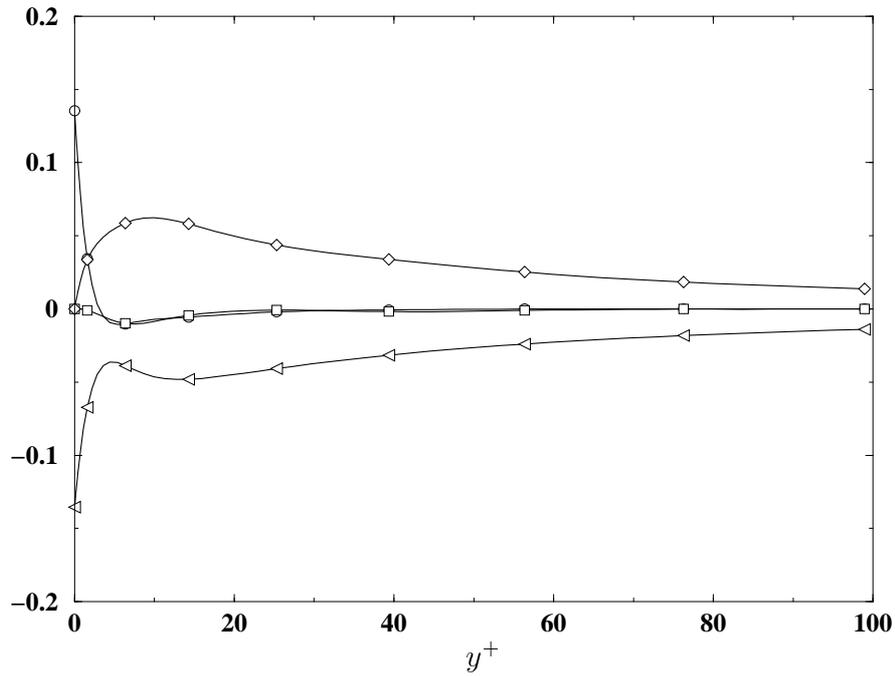


FIG. 2.9 – Bilan de $\overline{w^2}$. DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. $\circ D_{33}^\nu$; $\square D_{33}^T$; $\diamond \phi_{33}^*$; $\triangleleft \epsilon_{33}$.

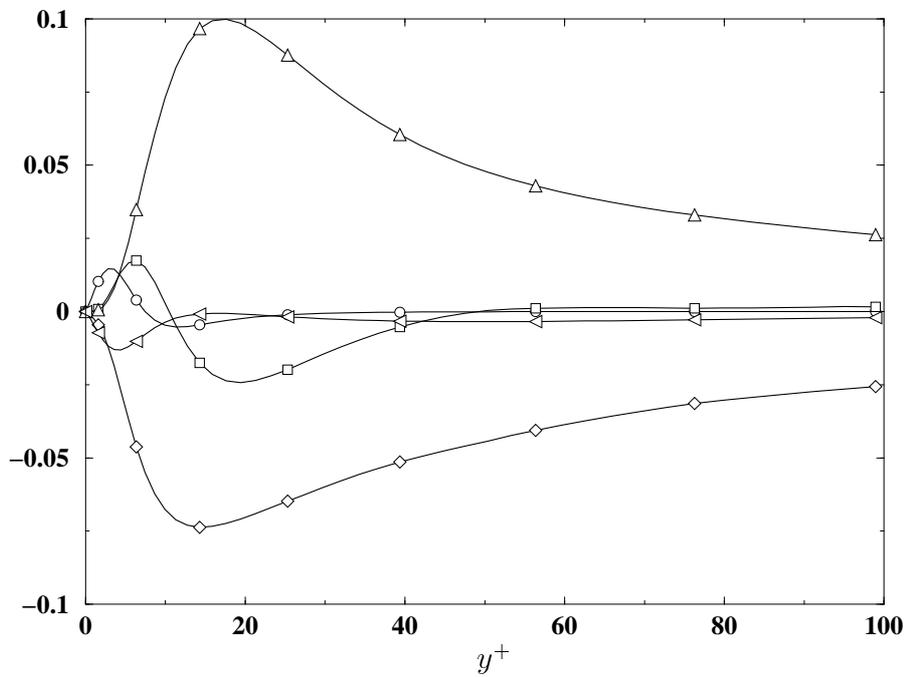


FIG. 2.10 – Bilan de \overline{uv} . DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. $\circ D_{12}^\nu$; $\square D_{12}^T$; $\diamond \phi_{12}^*$; $\triangle P_{12}$; $\triangleleft \epsilon_{12}$.

| | D_{ij}^ν | D_{ij}^T | ϕ_{ij}^* | P_{ij} | $-\varepsilon_{ij}$ |
|------------------|---|-----------------------------|----------------------------|--|---|
| $\overline{u^2}$ | $2\nu\overline{a_1^2} + 12\nu\overline{a_1 a_2}y$ | $-4\overline{a_1^2 b_2}y^3$ | $-4\nu\overline{a_1 a_2}y$ | $-2\mathcal{A}_1\overline{a_1 b_2}y^3$ | $-2\nu\overline{a_1^2} - 8\nu\overline{a_1 a_2}y$ |
| $\overline{v^2}$ | $12\nu\overline{b_2^2}y^2$ | $-6\overline{b_2^3}y^5$ | $-4\nu\overline{b_2^2}y^2$ | 0 | $-8\nu\overline{b_2^2}y^2$ |
| $\overline{w^2}$ | $2\nu\overline{c_1^2} + 12\nu\overline{c_1 c_2}y$ | $-4\overline{b_2 c_1^2}y^3$ | $-4\nu\overline{c_1 c_2}y$ | 0 | $-2\nu\overline{c_1^2} - 8\nu\overline{c_1 c_2}y$ |
| \overline{uv} | $6\nu\overline{a_1 b_2}y$ | $-5\overline{a_1 b_2^2}y^4$ | $-2\nu\overline{a_1 b_2}y$ | $-\mathcal{A}_1\overline{b_2^2}y^4$ | $-4\nu\overline{a_1 b_2}y$ |

TAB. 2.1 – Termes dominants des développements asymptotiques des différents termes des bilans des tensions de Reynolds.

alors redistribution de la composante normale vers les autres composantes.

On voit donc que les termes qui jouent des rôles importants au voisinage de la paroi sont la diffusion moléculaire, la dissipation et la redistribution. Il est important de garder à l'esprit que les modèles de turbulence devront reproduire du mieux possible l'équilibre de ces termes en proche paroi. En effet, la prédiction correcte de l'anisotropie est directement liée au respect des équilibres entre les termes. Dans les simulations, les comportements asymptotiques des tensions de Reynolds sont liés aux termes faisant intervenir leurs dérivées secondes et en particulier à la diffusion moléculaire. Par conséquent, on ne peut espérer obtenir les bons comportements que si les termes en balance avec D_{ij}^ν sont correctement modélisés à la paroi. Notamment, il convient de porter une attention particulière au terme de dissipation. En général, ce terme sera modélisé en fonction du taux de dissipation d'énergie cinétique $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{ii}$, sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \mathcal{E}_{ij} \quad (2.30)$$

D'une part, le tenseur \mathcal{E}_{ij} devra reproduire autant que possible l'anisotropie de ε_{ij} , de manière à donner le bon « poids » à ce terme dans les bilans (2.26)–(2.29). D'autre part, la condition aux limites imposée sur ε devra être compatible avec son comportement asymptotique, qui est :

$$\varepsilon = \nu(\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) + O(y) \quad (2.31)$$

On doit donc imposer une condition aux limites de Dirichlet inhomogène. Or, l'équation de transport de l'énergie turbulente $k = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$ dans un canal est :

$$\underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{k}}{\partial y^2}}_{D^\nu} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_i u_i v}}{\partial y}}_{D^T} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{v p}}{\partial y}}_{\phi^*} - \underbrace{\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y}}_P - \underbrace{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_\varepsilon = 0 \quad (2.32)$$

qui se réduit à la paroi à :

$$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} - \varepsilon = O(y) \quad (2.33)$$

où $\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$ et ε sont à l'ordre 0. Il est donc naturel de définir la valeur de ε à la paroi par :

$$\varepsilon_p = \nu \left. \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \right|_p \quad (2.34)$$

Cependant, il est en général difficile d'un point de vue numérique d'imposer la condition aux limites sous cette forme, qui fait intervenir une dérivée seconde. C'est pourquoi il est préférable d'utiliser la condition, asymptotiquement correcte d'après (2.24) et (2.31) :

$$\varepsilon_p = 2\nu \left(\left. \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right|_p \right)^2 \quad (2.35)$$

qui ne fait intervenir qu'une dérivée première, ou encore :

$$\varepsilon_p = 2\nu \lim_{y \rightarrow 0} \frac{k}{y^2} \quad (2.36)$$

2.3.4 Importance du comportement asymptotique de ϕ_{ij}^* pour la modélisation

Le tableau 2.1 montre que, quelle que soit la composante du tenseur de Reynolds, le terme de pression ϕ_{ij}^* équilibre la différence entre la diffusion moléculaire D_{ij}^ν et la dissipation ε_{ij} . Dans le cas des composantes $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$, le terme de pression n'intervient pas directement à l'ordre 0, qui est l'ordre dominant, mais à l'ordre 1. Cependant, il reste très grand devant la production et la diffusion turbulente qui, elles, sont d'ordre 3. En revanche, dans les bilans des composantes soumises à l'effet de blocage, $\overline{v^2}$ et \overline{uv} , ϕ_{ij}^* intervient directement à l'ordre dominant. Mais, dans tous les cas, le terme de pression est au même ordre que $\varepsilon_{ij} - D_{ij}^\nu$. L'équilibre de l'équation de transport de $\overline{u_i u_j}$ s'écrit alors :

$$\phi_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - D_{ij}^\nu + O(y^n) \quad (2.37)$$

où $n = 3$ pour $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$, $n = 4$ pour \overline{uv} et $n = 5$ pour $\overline{v^2}$. On voit donc que ϕ_{ij}^* équilibre $\varepsilon_{ij} - D_{ij}^\nu$ aux ordres 1 et 2 pour $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$; aux ordres 1, 2 et 3 pour \overline{uv} ; et aux ordres 2, 3 et 4 pour $\overline{v^2}$.

À la suite de Lai & So [73], on notera donc que tout modèle de turbulence, pour être valable jusqu'à la paroi, se doit de respecter cet équilibre. Il n'est pas possible, sinon,

d'obtenir les bons comportements asymptotiques des différentes tensions de Reynolds. Or, dans certains cas, les bons comportements des ε_{ij} ne seront pas reproduit. Il est alors préférable de construire un modèle de ϕ_{ij}^* qui compense ce défaut, en équilibrant la différence $\varepsilon_{ij} - D_{ij}'$, même si celle-ci n'est pas modélisée correctement. Nous reviendrons sur cette question au § 4.1, car elle constituera un des points importants du modèle de relaxation elliptique.

2.3.5 Décomposition du terme de pression

Le terme de pression est classiquement décomposé en deux contributions différentes de manière à en extraire la trace. Il existe une infinité de manières de réaliser cette opération [96]. La méthode la plus classique est d'introduire la corrélation pression-déformation :

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\rho} \overline{p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \quad (2.38)$$

Ce terme est à trace nulle et par conséquent, sa contribution dans l'équation de transport de l'énergie turbulente k est nulle : c'est uniquement un terme de redistribution d'énergie entre les composantes du tenseur de Reynolds. La différence entre ϕ_{ij}^* et ϕ_{ij} est notée D_{ij}^p , et vaut :

$$D_{ij}^p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i p} \delta_{jk} + \overline{u_j p} \delta_{ik}) \quad (2.39)$$

Ce terme apparaît sous la forme d'une divergence : il ne correspond donc pas à une création d'énergie, mais plutôt à un transport d'énergie entre différentes régions. C'est pourquoi il est appelé terme de *diffusion par la pression*.

Une autre méthode couramment utilisée consiste à introduire le déviateur de ϕ_{ij}^* , défini par :

$$\begin{aligned} \text{dév}(\phi_{ij}^*) &= \phi_{ij}^* - \frac{1}{3} \phi_{kk}^* \delta_{ij} \\ &= -\frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k p} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$(2.41)$$

Ce terme est également de trace nulle. La différence entre ϕ_{ij}^* et $\text{dév}(\phi_{ij}^*)$ est :

$$D_{ij}^{p'} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k p} \delta_{ij} \quad (2.42)$$

En voit donc que, comme ϕ_{ij} et D_{ij}^p , $\text{dév}(\phi_{ij}^*)$ et $D_{ij}^{p'}$ sont des termes de redistribution et de diffusion par la pression. Par conséquent, alors que de prime abord la décomposition

de ϕ_{ij}^* paraît introduire deux termes de signification physique simple, sa non-unicité introduit en fait une ambiguïté.

D'autres arguments plaident également en défaveur de cette décomposition. Le premier, signalé par Speziale [145], est que les termes ainsi introduits ne sont pas indépendants de la rotation du repère dans la limite de la turbulence à deux composantes. Mais celui qui nous intéresse ici est l'introduction de comportements asymptotiques difficiles à reproduire. En effet, si on regarde, par exemple dans l'équation de $\overline{v^2}$, les comportements asymptotiques des deux termes de la décomposition $\phi_{ij} + D_{ij}^p$, on obtient :

$$\phi_{22} = \frac{4\overline{p_0 b_2} y}{\rho} + \left(\frac{6\overline{p_0 b_3}}{\rho} + \frac{4\overline{p_1 b_2}}{\rho} \right) y^2 + O(y^3) \quad (2.43)$$

et

$$D_{22}^p = -\frac{4\overline{p_0 b_2} y}{\rho} - \frac{6}{\rho} (\overline{p_0 b_3} + \overline{p_1 b_2}) y^2 + O(y^3) \quad (2.44)$$

On voit donc que chacun de ces termes se comporte comme y au voisinage de la paroi, alors que leur somme se comporte comme y^2 . On introduit donc, par cette décomposition, des termes qui deviennent prédominants dans le bilan de $\overline{v^2}$, et qui doivent être modélisés avec suffisamment de précision pour que leur somme décroisse comme y^2 , et équilibre la différence entre ε_{ij} et D_{ij}^ν . La figure 2.11 représente, comme la figure 2.8, le bilan de $\overline{v^2}$, mais la décomposition de ϕ_{ij}^* est utilisée. On voit nettement que les deux termes introduits sont dominants près de la paroi, mais se compensent mutuellement. La seconde décomposition introduit le même problème : en voulant annuler la trace, on ajoute un terme du même ordre que celle-ci sur la composante 22. Or, l'ordre de la trace est fixé par l'ordre des composantes 11 et 33, qui, du fait de la forte anisotropie, sont à un ordre inférieur (cf. tableau 2.1).

Il apparaît donc préférable de modéliser ϕ_{ij}^* sans introduire de décomposition, même si la signification physique de ce terme est moins claire que celle des deux termes de sa décomposition. Loin des parois, comme la diffusion par la pression est en général négligeable, on pourra considérer que ϕ_{ij}^* représente essentiellement la redistribution d'énergie entre composantes. Près des parois, l'important est de garder présent à l'esprit que ce terme doit équilibrer la différence entre la dissipation et la diffusion moléculaire.

Une autre solution, qui semble être la plus cohérente de toutes, est celle adoptée par Craft & Launder [25], qui consiste à décomposer ϕ_{ij}^* de la manière suivante :

$$\phi_{ij}^* = \phi_{ij}^\ddagger + \frac{1}{2} \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \phi_{mm}^* \quad (2.45)$$

ϕ_{ij}^\ddagger est alors un terme à trace nulle, représentant donc bien une redistribution. En revanche, le second terme ne se met pas sous forme d'une divergence et n'est donc pas

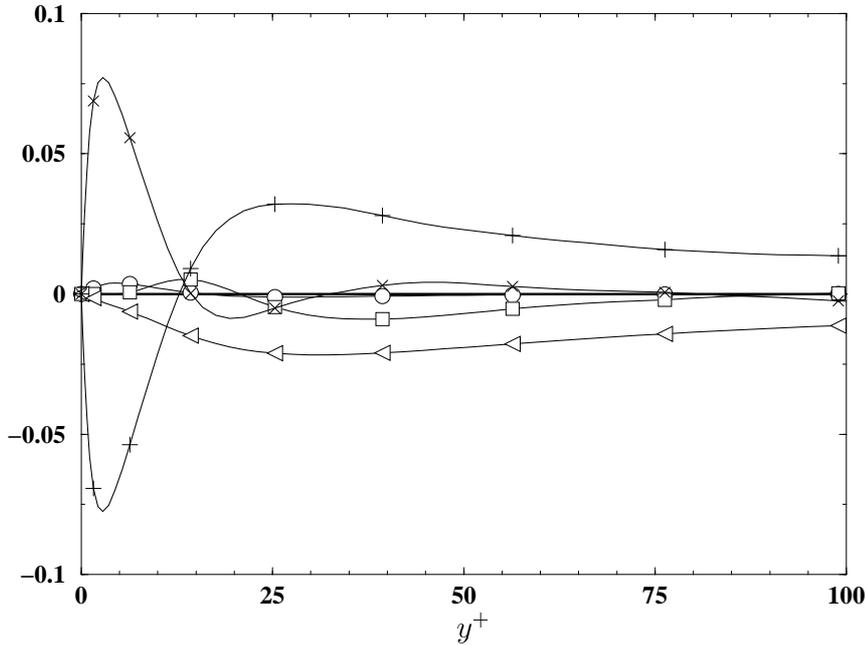


FIG. 2.11 – Bilan de $\overline{v^2}$ après décomposition de ϕ_{ij}^* . DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. $\circ D_{22}^{\nu}$; $\square D_{22}^T$; $+$ ϕ_{22} ; $\times D_{22}^p$; $\triangleleft \varepsilon_{22}$.

un terme de diffusion. Toutefois, il suffit de modéliser ϕ_{mm}^* qui, lui, en est un. Cette décomposition a l'avantage indéniable de conserver des comportements asymptotiques cohérents.

2.4 Lois « universelles »

Dans le cas d'un écoulement le long d'une plaque plane, à la limite des grands nombres de Reynolds, on peut montrer que les différentes grandeurs de l'écoulement suivent un comportement « universel ». Ce résultat, qui est l'un des rares résultats théoriques en turbulence, a été montré à l'origine par von Kármán [158] à l'aide de l'hypothèse de longueur de mélange, hypothèse dont s'affranchit totalement la théorie développée ensuite par Millikan [106]. Un exposé détaillé de cette théorie est donné par Tennekes & Lumley [150]. Nous allons ici en retracer les grandes lignes.

Considérons, comme précédemment, l'écoulement dans un canal. L'équilibre d'une tranche de fluide de la largeur $2h$ du canal requiert

$$\mu \left. \frac{dU}{dy} \right|_0 = -h \frac{dP}{dx} \quad (2.46)$$

Or, en intégrant entre 0 et y l'équation de la quantité de mouvement suivant l'axe x , on obtient :

$$0 = -\frac{y}{\rho} \frac{dP}{dx} - \overline{uv} + \nu \frac{dU}{dy} - \nu \left. \frac{dU}{dy} \right|_0 \quad (2.47)$$

En utilisant (2.46) et la définition (2.21) de u_τ , (2.47) devient :

$$-\overline{uv} + \nu \frac{dU}{dy} = u_\tau^2 \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (2.48)$$

Si on adimensionne cette équation par u_τ et h , on obtient :

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{dU/u_\tau}{d\eta} = 1 - \eta \quad (2.49)$$

où $\eta = y/h$. Lorsque le nombre de Reynolds Re_τ est grand, le terme visqueux disparaît. Or, nous avons vu à la section précédente que, à la paroi, les termes visqueux deviennent prépondérants. La forme adimensionnelle (2.49) n'est donc pas valable près des parois. Il faut alors choisir une autre échelle de longueur de manière à ce que le terme visqueux ne disparaisse pas aux grands nombres de Reynolds. Cette échelle est ν/u_τ , car (2.48) prend alors la forme :

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} + \frac{dU/u_\tau}{dy^+} = 1 - \frac{y^+}{Re_\tau} \quad (2.50)$$

où $y^+ = yu_\tau/\nu$. Les équations (2.49) et (2.50) sont équivalentes tant que le nombre de Reynolds reste fini. À la limite $Re_\tau \rightarrow \infty$, elles dégénèrent vers des formes différentes, qui ne sont pas valables dans les mêmes régions de l'écoulement.

En effet, quand $Re_\tau \rightarrow \infty$, (2.49) devient :

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} = 1 - \eta \quad (2.51)$$

Cette équation n'est valable que pour des valeurs de y^+ infinies, car le terme visqueux a disparu, ce qui ne peut pas représenter la physique de l'écoulement à proximité de la paroi. La zone de validité de (2.51), dans laquelle l'écoulement est indépendant de la viscosité, est appelée *zone centrale*.

Dans la limite $Re_\tau \rightarrow \infty$, (2.50) devient, quant à elle :

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} + \frac{dU/u_\tau}{dy^+} = 1 \quad (2.52)$$

Cette équation n'est à son tour valable que dans la région où $\eta \rightarrow 0$, qui est appelée *zone de paroi*. L'écoulement y est indépendant de la largeur du canal. Dans cette zone, la contrainte de cisaillement totale, somme de la contrainte turbulente et de la contrainte visqueuse, est donc constante.

2.4.1 Lois de paroi

Dans la zone de paroi, (2.52) suggère qu'il existe une relation entre U , y , u_τ et ν (mais pas h), de la forme :

$$\mathcal{F}(U, y, u_\tau, \nu) = 0 \quad (2.53)$$

En adimensionnant cette relation par u_τ et ν , on obtient :

$$\mathcal{F}(U^+, y^+, 1, 1) = 0 \quad (2.54)$$

Le théorème des fonctions implicites donne finalement :

$$U^+ = f(y^+) \quad (2.55)$$

Le même argument permet de montrer que \overline{uv} vérifie :

$$\overline{uv}^+ = g(y^+) \quad (2.56)$$

Les équations (2.55) et (2.56) constituent les *lois de paroi*. Elles montrent que U^+ et \overline{uv}^+ sont indépendants du nombre de Reynolds. C'est en ce sens que l'on parle de *lois universelles*.

Dans la sous-couche visqueuse, le premier terme de (2.52) est négligeable, car les effets visqueux sont dominants. On a alors :

$$U^+ = y^+ \quad (2.57)$$

Ce résultat est conforme à l'analyse asymptotique effectuée au § 2.3.1.

2.4.2 Loi de défaut de vitesse

De même, dans la zone centrale, (2.51) suggère que l'écoulement est indépendant de la viscosité. Il est plus commode, ici, d'écrire une relation impliquant la dérivée de la vitesse :

$$\mathcal{H}(dU/dy, y, u_\tau, h) = 0 \quad (2.58)$$

Après adimensionalisation par u_τ et h , on a :

$$\mathcal{H}(dU^+/d\eta, \eta, 1, 1) = 0 \quad (2.59)$$

ce qui donne :

$$\frac{dU^+}{d\eta} = h(\eta) \quad (2.60)$$

ou encore, en introduisant H , la primitive de h :

$$\frac{dU^+}{d\eta} = \frac{dH}{d\eta} \quad (2.61)$$

En intégrant (2.61) depuis le centre du canal, on obtient la *loi de défaut de vitesse* :

$$\frac{U - U_m}{u_\tau} = H(\eta) \quad (2.62)$$

où U_m est la vitesse au centre du canal.

2.4.3 Loi logarithmique

Le nombre de Reynolds étant infini, on peut supposer qu'il existe une région dans laquelle $y^+ \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow 0$ sont valables simultanément. On peut donc identifier les gradients de vitesse donnés par (2.55) et (2.61) :

$$\frac{u_\tau^2}{\nu} \frac{df}{dy^+} = \frac{u_\tau}{h} \frac{dH}{d\eta} \quad (2.63)$$

ce qui donne

$$y^+ \frac{df}{dy^+} = \eta \frac{dH}{d\eta} \quad (2.64)$$

Dans cette égalité, le membre de gauche ne dépend que de y^+ , tandis que le membre de droite ne dépend que de η . Les deux membres sont par conséquent constants. La constante est notée $1/\kappa$, κ étant appelée *constante de Von Kármán*. L'expérience montre que $\kappa \simeq 0,41$. On en déduit que la vitesse suit un profil logarithmique :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (2.65)$$

La zone de validité de cette loi, correspondant à $y^+ \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow 0$ est appelée *zone logarithmique*.

Dans cette zone, (2.51) et (2.52) donnent toutes deux :

$$-\overline{uv} = u_\tau^2 \quad (2.66)$$

La contrainte de cisaillement turbulente est donc constante. Ce résultat suggère que dans cette région, les tensions de Reynolds sont constantes, ce qui implique que le transport de la turbulence est nul : on dit alors que la turbulence est en équilibre local.

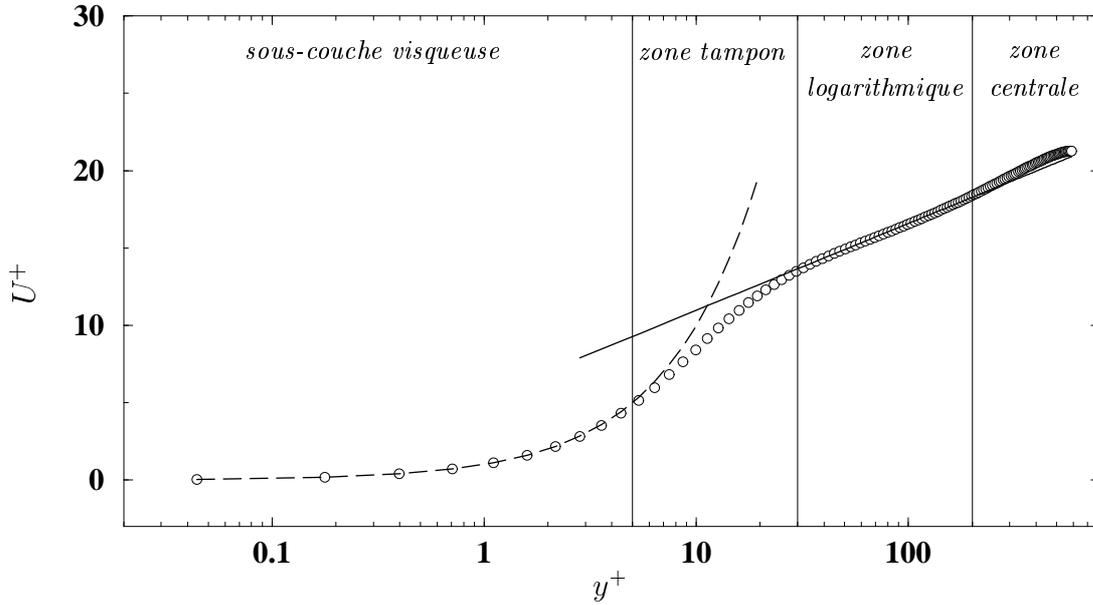


FIG. 2.12 – Profil de U . DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. \circ U donné par la DNS; --- profil linéaire $U^+ = y^+$; — profil logarithmique $U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5,4$.

L'équation de transport de k (2.32) se réduit alors à $P = \varepsilon$. Comme $P = -\overline{uv} dU/dy$, les équations (2.65) et (2.66) montrent qu'on a également dans cette zone :

$$\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (2.67)$$

La figure 2.12 montre les différentes régions de l'écoulement qui ont été introduites plus haut, sur le cas du canal à $Re_\tau = 590$ [110]. Entre la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique, il existe une zone dans laquelle la vitesse U évolue de manière à « raccorder » les lois linéaires et logarithmiques : elle est appelée *zone tampon*.

2.4.4 Validité du comportement « universel »

Le comportement de la vitesse moyenne et de la turbulence dans les différentes zones d'un canal est qualifié d'« universel », car il ne dépend pas du nombre de Reynolds. On retrouve également les mêmes zones dans le cas d'une couche limite. C'est ce qui permet d'utiliser la technique des fonctions de paroi, exposées au § 1.3.1, en appliquant en un point à l'intérieur de la zone logarithmique des conditions aux limites dérivées des lois obtenues à la section précédente.

Cependant, le comportement « universel » obtenu n'est valable que sous un certain

nombre d'hypothèses et tombe donc en défaut dans de nombreux cas. L'hypothèse la plus restrictive est sans doute la simplicité des écoulements (canal et couche limite) : pas de vitesse suivant z , pas de fortes variations suivant x , écoulement essentiellement parallèle à la paroi. Dans les cas fortement tridimensionnels, les écoulements décollés ou les jets impactants, les conclusions obtenues ne s'appliquent plus. De même, Tennekes et Lumley [150] montrent que lorsque l'écoulement est soumis à un gradient de pression, favorable ou adverse, ce qui est le cas la plupart du temps, les lois obtenues à la section précédente ne sont que des approximations au premier ordre (par rapport au gradient de pression). Par exemple, les paramètres κ et C de la loi logarithmique (2.65) sont alors dépendants du nombre de Reynolds Re_τ .

Le cas avec gradient de pression est un cas particulier d'écoulements dans lesquels l'hypothèse principale de la théorie mise en défaut est l'unicité des échelles de longueur et de vitesse : ν/u_τ et u_τ dans la zone de paroi ($\eta \rightarrow 0$) ; h et u_τ dans la zone centrale ($y \rightarrow \infty$). Très souvent, l'écoulement est caractérisé par d'autres échelles, comme par exemple dans les cas avec aspiration ou soufflage à la paroi, avec rotation d'ensemble ou encore avec forces de flottabilité. Dans ce dernier cas, des théories spécifiques ont d'ailleurs été développées [44, 166], qui montrent que d'autres lois « universelles » s'appliquent, donnant l'évolution de la vitesse et de la température moyenne en puissance de la distance à la paroi.

De plus, comme les résultats de la théorie sont obtenus en faisant tendre le nombre de Reynolds vers l'infini, ils ne peuvent être totalement exacts dans le cadre des écoulements réels. À bas nombre de Reynolds, la zone logarithmique à proprement parler disparaît. Souvent, on peut encore distinguer une loi logarithmique *apparente*, dont la pente et le coefficient constant sont très dépendants de Re_τ [110, 144]. Mais même aux grands nombres de Reynolds, les données expérimentales montrent que la loi logarithmique n'est pas totalement indépendante de Re_τ . Cette dépendance se fait essentiellement sentir à travers le coefficient C [77, 114, 144]. La raison en est que les échelles de longueur de la zone de paroi (ν/u_τ) et de la zone centrale (h) influencent l'ensemble de l'écoulement. Il y a alors, encore une fois, mise en défaut de l'hypothèse d'unicité de l'échelle de longueur [167]. Les conclusions de la théorie sont alors erronées : la contrainte de cisaillement totale n'est pas constante dans la zone de paroi [77] et il n'y a pas d'équilibre local ($P \neq \varepsilon$) [110].

Il convient donc d'user avec prudence des conclusions théoriques de la section précédente, car elles ne s'appliquent que dans des situations bien particulières. Cependant, comme le montre la figure 2.12, dans un cas simple comme celui de l'écoulement dans un canal, même à un nombre de Reynolds relativement faible, les résultats de la théo-

rie s'appliquent approximativement. C'est pourquoi, la validité de ces lois peut être une hypothèse heuristique très utile, notamment pour analyser le comportement des modèles de turbulence dans les différentes zones de l'écoulement (cf. § 4.3 et § 4.4).

2.5 Conclusion du chapitre

Ce chapitre nous a permis de présenter les caractéristiques physiques les plus importantes des écoulements de proche paroi, qui constituent un ensemble d'informations qui doivent être présentes à l'esprit du modélisateur. Le rôle exact des structures instantanées est difficile, voire impossible, à prendre véritablement en compte dans les modèles aux moyennes de Reynolds, mais leurs conséquences, que ce soit la production ou la diffusion turbulente, apparaissent très importantes au niveau moyen.

En revanche, les effets de la paroi sur la turbulence, qu'ils soient cinématiques ou dynamiques, ainsi que les comportements asymptotiques qu'ils induisent, sont essentiels, et leur prise en compte doit constituer la base même de la méthode d'extension de la validité des modèles haut-Reynolds aux régions de paroi.

Nous verrons au chapitre suivant que le respect de toutes les contraintes et la prise en compte de tous les phénomènes physiques sont loin d'être aisés. De plus, nous montrerons que les modèles bas-Reynolds classiques souffrent de n'être que des extensions de modèles haut-Reynolds, qui sont fondés sur des hypothèses non-valides en proche paroi.

Chapitre 3

Modélisation classique

Ce chapitre est consacré à la présentation et à l'analyse des modèles de turbulence les plus classiques. Le point le plus important, dans le cadre de cette étude, consiste en la compréhension de la nécessité d'introduction de termes correctifs pour prendre en compte l'influence des parois. Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux modèles dits *au second ordre*, c'est-à-dire incluant les équations de transport des tensions de Reynolds, qui constituent le niveau de modélisation minimal pour prendre en compte de manière réaliste la complexité de la physique, mais aussi le niveau maximal acceptable pour pouvoir réaliser des simulations numériques de cas industriels dans des temps de calcul raisonnables. Dans un second temps, nous nous focaliserons sur les modèles à viscosité turbulente, plus simples et représentant moins finement les mécanismes physiques, mais beaucoup plus faciles à utiliser et par conséquent très prisés des milieux industriels.

3.1 Modèles au second ordre

La modélisation au second ordre consiste à construire des hypothèses de fermeture pour les équations de transport du tenseur de Reynolds (2.9). Dans ces équations, les termes \mathcal{C}_{ij} , D_{ij}^ν et P_{ij} ne dépendent que des vitesses moyennes et des tensions de Reynolds elles-mêmes, et ne nécessitent par conséquent aucune modélisation. En revanche, les termes D_{ij}^T , ϕ_{ij}^* et ε_{ij} dépendent de corrélations inconnues, qui sont, respectivement, les corrélations triples de la forme $\overline{u_i u_m u_n}$, les corrélations vitesse–gradient de pression $\overline{u_i \partial p / \partial x_m}$ et les corrélations entre composantes du gradient de vitesse $\overline{\partial u_i / \partial x_n \partial u_m / \partial x_n}$. Nous allons donc nous intéresser à chacun de ces trois termes, tout d'abord dans le cadre des écoulements libres à haut nombre de Reynolds, puis dans celui des écoulements de proche paroi.

3.1.1 Modélisation haut-Reynolds

La modélisation classique de la turbulence s'est développée sur la base de maigres connaissances théoriques, qui ne sont valables que dans des cas très particuliers, comme la turbulence homogène ou isotrope, et dans la limite des grands nombres de Reynolds. De plus, comme les zones de proche paroi sont très difficiles d'accès expérimental, les modélisateurs ont dû longtemps se restreindre aux écoulements libres, ou à ne prendre en compte la paroi que par la technique des fonctions de paroi (cf. § 1.3.1). La modélisation classique, dite *haut-Reynolds*, ne prend donc en compte ni les effets des bas nombres de Reynolds, ni l'influence des parois, sauf au travers de termes correctifs, les termes d'écho de paroi. Cependant, elle constitue la base de tous les modèles développés ultérieurement.

3.1.1.1 Le terme de pression

Le terme de pression est le terme le plus crucial à modéliser précisément, car il joue un rôle essentiel dans les équations de transport des tensions de Reynolds. En effet, on peut voir sur les figures 2.7–2.10 qu'il est souvent le terme le plus important en amplitude. Il est essentiel dans la répartition de l'énergie turbulente sur les trois tensions de Reynolds diagonales. On peut voir qu'en canal, seul $\overline{u^2}$ possède un terme de production non-nul : l'énergie turbulente est créée sur $\overline{u^2}$ et le terme ϕ_{11}^* , qui est négatif, prend de l'énergie à $\overline{u^2}$ qui est redistribuée par ϕ_{22}^* et ϕ_{33}^* vers $\overline{v^2}$ et $\overline{w^2}$: dans les bilans de ces deux dernières composantes, ϕ_{ij}^* remplace la production.

Cet effet de redistribution est plus explicite lorsque ϕ_{ij}^* est décomposé, par exemple, en ϕ_{ij} et D_{ij}^p (cf. 2.3.5), car la trace de ϕ_{ij} est nulle. Ce terme n'a donc aucune influence sur le niveau d'énergie turbulente en un point donné, il se contente de la redistribuer entre les composantes : il joue donc un rôle primordial dans l'évolution des anisotropies. Le terme restant, D_{ij}^p , modifie localement le niveau d'énergie turbulente, mais n'a pas non plus d'influence sur l'énergie turbulente totale contenue dans le domaine. Il ne fait que transporter l'énergie d'une région vers une autre : c'est donc un terme de redistribution spatiale.

La modélisation haut-Reynolds du terme de pression est fondée essentiellement sur les travaux pionniers de Chou [15, 16]. L'analyse de ϕ_{ij} repose sur l'équation de Poisson vérifiée par la pression fluctuante (2.10). La solution générale de cette équation est

(cf. par exemple [30]) :

$$p(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \nabla^2 p(\mathbf{x}') \frac{dV(\mathbf{x}')}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} - \int_{\partial\Omega} \left(p(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \right) - \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}') \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \right) dS(\mathbf{x}') \quad (3.1)$$

où $\partial\Omega$ représente la frontière du domaine. Au § 2.2.2, la condition aux limites approximative $\partial p / \partial \mathbf{n} = 0$ a été utilisée pour éliminer le second terme surfacique, permettant ainsi d'exprimer la pression sous forme d'une intégrale de volume en transformant le terme de surface restant. Ici, cette hypothèse n'a pas été utilisée, ce qui explique que (3.1) et (2.11) ne soient pas strictement équivalentes.

L'équation intégrale de ϕ_{ij} se déduit facilement de (3.1) :

$$\begin{aligned} \rho \phi_{ij}(\mathbf{x}) = & - \int_{\Omega} \overline{\nabla^2 p(\mathbf{x}') \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}') + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}') \right)} \frac{dV(\mathbf{x}')}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \\ & - \int_{\partial\Omega} \overline{p(\mathbf{x}') \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}') + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}') \right)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \right) dS(\mathbf{x}') \\ & + \int_{\partial\Omega} \overline{\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}') \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}') + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}') \right)} \frac{dS(\mathbf{x}')}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Suffisamment loin des parois, le terme de surface, noté ϕ_{ij}^S , peut être négligé. Le terme volumique, quant à lui, peut être décomposé en deux parties, au vu de la valeur du laplacien de pression (2.10) : la partie purement turbulente, qui s'écrit

$$\phi_{ij}^1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \overline{\frac{\partial^2 u_l u_m}{\partial x_l \partial x_m}(\mathbf{x}') \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}') + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}') \right)} \frac{dV(\mathbf{x}')}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \quad (3.3)$$

et la partie dépendant du gradient de la vitesse moyenne

$$\phi_{ij}^2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \overline{\frac{\partial U_l}{\partial x_m}(\mathbf{x}') \frac{\partial u_m}{\partial x_l}(\mathbf{x}') \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}') + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}') \right)} \frac{dV(\mathbf{x}')}{2\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \quad (3.4)$$

Les termes ϕ_{ij}^1 et ϕ_{ij}^2 sont appelés respectivement terme *lent* et terme *rapide*. La raison de cette dénomination réside dans le fait que, lorsque l'écoulement est par exemple soumis à la brusque imposition d'un cisaillement moyen, seul ϕ_{ij}^2 réagit instantanément, influant ainsi rapidement sur la turbulence. ϕ_{ij}^1 , quant à lui, ne dépendant pas du champ moyen, n'est affecté qu'indirectement, lorsque l'état de la turbulence a suffisamment évolué pour que les interactions non-linéaires se fassent sentir.

Les expressions (3.3) et (3.4) montrent que les parties lente et rapide de la corrélation pression-déformation sont non-locales : elles dépendent des gradients de vitesse fluctuante et, dans le cas du terme rapide, des gradients de vitesse moyenne sur l'ensemble du domaine. Cette propriété rend ces termes très difficiles, sinon impossibles, à modéliser localement, c'est-à-dire en ne faisant intervenir que des valeurs au point \mathbf{x} . Pourtant, nous allons voir que c'est l'approche qui est retenue en général.

Modélisation du terme lent. L'idéal pour le modélisateur est de pouvoir isoler l'influence du terme à modéliser par une expérience spécifique. Dans le cas du terme lent, on peut se référer à l'expérience de décroissance d'une turbulence homogène initialement anisotrope [153]. En effet, dans ce cas, les équations de transport du tenseur de Reynolds se réduisent à :

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} = \phi_{ij}^1 - \varepsilon_{ij} \quad (3.5)$$

Dans cette expérience, la turbulence subit deux effets : le premier est une décroissance de son énergie due à la dissipation en chaleur ; la seconde, un retour à l'isotropie. Malheureusement, si la dissipation peut être imputée au seul ε_{ij} , les deux termes induisent un retour à l'isotropie. C'est pourquoi nombre de modélisateurs, à la suite de Lumley & Newman [99], décomposent le tenseur de dissipation en $\varepsilon_{ij} = \text{dév}(\varepsilon_{ij}) + \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}$ et considèrent que la partie déviatorique doit être « absorbée » par ϕ_{ij}^1 . Le modèle de ϕ_{ij}^1 doit donc en fait représenter la somme de ϕ_{ij}^1 et de $\text{dév}(\varepsilon_{ij})$, prenant en compte ainsi l'effet total de retour à l'isotropie¹.

L'hypothèse la plus simple est celle de Rotta [131] : pour s'assurer que le terme de retour soit nul quand la turbulence est isotrope, il suffit de l'exprimer linéairement en fonction du tenseur d'anisotropie a_{ij} , défini par :

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \quad (3.6)$$

de la manière suivante :

$$\phi_{ij}^1 = -C_1 \varepsilon a_{ij} \quad (3.7)$$

avec $C_1 = 1,8$. Ce modèle simple, dit *modèle de Rotta*, est utilisé tel quel, ou simplement avec un coefficient différent, en association avec un grand nombre de modèles pour les termes ϕ_{ij}^2 , ε et D_{ij}^T , par exemple : Hanjalić & Launder [48], Launder *et al.* [81], Gibson & Launder [45], Zeman & Lumley [168] ; et même dans le cadre de modèles bas-Reynolds : Hanjalić & Launder [49], Kebede *et al.* [60], Prud'homme & Elghobashi [127], So & Yoo [142], Lai & So [73].

1. Depuis l'apparition des simulations directes, on peut isoler les effets de ϕ_{ij}^1 et de $\text{dév}(\varepsilon_{ij})$. Il est donc possible de construire des modèles distincts.

Ce modèle a été en partie confirmé par des études théoriques dans l'espace spectral, en utilisant certaines simplifications (hypothèse quasi-homogène) [160, 161]. Au premier ordre en l'anisotropie, on obtient pour le terme lent la même forme que le modèle de Rotta. Cependant, Weinstock [161] montre qu'on ne peut pas, en toute rigueur, attribuer un coefficient unique à toutes les composantes de ϕ_{ij}^1 .

Weinstock & Burk [162] remarquent, par ailleurs, que ϕ_{ij}^1 est surtout un terme de résistance aux fortes anisotropies : son intensité ne varie pas linéairement en fonction de a_{ij} . Cela conduit à introduire des non-linéarités dans le modèle. On peut montrer [97] que la forme la plus générale de ϕ_{ij}^1 est quadratique en a_{ij} :

$$\phi_{ij}^1 = -C_1 \varepsilon a_{ij} + C_1' \varepsilon (a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij}) \quad (3.8)$$

les coefficients C_1 et C_1' dépendant uniquement des deuxième et troisième invariants du tenseur d'anisotropie, $A_2 = a_{ij} a_{ji}$ et $A_3 = a_{ij} a_{jk} a_{ki}$, et du nombre de Reynolds turbulent Re_T .

Pour déterminer les coefficients de (3.8), certaines contraintes peuvent être imposées. Notamment, Lumley [97] montre que, pour assurer la réalisabilité [34, 135] du modèle, on doit imposer $\phi_{\alpha\alpha} \rightarrow 0$ quand $\overline{u_\alpha u_\alpha} \rightarrow 0$. Cette contrainte peut être respectée en ne conservant que les termes linéaires de (3.8) et en choisissant une fonction C_1 appropriée (Shikazono & Kasagi [139], Lumley [97]). Par exemple, Lumley [97] utilise :

$$C_1 = 2 + \frac{A}{9} \exp \left(-\frac{11,66}{\sqrt{Re_T}} \right) \left(\frac{108}{\sqrt{Re_T}} + 80,1 \ln [1 + 62,4(-A_2 + 2,3A_3)] \right) \quad (3.9)$$

où A est le *paramètre d'aplatissement de Lumley*, $A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3)$. Ce type de modèle est souvent appelé *quasi-linéaire*, car si le coefficient du terme quadratique C_1' est nul, des non-linéarités sont contenues dans le coefficient C_1 .

D'autres auteurs (Lumley & Newman [99], Shih & Lumley [136], Shih *et al.* [137], Speziale *et al.* [148], Craft *et al.* [21]) retiennent les termes quadratiques de (3.8). Par exemple, Speziale *et al.* [148] utilisent :

$$C_1 = 1,7 \quad ; \quad C_1' = 1,05 \quad (3.10)$$

Ces modèles restent limités aux régions loin des parois et où le nombre de Reynolds est suffisamment élevé. Des corrections sont nécessaires pour prendre en compte l'influence des parois.

Modélisation du terme rapide. Dans l'expression intégrale de ϕ_{ij}^2 apparaît le gradient de vitesse moyenne au point \mathbf{x}' . Chou [15] propose de développer celui-ci en série

de Taylor autour du point \mathbf{x} :

$$\left. \frac{\partial U_m}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}'} = \left. \frac{\partial U_m}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \frac{\partial^{s+1} U}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2} \dots \partial x_{l_s} \partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}} (x'_{l_1} - x_{l_1})(x'_{l_2} - x_{l_2}) \dots (x'_{l_s} - x_{l_s}) \quad (3.11)$$

Les corrélations en deux points entrant dans (3.4) tendent rapidement vers zéro lorsque la séparation $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$ croît. Par conséquent, on peut supposer, lorsque l'écoulement n'est pas trop éloigné de l'homogénéité (hypothèse dite *quasi-homogène*), que les gradients de vitesse moyenne varient peu sur la région autour de \mathbf{x} où les corrélations en deux points sont non-nulles. On peut alors limiter le développement (3.11) à l'ordre 0 et le terme rapide s'écrit :

$$\phi_{ij}^2(\mathbf{x}) = \frac{\partial U_l}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \overline{\frac{\partial u_m}{\partial x_l}(\mathbf{x}') \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right)} \frac{dV(\mathbf{x}')}{2\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \quad (3.12)$$

La modélisation de ϕ_{ij}^2 se résume alors au choix d'un tenseur d'ordre quatre a_{ijml} tel que :

$$\phi_{ij}^2 = \frac{\partial U_l}{\partial x_m} (a_{ijml} + a_{jiml}) \quad (3.13)$$

Naot *et al.* [113] ont montré, à partir d'une analyse des corrélations en deux points, que la forme la plus simple de ϕ_{ij}^2 est :

$$\phi_{ij}^2 = -C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij}) \quad (3.14)$$

Ce modèle, dit *modèle IP*², a été repris ultérieurement par différents auteurs, comme par exemple : Launder *et al.* [81], Gibson & Launder [45], Shikazono & Kasagi [139]. Il est également de loin le plus utilisé dans les codes industriels, associé au modèle de Rotta pour le terme lent³.

Cependant, cette forme est un peu trop simplifiée pour rendre compte des différentes situations rencontrées dans la pratique. En fait, on peut montrer [46] que la forme la plus générale de ϕ_{ij}^2 est :

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^2 = & C_2 P a_{ij} + C_3 k S_{ij} + \\ & C_4 k (a_{ik} S_{jk} + a_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{kl} \delta_{ij}) + \\ & C_5 k (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}) + \\ & C_6 k (a_{ik} a_{kl} S_{jl} + a_{jk} a_{kl} S_{il} - 2 a_{kj} a_{li} S_{kl} - 3 a_{ij} a_{kl} S_{kl}) + \\ & C_7 k (a_{ik} a_{kl} \Omega_{jl} + a_{jk} a_{kl} \Omega_{il}) + \\ & C_8 k \left[a_{nm} a_{nm} (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}) + \frac{3}{2} a_{mi} a_{nj} (a_{mk} \Omega_{nk} + a_{nk} \Omega_{mk}) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

2. IP pour *isotropization of production*.

3. N3S, par exemple, développé à EDF [3].

où $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial U_i/\partial x_j + \partial U_j/\partial x_i)$ et $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial U_i/\partial x_j - \partial U_j/\partial x_i)$ sont respectivement le taux de déformation moyenne et la vorticité moyenne. Encore une fois, certaines contraintes, comme la réalisabilité ou l'objectivité [159], permettent de guider le choix des constantes apparaissant dans (3.15). Certains modèles sont linéaires ($C_6 = C_7 = C_8 = 0$), comme le second modèle proposé par Launder *et al.* [81] (modèle dit *QI*, pour *Quasi-Isotropisation*), pour lequel :

$$C_2 = 0 ; C_3 = 0,8 ; C_4 = 0,873 ; C_5 = 0,655 \quad (3.16)$$

Le modèle de Speziale *et al.* [148] (modèle *SSG*), ne contient également que des termes linéaires, mais introduit des non-linéarités au travers du coefficient C_3 qui dépend du deuxième invariant du tenseur d'anisotropie :

$$C_2 = 0,9 ; C_3 = 0,8 - 0,625\sqrt{A_2} ; C_4 = 0,625 ; C_5 = 0,2 \quad (3.17)$$

Il est donc dit *quasi-linéaire*.

Shih & Lumley [136] montrent que, pour assurer la réalisabilité du modèle, on doit retenir des termes quadratiques. Leur modèle s'écrit sous la forme (3.15), avec les seuls coefficients non-nuls :

$$C_3 = 0,8 ; C_4 = 0,6(1 + 0,8\sqrt{A}) ; C_6 = 0,2 ; C_7 = 0,2 \quad (3.18)$$

D'autres modèles sont également quadratiques, comme par exemple : Hanjali  & Launder [48], Zeman & Lumley [168].

Enfin, certains auteurs retiennent également le terme cubique. Les modèles sont alors en général conçus de manière à pouvoir être intégrés jusqu'aux parois : nous reviendrons donc sur ces modèles au § 3.1.2.

Correction dans la zone logarithmique. Les modèles des termes lent et rapide présentés plus haut ne sont pas applicables jusqu'à la paroi. Ils sont donc couplés soit avec des fonctions de paroi, suivant la technique décrite au § 1.3.1, soit avec des modèles à longueur de mélange ou à viscosité turbulente près de la paroi. Dans tous les cas, le modèle du terme de pression est utilisé sur au moins une partie de la zone logarithmique. Or, la plupart des modèles de ϕ_{ij}^1 et ϕ_{ij}^2 sont calibrés par rapport à des écoulements libres. Ils ont alors tendance à surestimer la redistribution d'énergie turbulente dans la zone logarithmique. En effet, même si les effets dus   la viscosité ne se font pas sentir, le blocage, lui, induit un amortissement de la redistribution (cf. § 2.2). Les modèles haut-Reynolds nécessitent donc en général des corrections pour pouvoir être appliqués en association, par exemple, avec des fonctions de paroi. Une exception notable est le

modèle SSG qui est spécifiquement construit pour prédire correctement l'intensité de la redistribution en écoulements libres et en zone logarithmique, grâce à son coefficient C_3 variable, propriété unique parmi tous les modèles.

L'amortissement de la redistribution dans la zone logarithmique est donc en général prise en compte par des termes d'écho de paroi, qui sont supposés prendre en compte l'influence de l'intégrale de surface dans (3.2) (voir § 2.2 pour la mise en cause de la justification théorique de ces termes). Les premières propositions de tels termes sont dus à Shir [141], mais la forme adoptée par la plupart des auteurs est celle de Gibson & Launder [45]:

$$\phi_{ij}^{1p} = C_1^p \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i} n_k n_j - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j} n_k n_i \right) f \left(\frac{L_T}{d} \right) \quad (3.19)$$

$$\phi_{ij}^{2p} = C_2^p \left(\phi_{km}^2 n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ki}^2 n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{kj}^2 n_k n_i \right) f \left(\frac{L_T}{d} \right) \quad (3.20)$$

où $L_T = k^{3/2}/\varepsilon$ est l'échelle de longueur turbulente et d la distance du point à la paroi. f est choisi de telle manière que $f = 1$ dans la zone logarithmique et $f = 0$ en écoulement libre.

Ces termes se sont avérés très utiles dans de nombreux écoulements simples. Ils ont l'intéressante propriété d'être non-locaux, puisque dépendant explicitement de la distance à la paroi, rétablissant ainsi une propriété essentielle du terme de pression. Cependant, leur dépendance en d les rend difficiles à utiliser en pratique, dans les écoulements industriels en géométrie complexe⁴.

3.1.1.2 Taux de dissipation

Nous avons vu plus haut que la partie déviatorique du tenseur de dissipation ε_{ij} est en général considérée comme « absorbée » par le modèle de ϕ_{ij}^1 . Par conséquent, seul le taux de dissipation ε reste à modéliser. Sans quasiment d'exception, tous les auteurs utilisent l'équation de transport suivante, dérivée de celle utilisée dans le cadre des modèles à viscosité turbulente (cf. § 3.2):

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) \quad (3.21)$$

4. En pratique, de façon assez arbitraire, on prend pour d le minimum de la distance à toutes les parois.

3.1.1.3 Diffusion turbulente

Les corrélations triples intervenant dans D_{ij}^T sont en général modélisées à l'aide d'une hypothèse de gradient généralisée due à Daly & Harlow [28] :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \quad (3.22)$$

Cependant, cette expression n'est pas invariante par changement des axes du repère, ce qui a conduit divers auteurs à proposer d'autres modèles, comme, par exemple, Mellor & Herring [105] :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) \quad (3.23)$$

ou Hanjalić & Launder [48] :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{u_i u_l}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) \quad (3.24)$$

D'autres modèles plus élaborés existent, comme ceux proposés par Lumley [97] et Magnaudet [101].

Le modèle (3.23) utilise le concept de viscosité turbulente, ce qui est un peu trop restrictif dans le cadre d'un modèle au second ordre. C'est pourquoi, en pratique, c'est presque toujours l'un des modèles (3.22) et (3.24) qui est utilisé. Cependant, (3.24) introduit un grand nombre de termes supplémentaires par rapport à (3.22), et n'apporte en général pas d'amélioration significative. C'est pourquoi, dans les codes industriels, c'est la plupart du temps (3.22) qui est utilisé.

3.1.1.4 Diffusion par la pression

De la même manière que pour le déviateur du tenseur de dissipation et le terme lent, il a été très difficile, jusqu'à l'apparition de la simulation directe, de distinguer les effets dus à la diffusion par la pression D_{ij}^p de ceux dus à la diffusion turbulente. De plus, loin des parois, D_{ij}^p est en général très faible et il a souvent un effet à l'opposé de la diffusion turbulente (figure 2.11). Par conséquent, la pratique courante consiste à considérer que le modèle de D_{ij}^T prend en compte l'effet de diffusion globale $D_{ij}^T + D_{ij}^p$.

3.1.2 Extension vers la paroi

Les modèles des différents termes de l'équation de transport des tensions de Reynolds introduits à la section précédente sont valables *a priori* uniquement loin des

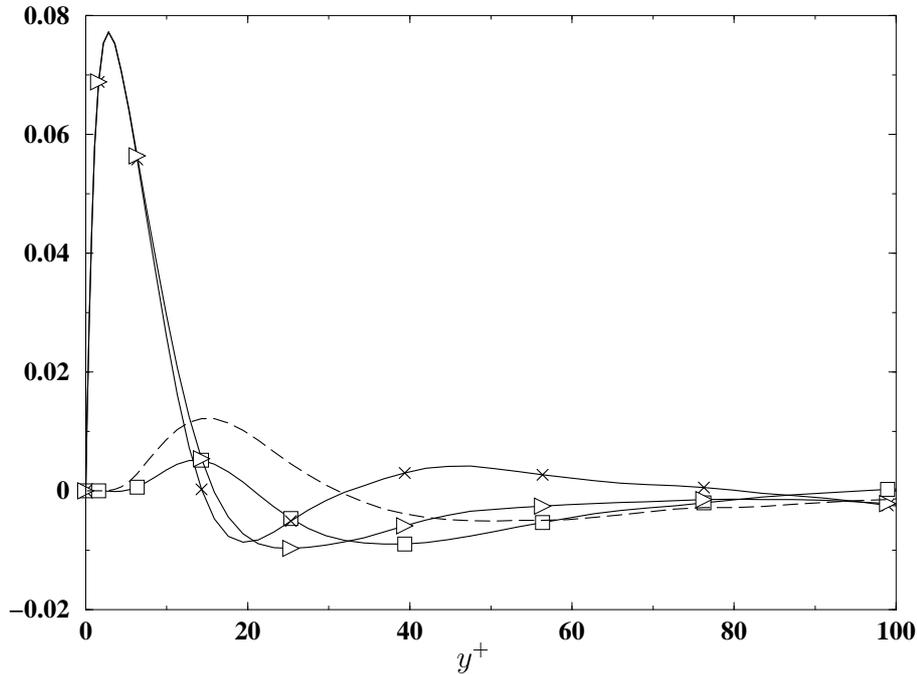


FIG. 3.1 – Test a priori du modèle de diffusion turbulente de Daly & Harlow. DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. \square D_{22}^T donné par la DNS; \times D_{22}^p donné par la DNS; \triangleleft $D_{22}^T + D_{22}^p$ donné par la DNS; --- D_{22}^T donné par le modèle de Daly & Harlow.

parois, ou jusqu'à la zone logarithmique pour des modèles avec termes d'écho de paroi ou pour le SSG. Cependant, pour de nombreuses raisons, exposées au premier chapitre, il est souhaitable de disposer de modèles que l'on puisse intégrer jusqu'à la paroi. Nous allons étudier, dans cette section, les modifications à introduire, si nécessaire, pour étendre le domaine de validité des modèles.

3.1.2.1 Diffusion moléculaire

La première modification, la plus évidente, est qu'il faut prendre en compte la diffusion moléculaire puisque la viscosité joue un rôle prépondérant dans la sous-couche visqueuse. Ce terme ne nécessite aucune modélisation, puisqu'il ne fait pas intervenir de grandeurs inconnues.

3.1.2.2 Diffusion turbulente

Les équations de transport des corrélations triples font intervenir directement la viscosité. On pourrait donc penser qu'il est nécessaire de modifier la modélisation de

D_{ij}^T . Cependant, dans la zone logarithmique, la diffusion turbulente joue peu, car elle est faible devant les termes de production ou de redistribution, et par les termes de dissipation (cf. figures 2.7–2.10). Dans la sous-couche visqueuse, on a vu au § 2.3.3 que la diffusion turbulente devenait négligeable devant la diffusion moléculaire. Il n'est donc pas nécessaire de modifier le modèle dans cette zone, pourvu qu'il donne un résultat négligeable à proximité de la paroi. Le test *a priori*⁵ présenté sur la figure 3.1 montre que le modèle de Daly & Harlow (ou, ce qui dans un canal revient au même à un coefficient près, le modèle d'Hanjalić & Launder) tend bien vers zéro à la paroi : D_{22}^T se comporte comme y^2 , au lieu de y^5 , mais reste de toute façon négligeable devant les termes D_{ij}^p , ε_{ij} et ϕ_{ij}^* (cf. tableau 2.1).

En revanche, la figure 3.1 montre très clairement qu'on ne peut plus, près de la paroi, considérer que le terme de diffusion par la pression est contenu dans le modèle de D_{ij}^T . Dès lors, il est nécessaire de modéliser spécifiquement D_{ij}^p .

3.1.2.3 Diffusion par la pression

Malgré la remarque précédente, la plupart des auteurs n'introduisent aucune modification dans leurs modèles pour prendre en compte la diffusion par la pression (2.39) près de la paroi, ce qui semble parfaitement incohérent. Cependant, on peut remarquer que l'apparition d'une importante diffusion par la pression dans l'équation de transport de $\overline{v^2}$ est un artefact dû à la décomposition de ϕ_{ij}^* (cf. figures 2.8 et 2.11). On peut observer un pic de D_{22}^p aux alentours de $y^+ = 3$ (figure 2.11), auquel correspond un pic négatif de ϕ_{22} , dont il n'y a aucune trace dans le terme original ϕ_{22}^* . Par conséquent, ne pas prendre en compte ni la diffusion par la pression, ni le pic négatif de ϕ_{22} revient à modéliser ces deux termes ensemble. On voit donc que, en ne se souciant pas de D_{ij}^p , les modélisateurs considèrent, semble-t-il inconsciemment, que ce terme est englobé dans le modèle de ϕ_{ij} près des parois⁶, et dans le modèle de D_{ij}^T loin de celles-ci. Il existe donc un certain flou artistique qui entoure la modélisation de ce terme, qui fait partie du « folklore » de la décomposition de ϕ_{ij}^* en partie redistributive et partie diffusive.

Quelques rares auteurs, cependant, ont tenté de modéliser directement D_{ij}^p . Tout d'abord, Lumley a proposé d'utiliser simplement :

$$\overline{u_i p} = -C \overline{u_i u_k u_k} \quad (3.25)$$

où $\overline{u_i u_k u_k}$ est évalué par l'une des équations proposées au § 3.1.1.3. Demuren *et al.* [31]

5. *A priori* signifie ici que l'expression algébrique de D_{ij}^T est évaluée à partir des données de la DNS pour toutes les variables ($\overline{u_i u_j}$, k , ε).

6. Celui-ci devient alors un modèle de ϕ_{ij}^* .

remarquent que, à l'instar de ϕ_{ij} , D_{ij}^p peut être décomposé en parties lente et rapide, et que le modèle (3.25), indépendant du gradient de vitesse moyenne, ne peut pas représenter la partie rapide. Ils proposent donc d'utiliser (3.25) pour la partie lente, comme terme source d'une équation de relaxation elliptique (voir § 4.1 pour la description de ce type de méthodes). Pour le terme rapide, ils introduisent la forme suivante :

$$D_{ij}^p = C \overline{u_i u_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \delta_{jk} + C \overline{u_j u_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \delta_{ik} \quad (3.26)$$

Enfin, signalons, pour mémoire, une autre proposition, celle de Craft [20], qui utilise la décomposition (2.45) de ϕ_{ij}^* , le terme $\frac{1}{2} \phi_{mm}^* = -(1/\rho) \partial(\overline{p u_m}) / \partial x_m$ étant déduit du modèle suivant :

$$\begin{aligned} \overline{p u_k} &= -\rho (0,5 d_m + 1,1 d_m^A) (\nu \varepsilon k A A_2)^{1/2} \\ &\times \left[\left(1,0 + 2,0 \exp\left(-\frac{Re_T}{40}\right) \right) A_2 + 0,4 Re_T^{-1/4} \exp\left(-\frac{Re_T}{40}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

avec

$$d_m = \frac{N_i}{0,5 + (N_k N_k)^{0,5}} \quad \text{où} \quad N_k = \frac{\partial(k^{3/2} \varepsilon^{-1})}{\partial x_k} \quad (3.28)$$

et

$$d_m^A = \frac{N_i^A}{0,5 + (N_k^A N_k^A)^{0,5}} \quad \text{où} \quad N_k^A = \frac{\partial(k^{3/2} A^{1/2} \varepsilon^{-1})}{\partial x_k} \quad (3.29)$$

3.1.2.4 Tenseur de dissipation

Malgré l'importance, démontrée au § 2.3.3, de l'anisotropie de ε_{ij} au voisinage de la paroi, et le fait qu'elle doit être reproduite de manière précise pour assurer le bon équilibre des bilans des tensions de Reynolds et ainsi rendre possible la bonne restitution par les modèles des comportements asymptotiques de ces dernières, certains auteurs continuent, en développant des modèles bas-Reynolds, à considérer que le déviateur de ε_{ij} est contenu dans le modèle de la partie lente du terme de pression. C'est le cas notamment de Shima [140], Launder & Shima [84] et Launder & Li [80].

Cependant, la plupart des modèles tentent de prendre en compte cette anisotropie en fonction de celle des tensions de Reynolds. L'ensemble des modèles proposés peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} (1 - f_s) + f_s F \varepsilon_{ij}^* \quad (3.30)$$

où ε_{ij}^* est la forme limite que doit prendre ε_{ij} au voisinage de la paroi ; f_s est une fonction de pondération qui vaut 1 à la paroi et tend vers 0 au loin, permettant au modèle de passer de sa forme limite à la forme isotrope $\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$; et F est une fonction

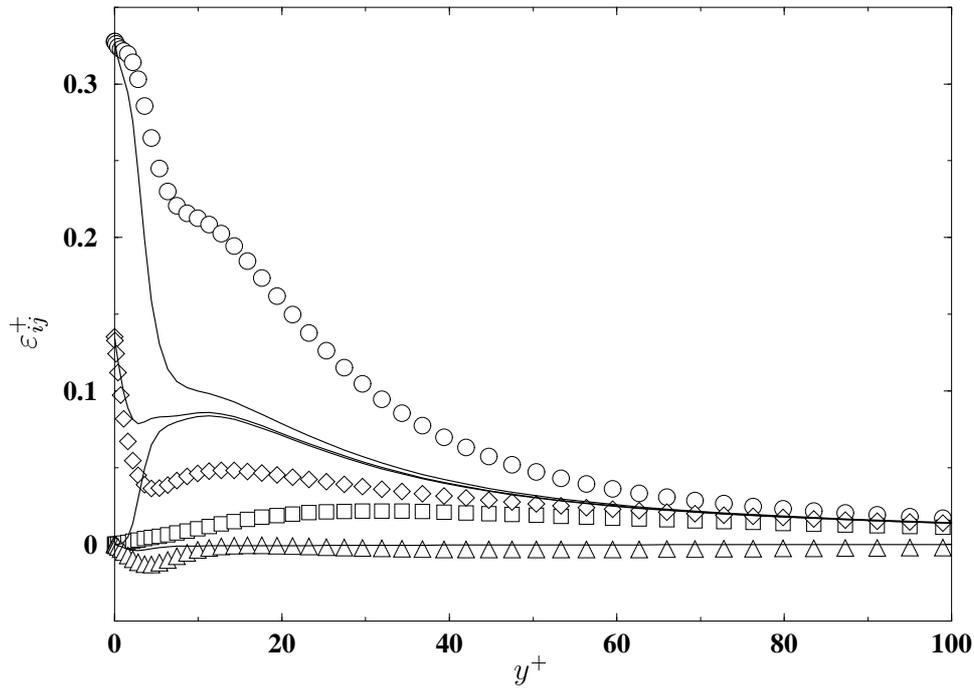


FIG. 3.2 – *Test a priori du modèle de Hanjalić & Launder [49] pour le tenseur de dissipation. DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. Symboles : ϵ_{ij} donné par la DNS. \circ ϵ_{11} ; \square ϵ_{22} ; \diamond ϵ_{33} ; \triangle ϵ_{12} . Lignes : résultats a priori donnés par le modèle.*

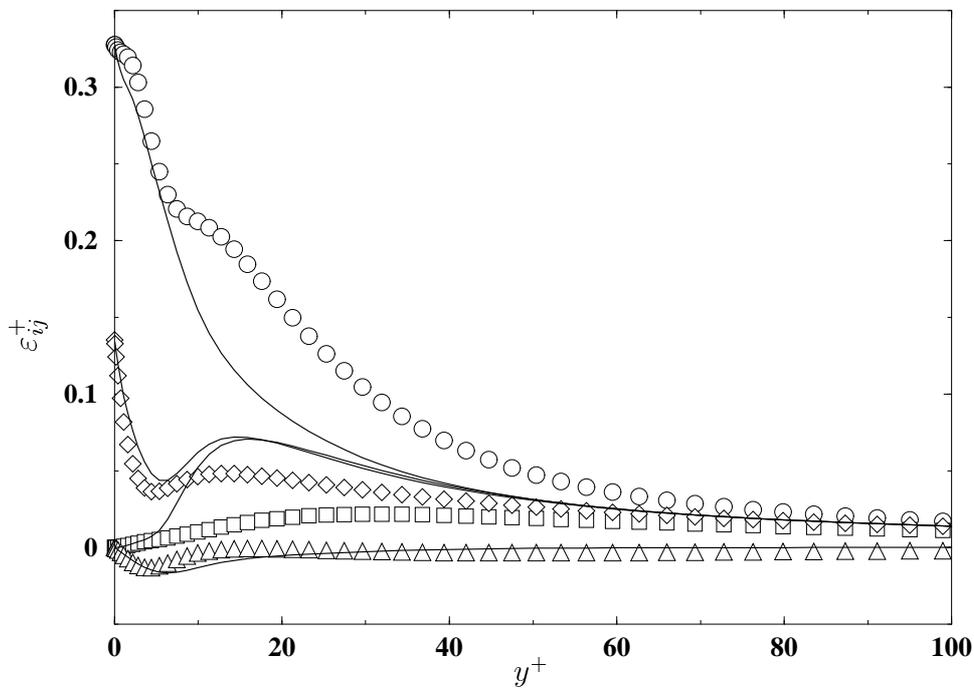


FIG. 3.3 – *Même figure que 3.2 pour le modèle de Lai & So [73].*

éventuellement introduite pour s'assurer que le modèle se contracte correctement en tout point : $\frac{1}{2}\varepsilon_{kk} = \varepsilon$.

La première proposition pour ε_{ij}^* est due à Rotta [131] et consiste simplement à relier le tenseur de dissipation au tenseur de Reynolds par :

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon \quad (3.31)$$

Cette formulation est utilisée (Hanjalić & Launder [49], Prud'homme & Elghobashi [127]) avec la fonction $f_s = \left(1 + \frac{1}{10} Re_T\right)^{-1}$. Ce modèle se contractant de manière exacte ($\frac{1}{2}\varepsilon_{kk} = \varepsilon$), la fonction F est prise égale à 1. La figure 3.2 montre les résultats *a priori* obtenus avec le modèle de Hanjalić & Launder [49]. On peut voir que ce modèle donne, du moins *visuellement*, un comportement correct à la paroi des composantes diagonales du tenseur de dissipation. De même, au loin, le passage du modèle à la forme isotrope permet une bonne prédiction de ε_{ij} au-delà de $y^+ = 60$. En revanche, on peut voir que dans la zone tampon, entre $y^+ = 5$ et $y^+ = 60$, l'anisotropie du tenseur n'est pas reproduite. De plus, le modèle prédit très mal le comportement de ε_{12} dans la sous-couche visqueuse. Ceci est une conséquence du mauvais comportement asymptotique de ce modèle, qui n'apparaît pas de manière évidente sur la figure. En effet, en canal, le tableau 2.1 donne à la paroi les valeurs limites suivantes :

$$\frac{\overline{u^2}}{k} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{11}} = 1 \quad ; \quad \frac{\overline{v^2}}{k} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{22}} = 4 \quad ; \quad \frac{\overline{w^2}}{k} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{33}} = 1 \quad ; \quad \frac{\overline{uv}}{k} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{12}} = 2 \quad (3.32)$$

tandis que le modèle prédit des rapports égaux à 1 pour toutes les composantes.

Pour corriger ces mauvais comportements asymptotiques, Launder & Reynolds [82] ont proposé la forme suivante :

$$\varepsilon_{ij}^* = (\overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_k} n_j n_k + \overline{u_j u_k} n_i n_k + \overline{u_k u_l} n_k n_l \delta_{ij}) \frac{\varepsilon}{k} \quad (3.33)$$

qui a l'avantage de donner exactement les bons rapports (3.32). En revanche, sa contraction donne :

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ii}^* = \left(1 + \frac{5}{2} \frac{\overline{u_k u_l}}{k} n_k n_l\right) \varepsilon \quad (3.34)$$

problème résolu facilement par Kebede *et al.* [60] en utilisant la fonction :

$$F = \left(1 + \frac{5}{2} \frac{\overline{u_k u_l}}{k} n_k n_l\right)^{-1} \quad (3.35)$$

La fonction de pondération utilisée avec ce modèle (Kebede *et al.* [60], So & Yoo [142]) est $f_s = \exp(-Re_T/40)$.

Une formulation légèrement différente a été proposée par Launder & Tselepidakis [85], en remplaçant simplement dans ε_{ij}^* le delta de Kronecker δ_{ij} par $n_i n_j$:

$$\varepsilon_{ij}^* = (\overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_k} n_j n_k + \overline{u_j u_k} n_i n_k + \overline{u_k u_l} n_k n_l n_i n_j) \frac{\varepsilon}{k} \quad (3.36)$$

Ce tenseur se contracte en :

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ii}^* = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\overline{u_k u_l}}{k} n_k n_l \right) \varepsilon \quad (3.37)$$

ce qui conduit à choisir :

$$F = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\overline{u_k u_l}}{k} n_k n_l \right)^{-1} \quad (3.38)$$

Cette formulation a été utilisée par Launder & Tselepidakis avec $f_s = \exp(-20A^2)$, et par Lai & So [73] avec $f_s = \exp[-(Re_T/150)^2]$. La figure 3.3 montre les résultats *a priori* obtenus avec le modèle de Lai & So. On peut voir que les comportements de toutes les composantes de ε_{ij} sont très satisfaisants dans la sous-couche visqueuse, et pratiquement jusqu'à $y^+ = 15$. En revanche, dans la zone tampon entre $y^+ = 15$ et $y^+ = 60$, il n'y a pas de nette amélioration par rapport au modèle de Hanjalić & Launder.

Le principal défaut des formulations (3.33) et (3.36) est leur dépendance en la normale à la paroi, qui peut être mal définie dans des cas à géométrie complexe. C'est pourquoi Craft & Launder [24] ont proposé un modèle qui ne fait référence à aucune données géométriques. Ce modèle est trop complexe pour être reproduit ici.

3.1.2.5 Taux de dissipation

Le tenseur de dissipation ε_{ij} étant exprimé en fonction du taux de dissipation ε , il reste à construire un modèle pour ce dernier, valable jusqu'à la paroi. Cette question est encore à l'heure actuelle un sujet de recherche et de controverse. Il s'agit de l'un des points les plus délicats de la modélisation de la turbulence, dans la mesure où il est très difficile d'interpréter physiquement l'équation de transport exacte de ε et de modéliser ses termes un par un. C'est également le point qui est le plus souvent considéré comme le point faible de la modélisation au second ordre. D'innombrables directions ont été explorées, menant à des modèles parfois très élaborés. Une très bonne revue en est donnée par Hanjalić [46]. Nous allons simplement nous intéresser aux modifications apportées au modèle haut-Reynolds (3.21) les plus simples et les plus employées.

Le premier point, le plus évident, est qu'il faut prendre en compte le terme de diffusion moléculaire de ε . L'équation (3.21) devient alors :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} \quad (3.39)$$

Ensuite, dans un cas de décroissance de turbulence de grille, cette équation se réduit à :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.40)$$

Les mesures [17] montrent que l'énergie turbulente décroît en t^{-n} . Or, (3.40) prédit également une décroissance en t^{-n} , avec $n = (C_{\varepsilon_2} - 1)^{-1}$, ce qui permet de calibrer le coefficient C_{ε_2} . Cependant, les mesures montrent aussi qu'en fin de décroissance, le nombre de Reynolds devenant très faible, la viscosité se fait sentir plus fortement et l'indice n de décroissance devient plus fort, passant de 1,2 à 2,5. La solution à ce problème a été proposée par Hanjalić & Launder [49] : il suffit d'introduire en facteur de C_{ε_2} une fonction f_{ε_2} dépendant du nombre de Reynolds turbulent. L'équation (3.39) devient alors :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon_2} f_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} \quad (3.41)$$

Hanjalić & Launder utilisent par exemple $f_{\varepsilon_2} = 1 - \frac{2}{9} \exp(-Re_T^2/6^2)$.

Cependant, une autre modification du terme de décroissance de la dissipation est rendue nécessaire par le fait que, à la paroi, ε^2/k tend vers l'infini. La solution la plus simple est de définir $\tilde{\varepsilon}$ par :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_m \partial x_m} \quad (3.42)$$

ou

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_m} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_m} \quad (3.43)$$

On peut alors remplacer dans (3.41) ε^2/k par $\varepsilon \tilde{\varepsilon}/k$, qui tend vers zéro à la paroi. L'équation (3.41) prend alors la forme :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon_2} f_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} \quad (3.44)$$

Cette équation doit être associée à l'une des conditions aux limites (2.34), (2.35) ou (2.36). De nombreux auteurs, suivant une idée introduite par Launder & Sharma [83] dans le cadre d'un modèle à viscosité turbulente, préfèrent écrire directement une équation de transport pour $\tilde{\varepsilon}$, obtenue en remplaçant tous les ε par des $\tilde{\varepsilon}$ dans (3.41). La condition aux limites à la paroi devient alors $\tilde{\varepsilon} = 0$.

Enfin, au voisinage de la paroi, deux termes de génération par le champ de vitesse moyenne apparaissant dans l'équation de transport exacte de ε et qui sont négligés à haut-Reynolds ne peuvent plus l'être [49]. Cette nécessité a été confirmée de manière

flagrante par les premières simulations directes : on s'est aperçu que la dissipation subissait une très forte croissance dans la sous-couche visqueuse et atteignait son maximum à la paroi, alors qu'on croyait auparavant, faute de pouvoir la mesurer dans cette région, qu'à l'approche de la paroi la dissipation décroissait légèrement [114, 123]. Pour prendre en compte le premier des deux termes de génération supplémentaire, Hanjalić & Launder [49] proposent de faire varier C_{ε_1} , ce qui revient à le multiplier par une fonction f_{ε_1} . Le second des deux termes est quant à lui modélisé par un terme E ajouté à (3.44), qui devient :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon_1} f_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon_2} f_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} + E \quad (3.45)$$

f_{ε_1} peut être choisi comme une fonction de Re_T , comme suggéré par Hanjalić & Launder [49]. Shima [140] utilise, par exemple, $f_{\varepsilon_1} = 1 + \exp(-Re_T^2/64^2)$. Pour E , Hanjalić & Launder [49] proposent :

$$E = C_{\varepsilon_3} \nu \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_j u_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l} \quad (3.46)$$

D'autres, à la suite de Shima [140], considèrent que l'augmentation de $C_{\varepsilon_1} f_{\varepsilon_1}$ à la paroi suffit à prendre en compte les deux termes de génération supplémentaires et choisissent donc $E = 0$.

3.1.2.6 Terme de pression

De nombreux auteurs, comme par exemple Hanjalić & Launder [49], Prud'homme & Elghobashi [126], Kebede *et al.* [60], So & Yoo [142], n'introduisent pas d'autre modification que les termes d'écho de paroi et considèrent que le modèle haut-Reynolds du terme de pression peut être intégré tel quel jusqu'à la paroi. La justification en est que dans l'expression intégrale (3.2) de ϕ_{ij} , la viscosité n'intervient pas explicitement.

Cependant, les comportements des modèles haut-Reynolds près des parois sont totalement en contradiction avec le comportement réel. On peut en effet observer sur la figure 3.4 que le modèle constitué du terme lent de Rotta et du terme rapide IP prédit très mal la redistribution dans la zone de paroi. Notamment, le terme lent induit un mauvais comportement asymptotique du modèle global, qui tend vers une valeur finie à la paroi ($\phi_{22}^1 \rightarrow \frac{2}{3} C_1 \varepsilon$, alors qu'il devrait tendre vers 0 comme y). Le terme rapide, quant à lui, tend bien vers 0, mais passe par un maximum positif vers $y^+ = 11$, correspondant au maximum de la production, alors que dans cette région, la redistribution ϕ_{22} est négative. L'introduction des termes d'écho de paroi (figure 3.5) s'avère bénéfique,

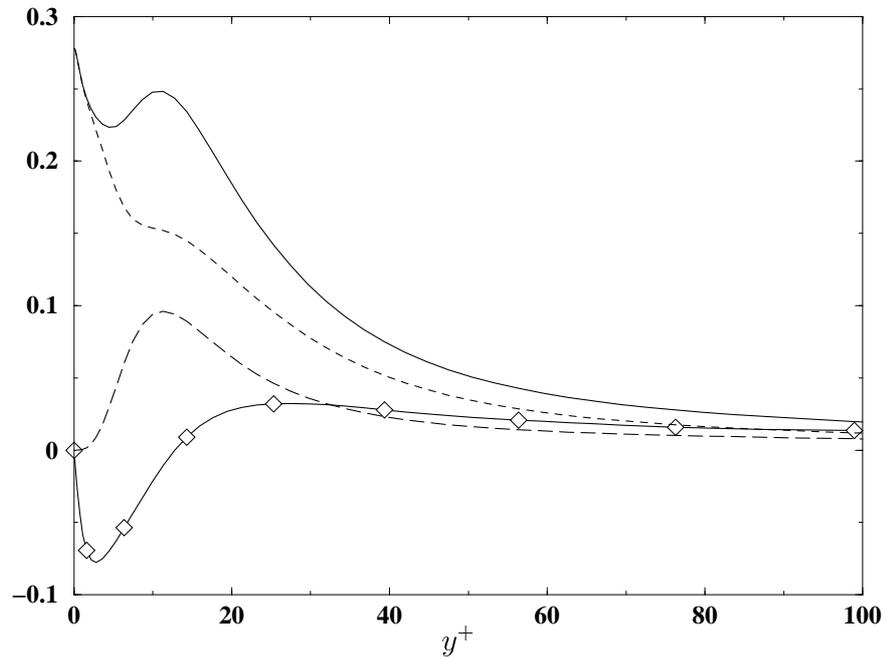


FIG. 3.4 – *Test a priori du modèle du terme de redistribution dit modèle Rotta+IP. DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. $\diamond \Phi_{22}$ donné par la DNS; ---- Φ_{22}^1 donné par le modèle de Rotta; -.- Φ_{22}^2 donné par le modèle IP; — Φ_{22} donné par le modèle Rotta+IP (somme des deux précédents).*

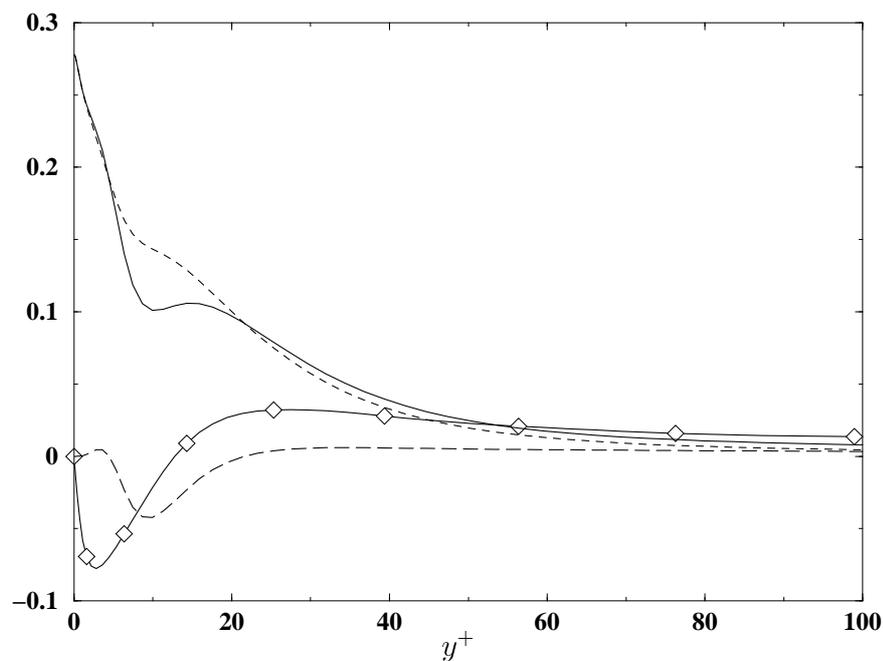


FIG. 3.5 – *Même figure que 3.4 pour le modèle de Gibson & Launder [45] (modèle Rotta + IP avec termes d'écho de paroi).*

notamment sur le terme rapide, mais ne suffit pas à corriger le mauvais comportement asymptotique du modèle.

C'est pourquoi de nombreux auteurs introduisent des fonctions d'amortissement dans les modèles. Cette méthode consiste simplement à multiplier les termes lent, rapide et d'écho de paroi par des fonctions de la distance à la paroi, du nombre de Reynolds turbulent ou des invariants du tenseur d'anisotropie. Ceci permet d'amortir la redistribution dans la zone de paroi, et en particulier de forcer le terme lent à tendre vers 0. Shima [140], par exemple, remplace le coefficient C_1 du modèle de Rotta par $C_1^* = C_1 [1 - (1 - 1/C_1)f_w]$, où $f_w = \exp[-(0,015\sqrt{ky}/\nu)^4]$, mais utilise sans modification le terme rapide de Launder *et al.* [81] (modèle QI). Launder & Shima [84] remplacent les deux coefficients des termes lent et rapide respectivement par

$$C_1 = 1 + 2,58AA_2^{1/4} \left[1 - \exp\left(- (0,0067Re_T)^2\right) \right] \quad (3.47)$$

et

$$C_2 = 0,75A^{1/2}. \quad (3.48)$$

Dans une approche plus récente, dont l'UMIST⁷ s'est fait la spécialité, le bon comportement n'est pas imposé par des fonctions d'amortissement, mais par la prise en compte de tous les termes des formulations générales (3.8) et (3.15) des termes lent et rapide. Il existe plusieurs versions de ces modèles dits *cubiques*. Leur philosophie commune est d'éliminer, autant que possible, toute référence explicite à la géométrie (distance à la paroi, normales, etc.), et notamment les termes d'écho de paroi.

Un premier modèle cubique, relativement simple, a été proposé par Launder & Tselepidakis [86], dans lequel les termes d'écho de paroi étaient rendus inutiles par le remplacement, dans la partie rapide de la corrélation pression-déformation, du gradient de vitesse moyenne par un gradient *effectif*, défini par

$$\left. \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right|_{\text{eff}} = \frac{\partial U_l}{\partial x_m} + c_I l_n \frac{\partial l_n}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_l}{\partial x_k \partial x_m} \quad (3.49)$$

où $l_n = (k/\varepsilon)(\overline{u_p u_q n_p n_q})^{1/2}$ est une échelle de longueur scalaire caractéristique de la direction normale à la paroi : l_n contient encore une référence explicite à la géométrie. Launder & Li [80], tout en construisant un modèle cubique plus complexe, ont repris cette idée de gradient de vitesse effectif, mais ont supprimé la référence géométrique grâce à la formulation:

$$\left. \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right|_{\text{eff}} = \frac{\partial U_l}{\partial x_m} + c_I L_T^2 \frac{\partial f(A)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_l}{\partial x_k \partial x_m} \quad (3.50)$$

7. University of Manchester Institute of Science and Technology.

où $L_T = k^{3/2}/\varepsilon$ est l'échelle de longueur turbulente et $f(A) = A^{0,3}(1 + 2,5A^3)$. On peut montrer (cf. annexe C) que cette approche permet d'obtenir dans la zone logarithmique un amortissement de la redistribution comparable à celui donné par les termes d'écho de paroi.

Enfin, le modèle le plus élaboré, développé depuis une dizaine d'années à l'UMIST, est le modèle dit *TCL*, pour *two component limit*⁸, construit de manière à reproduire correctement l'état de la turbulence dans la limite à deux composantes, qu'elle atteint en particulier au voisinage d'une paroi (voir par exemple Craft & Launder [25] ou, plus récemment, Craft *et al.* [22]). Dans ce modèle n'apparaît aucune référence explicite à la géométrie. Suivant l'idée de Launder & Tselepidakis [86], les termes d'écho de paroi sont remplacés par des termes correctifs dits *inhomogènes*, dans lesquels la direction d'inhomogénéité est identifiée grâce au gradient de l'échelle de longueur turbulente.

3.1.3 Analyse critique des modèles classiques

La modélisation au second ordre, même si elle est une simplification drastique de la turbulence, tronquant à l'ordre deux une hiérarchie infinie d'équations, est à l'heure actuelle la seule approximation qui soit à la fois riche du point de vue du contenu physique et utilisable dans un contexte industriel. Notamment, sa supériorité, du moins en théorie, sur les modèles à viscosité turbulente est rarement mise en cause. Elle permet en particulier de prédire les effets de contraintes « extérieures » sur la turbulence, comme par exemple ceux dus à la courbure des lignes de courant, à la rotation d'ensemble ou à la stratification thermique, et permet de rendre compte des effets de l'anisotropie, comme les écoulements secondaires, ou encore le retard de réaction de la turbulence à un changement brusque de l'écoulement moyen.

Pour toutes ces raisons, dans certains écoulements complexes, le passage d'un modèle à viscosité turbulente à un modèle au second ordre représente un véritable *saut technologique*. Cependant, de nombreux problèmes, tant du point de vue pratique que du point de vue théorique, restent encore à résoudre.

3.1.3.1 Problèmes de mise en œuvre

Tout d'abord, la communauté de la turbulence s'est heurtée au milieu des années 70, lors des premières tentatives d'implantation informatique de modèles au second ordre, à un véritable « mur numérique ». En effet, l'absence de l'effet stabilisateur de la viscosité turbulente et le fort couplage qui existe entre les composantes du tenseur de

8. Limite à deux composantes.

Reynolds rendent très difficile la résolution des équations de transport de ces dernières. Aujourd'hui, les méthodes numériques ont fortement progressé et ce problème a été en partie levé. Cependant, la mise en œuvre d'un modèle au second ordre dans un code industriel est toujours délicate, voire très difficile dans le cas de modèles bas-Reynolds.

De plus, l'utilisation d'un modèle au second ordre induit un surcoût par rapport à un modèle à viscosité turbulente. Même dans le cas des modèles haut-Reynolds, couplés à des fonctions de paroi, le nombre d'équations supplémentaires introduites et la difficulté plus grande à obtenir une solution convergée incite souvent les utilisateurs industriels à se contenter des résultats donnés par un simple $k-\varepsilon$.

Enfin, le surcoût peut devenir prohibitif lorsqu'on a besoin de modèles bas-Reynolds. En effet, alors qu'avec un $k-\varepsilon$ de type Launder & Sharma [83] le premier point de calcul à l'intérieur du domaine doit se situer aux alentours de $y^+ = 1$, ce qui est déjà très contraignant dans les cas industriels, un modèle au second ordre bas-Reynolds exige souvent un premier point aux alentours de $y^+ = 0,1$ (cf. [91]).

Ces difficultés ont tendance à freiner l'utilisation à grande échelle des modèles au second ordre, mais on peut espérer qu'elles ne soient pas des obstacles rédhibitoires et que les progrès des algorithmes numériques et des performances des ordinateurs permettront d'en venir à bout. En revanche, nous allons voir que de nombreux problèmes de modélisation des phénomènes physiques sont encore à résoudre et sont l'objet d'une intense activité de recherche.

3.1.3.2 Difficultés à reproduire certains phénomènes

Les défauts des modèles au second ordre bas-Reynolds peuvent être illustrés par les problèmes rencontrés dans des écoulements à géométrie simple qui servent souvent d'*écoulements-tests* pour les nouveaux modèles : le canal, la marche descendante et le jet impactant.

Canal. Le premier écoulement, très simple, qui sert de premier examen de passage à un modèle, est le cas du canal, c'est-à-dire de l'écoulement stationnaire entre deux plaques planes infinies. Malgré le fait que les coefficients des modèles soient souvent choisis de manière à reproduire au mieux cet écoulement, de nombreux modèles, pour ne pas dire la plupart, ne donnent pas des résultats satisfaisants.

Le point le plus important et sur lequel les modèles butent le plus souvent est la reproduction fidèle du fort amortissement de la tension de Reynolds $\overline{v^2}$ normale à la paroi. Cet amortissement doit être reproduit dans la zone logarithmique, où l'effet de blocage (cf. § 2.2) induit une forte anisotropie de la turbulence (typiquement, $\overline{v^2}/\frac{2}{3}k = 0,37$) ;

et dans la sous-couche visqueuse, où $\overline{v^2}$ se comporte comme y^4 alors que $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$ se comportent comme y^2 (cf. § 2.3).

La plupart des modèles arrivent à reproduire l'anisotropie en zone logarithmique, grâce à l'utilisation de termes correctifs : termes d'écho de paroi le plus souvent (Kebede *et al.* [60], So & Yoo [142], Prud'homme & Elghobashi [127], Launder & Shima [84], Lai & So [73], etc.) ; corrections inhomogènes parfois (Launder & Tselepidakis [86], Launder & Li [80], Craft [20]). Signalons aussi le cas du modèle SSG [148], même s'il n'en existe pas de version bas-Reynolds, qui reproduit cette anisotropie en zone logarithmique sans introduire de termes supplémentaires dans le modèle de la redistribution, mais en rendant les coefficients dépendants du second invariant du tenseur d'anisotropie.

En revanche, peu de modèles reproduisent correctement le comportement asymptotique de $\overline{v^2}$. Il en résulte une forte surestimation de cette tension de Reynolds dans la sous-couche visqueuse et dans la zone tampon, et, conjointement, une sous-estimation du pic de $\overline{u^2}$. So *et al.*, en comparant les résultats de huit modèles différents, montrent que quatre d'entre eux (Hanjalić & Launder [49], Kebede *et al.* [60], So & Yoo [142], Prud'homme & Elghobashi [127]) surestiment fortement $\overline{v^2}$ dans la sous-couche visqueuse et la zone tampon, et donnent un profil de $\overline{u^2}$ quasiment plat, ne prédisant absolument pas son pic. L'analyse asymptotique montre alors que ces modèles induisent un comportement de $\overline{v^2}$ en y^2 . Deux autres modèles (Shima [140], Launder & Shima [84]) donnent le même comportement asymptotique mais parviennent à de meilleurs résultats sur l'anisotropie grâce à l'action des fonctions d'amortissement sur la redistribution. Seuls les modèles de Lai & So [73] et sa version modifiée par So *et al.* [143], construits explicitement sur des critères asymptotiques, permettent de retrouver le comportement de $\overline{v^2}$ en y^4 .

La raison principale de cette difficulté est que les modèles bas-Reynolds sont des extensions de modèles haut-Reynolds. Or, deux des principales hypothèses qui sous-tendent ces derniers sont largement incompatibles avec les écoulements de paroi. La première est l'hypothèse de quasi-homogénéité, qui consiste à supposer que le gradient de vitesse peut-être considéré comme localement constant (cf. § 3.1.1.1), et qui permet d'exprimer la partie rapide de la corrélation pression-déformation comme le produit du gradient de vitesse et d'un tenseur d'ordre quatre. Cette hypothèse ne peut évidemment pas s'appliquer dans un écoulement de proche paroi, où le gradient de vitesse subit des variations spatiales très brusques. Dans la zone logarithmique, l'écoulement n'est que faiblement inhomogène, ce qui explique que des corrections soit suffisantes. Mais dans la zone tampon et la sous-couche visqueuse, les modifications apportées ne suffisent

pas toujours à pallier le mauvais comportement du modèle dû à l'hypothèse quasi-homogène. La seconde hypothèse qui n'est pas compatible avec un écoulement de paroi est l'hypothèse de localité. En effet, nous avons vu au § 2.2 que la non-localité de la pression et par conséquent du terme de pression est à l'origine de l'effet de blocage. Avec un modèle local, la turbulence ne peut plus « sentir » la paroi, si ce n'est indirectement par l'inhomogénéité qu'elle induit. C'est de là que vient le succès, du moins en canal, des termes d'écho de paroi, qui rétablissent la non-localité à travers la dépendance en la distance à la paroi. Nous reviendrons au § 3.1.3.3 sur ces questions, car elles nous semblent être parmi les principaux problèmes de conception des modèles au second ordre.

Marche descendante. La marche descendante est très utilisée pour tester les modèles, car c'est le cas le plus simple d'écoulement décollé, le point de décollement étant fixé par la géométrie. Les principales caractéristiques difficiles à prédire sont la longueur de recirculation ℓ , le coefficient de frottement C_f et le rétablissement de la couche limite en aval de la zone de recirculation.

Aucun modèle au second ordre n'est à l'heure actuelle capable de reproduire correctement ces trois caractéristiques [70]. L'intensité de la recirculation, et donc C_f , sont souvent sous-estimés, en particulier pour les faibles nombres de Reynolds. Une comparaison détaillée des résultats de modèles de turbulence et de simulation directe [120, 121] montre que l'origine du problème est un défaut d'entraînement de la bulle de recirculation par le reste de l'écoulement. Aucune modification de coefficients tentée sur le modèle ne donne de résultats satisfaisant. Il y a donc là un véritable problème structural des modèles au second ordre, sans doute dû aux termes de transport turbulent, qui sont une approximation trop grossière des corrélations triples.

Enfin, aucun modèle n'est capable de prédire correctement le rétablissement de la couche limite en aval du point de réattachement. Les raisons de ce problème sont encore très mal connues et font l'objet de recherches.

Jet impactant. Le jet impactant est un écoulement de géométrie très simple qui pourtant représente un des grands défis pour les modèles. Il s'agit simplement d'un jet axisymétrique à basse température sortant d'une buse orientée perpendiculairement à une paroi plane chauffée. Le fluide, en venant impacter la paroi, forme alors un jet radial autour du point d'impact. La difficulté consiste à prédire la distribution des transferts thermiques, étant données les spécificités de cet écoulement [18, 23]: la production de turbulence ne se fait pas par interaction tension de cisaillement–cisaillement moyen

($-\overline{uv}\partial U/\partial y$) mais par interaction tension normale à la paroi–gradient normal à la paroi⁹ ($-\overline{u^2}\partial U/\partial x$); la tension de Reynolds normale $\overline{u^2}$ est supérieure à la tension $\overline{v^2}$, car c’est $\overline{u^2}$ qui est « alimenté » par la production; il y a un fort transport de turbulence vers le point d’impact (non-équilibre).

Les études (par exemple [21, 91]) montrent que les modèles comprenant des termes d’écho de paroi, introduits, rappelons-le, pour corriger les mauvaises prédictions dans la zone logarithmique d’un canal, ont ici un effet contraire à la physique de l’écoulement. En effet, la production de turbulence se fait principalement sur la composante normale $\overline{u^2}$ et est redistribuée sur la composante tangentielle $\overline{v^2}$, contrairement à ce qui se passe dans un canal. La partie lente des termes d’écho de paroi de Gibson & Launder [45] induit un blocage de la redistribution, ce qui a pour conséquence d’amplifier la composante $\overline{u^2}$ au lieu de l’amortir. On obtient alors le long de l’axe de symétrie une surestimation de $\overline{u^2}$ d’un facteur entre 2 et 7, suivant la position x [91]. Le nombre de Nusselt étant très sensible à $\overline{u^2}$, il est surestimé en conséquence.

Pour corriger ce problème, Craft *et al.* [21] ont proposé des termes d’écho de paroi construits explicitement de manière à donner l’effet attendu à la fois en canal et en jet impactant. Cet exemple illustre assez bien le fait que les corrections introduites pour pallier des défauts de conception des modèles sont la plupart du temps valables uniquement dans des cas proches de celui sur lequel elles ont été calibrées. C’est pourquoi la tendance actuelle est d’éviter de telles corrections et de développer des modèles qui soient directement conçus pour être applicables jusqu’à la paroi : le modèle cubique TCL [25], par exemple, donne de très bons résultats à la fois en canal et dans le cas du jet impactant.

Un autre phénomène explique également en partie la trop forte intensité de la turbulence au point d’impact : le mauvais comportement de l’équation de ε en ce point. Il est bien connu, depuis longtemps, que cette équation est la cause d’une surestimation de l’échelle de longueur de la turbulence et donc d’une trop faible dissipation. Une idée, due à Yap [165], consiste à introduire un terme source supplémentaire dans l’équation de transport de ε qui soit actif uniquement dans la zone d’impact et ait tendance à rétablir la valeur d’équilibre de l’échelle de longueur. La *correction de Yap* s’exprime comme :

$$S_\varepsilon = 0,083 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} \left(\frac{L_T}{Cd} - 1 \right) \left(\frac{L_T}{Cd} \right)^2 \quad (3.51)$$

où $L_T = k^{3/2}/\varepsilon$ et d est la distance à la paroi.

9. Dans un jet impactant, x correspond à la direction axiale, donc normale à la paroi, y ou r , à la direction radiale.

On voit donc que, même dans des écoulements à géométrie relativement simple, les modèles au second ordre bas-Reynolds dérivés des modèles haut-Reynolds classiques ne donnent pas toujours des résultats corrects et nécessitent souvent des corrections particulières à chaque écoulement, ce qui n'est évidemment pas satisfaisant d'un point de vue scientifique. Cela produit également, à l'extérieur de la communauté des spécialistes de la modélisation de la turbulence, l'impression, malheureusement pas toujours fautive, que les modèles ne sont que des concaténations de termes ajoutés au fur et à mesure pour prédire des écoulements de plus en plus complexes. Nous allons voir que la nécessité de corrections est une conséquence de défauts fondamentaux de conception des modèles.

3.1.3.3 Problèmes de conception

Les exemples d'écoulements simples, présentés plus haut, que les modèles au second ordre ont beaucoup de mal à reproduire, sont révélateurs d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices abusives qui forment la base de la modélisation. Il est étonnant de remarquer que ces hypothèses heuristiques, formulées de très longue date, aient toujours cours aujourd'hui alors que les progrès de la connaissance générale des mécanismes physiques ont montré avec certitude qu'elles sont beaucoup trop restrictives.

Terme de redistribution. Les hypothèses les plus dommageables pour le comportement des modèles en proche paroi sont la quasi-homogénéité et la localité. Nous avons déjà fait allusion plus haut à cette question, mais il nous semble nécessaire d'y revenir, tant elle nous apparaît fondamentale.

L'hypothèse quasi-homogène est celle qui permet de passer de l'équation exacte (3.4) à l'approximation (3.12). Elle consiste à négliger les variations du gradient de vitesse sur la région autour du point \mathbf{x} où les corrélations en deux points sont non-nulles. Or, Bradshaw *et al.* [11] ont étudié la validité de cette hypothèse à partir des données de DNS de Mansour *et al.* [104]. En comparant le terme de pression rapide exact et son approximation quasi-homogène, ils ont montré que l'hypothèse était tout à fait valide au-delà de $y^+ = 40$, mais complètement mise en défaut en dessous. On voit donc que la modélisation du terme rapide repose sur une hypothèse valable uniquement suffisamment loin de la paroi, ce qui explique la nécessité d'introduire de fortes corrections pour construire des modèles bas-Reynolds. D'autre part, Weinstock [160] montre que l'on peut retrouver le modèle de Rotta pour le terme lent à partir de considérations théoriques, en utilisant également une hypothèse de quasi-homogénéité : il signale donc que la modélisation du terme lent ne peut pas non plus être valide jusqu'à la paroi.

L'hypothèse de localité, quant à elle, consiste à « oublier » que les équations des termes lent et rapide (3.3) et (3.4) s'expriment sous forme d'intégrales de corrélations en deux points sur tout le domaine, et à modéliser ces termes en fonction de tenseurs exprimés au point \mathbf{x} . Si cette idée n'est pas contestable du point de vue mathématique (l'intégrale est bien une fonction de \mathbf{x} uniquement), elle l'est en revanche du point de vue physique : exprimer l'intégrale sous forme algébrique rend très difficile sa modélisation et fait perdre à l'équation de transport des tensions de Reynolds leur caractère non-local, qui joue un rôle essentielle dans l'effet de blocage en région de paroi (cf. § 2.2).

Ces hypothèses de quasi-homogénéité et de localité sont donc uniquement applicables dans des écoulements libres. La présence d'une paroi nécessite alors l'introduction de termes correctifs : termes d'écho de paroi, fonctions d'amortissement, termes non-linéaires. Les deux premiers types de corrections sont tout à fait *ad hoc*, ne reposant que sur la volonté de « faire coller » les résultats aux expériences. Ils n'ont pas de véritables fondements théoriques¹⁰. Par conséquent, ils ne sont valables que pour les écoulements pour lesquels ils ont été construits, où tout au plus pour des écoulements du même type : on a vu, par exemple, que les termes d'écho de paroi de Gibson & Launder [45], introduits et calibrés sur le cas du canal, ne sont pas du tout adaptés au jet impactant. De plus, en ce qui concerne les fonctions d'amortissement, la localité du modèle nécessite de reproduire l'amortissement de la turbulence à travers une dépendance en Re_T . Il y a là un paradoxe fondamental : comme nous l'avons vu au § 2.2, l'amortissement de la turbulence est dû à la fois à des effets dynamiques, qui jouent surtout dans la sous-couche visqueuse, et à des effets cinématiques, sensibles jusqu'à la zone logarithmique. Modéliser ces deux mécanismes par une simple dépendance en Re_T , qui ne caractérise que les effets dynamiques, est totalement illusoire : les fonctions d'amortissement sont alors uniquement valables pour l'écoulement sur lequel elles ont été choisies.

C'est pourquoi la tendance actuelle est plutôt aux modèles fortement non-linéaires qui ne nécessitent pas d'autres corrections (modèle TCL, par exemple). Ce type de modèles est développé en tentant de respecter des contraintes physiques telles que réalisabilité et comportement limite correct dans le cas de la turbulence à deux composantes. D'après leurs concepteurs, de tels modèles sont donc à même de reproduire une grande variété d'écoulements, puisqu'ils sont construits sur des bases théoriques solides. C'est oublier que ces modèles reposent sur les hypothèses de quasi-homogénéité et de localité.

10. Les termes d'écho de paroi ont une justification, puisqu'ils sont sensés rendre compte des termes de surface dans l'équation intégrale du terme de pression, mais, malheureusement, cette justification est fautive (cf. § 2.2.2).

À la suite de Speziale [146], nous remarquerons qu'il semble vain, voire même absurde, de chercher à améliorer les modèles pour qu'ils se comportent correctement dans des situations critiques, alors qu'ils reposent sur des hypothèses qui ne sont pas du tout valables dans ces situations.

Ainsi, il nous apparaît que l'accroissement de la complexité ne soit pas la bonne voie à suivre, car elle repose sur une méthode contestable. De plus, avec un grand nombre de termes non-linéaires, les modèles deviennent difficiles à implanter informatiquement, peuvent introduire des instabilités numériques, particulièrement dans les cas industriels où les maillages ne sont souvent pas assez fins, et, surtout, deviennent particulièrement abscons pour les non-spécialistes. C'est pourquoi la méthode de la relaxation elliptique, présentée au chapitre suivant, qui rompt radicalement avec les méthodes classiques de modélisation du terme de pression, nous apparaît à l'heure actuelle comme la meilleure voie pour représenter la turbulence de proche paroi.

Termes de diffusion. La modélisation des termes de corrélations triples par une hypothèse de gradient généralisé est également un point faible des modèles au second ordre. En effet, si très souvent, comme dans le cas du canal, le transport turbulent n'a qu'un rôle secondaire, sa prise en compte précise peut être parfois nécessaire. Par exemple, nous avons vu que dans un écoulement de marche descendante, l'intensité de la recirculation était sous-estimée par manque d'entraînement par le reste de l'écoulement et qu'aucune modification des coefficients ne peut résoudre ce problème. Parnéix & Durbin [118] montrent que le problème vient de la modélisation du terme de diffusion turbulente. L'utilisation d'un modèle algébrique fondé sur l'équation de transport exacte des corrélations triples permet d'améliorer les prédictions. De même, dans le cas de la convection naturelle le long d'une plaque plane verticale, Boudjemadi [10] a montré que le modèle de D_{ij}^T sous-estimait la diffusion et qu'une modélisation plus élaborée des corrélations triples résolvait ce problème. L'idéal serait bien sûr de résoudre directement une équation de transport des corrélations triples, mais on passerait ainsi à des modèles au troisième ordre, et le nombre d'équations serait bien trop important pour les applications industrielles.

En ce qui concerne le terme de diffusion par la pression, outre le fait, que nous avons déjà évoqué, qu'en proche paroi ce terme devient bien plus important que la diffusion turbulente, il existe d'autres éléments qui indiquent que les deux termes ne peuvent pas, dans toutes les situations, être modélisés ensemble. En effet, Demuren *et al.* [31] montrent que dans le cas d'un sillage plan, la diffusion par la pression est aussi significative que la diffusion turbulente, et surtout qu'elle n'est pas toujours à

contre-gradient. Par conséquent, elle doit être modélisée séparément, ce qui n'est pas le cas dans la plupart des modèles.

Terme de dissipation. La modélisation du terme de dissipation ε_{ij} et surtout du taux de dissipation ε est considérée comme le principal talon d'Achille des modèles au second ordre.

Tout d'abord, l'hypothèse, formulée par Kolmogorov [71], d'isotropie des structures dissipatives est très souvent mise en cause. Bien sûr, cette hypothèse n'est pas vraie aux bas nombres de Reynolds, et nous avons vu au § 2.2.1 et au § 2.3 que les modèles doivent prendre en compte l'anisotropie de ε_{ij} à proximité des parois. Mais nous avons vu également, au § 3.1.2.4, que les modèles tendent tous vers un modèle isotrope lorsqu'on s'éloigne des parois. Or, Oberlack [115] recense plusieurs études montrant que le couplage entre les grandes et les petites échelles de la turbulence persiste même à la limite des nombres de Reynolds infinis. Par conséquent, l'anisotropie des structures énergétiques induit une anisotropie des structures dissipatives. Speziale & Gatski [147] ont proposé de prendre en compte cette anisotropie par un modèle algébrique de la partie déviatorique de ε_{ij} . Oberlack [115], quant à lui, propose un modèle de transport pour ε_{ij} .

La modélisation du taux de dissipation ε est, il faut bien le reconnaître, relativement *ad hoc*. Le modèle classique haut-Reynolds (3.21) a été construit à l'origine de manière totalement empirique, en adoptant une forme similaire à l'équation de transport de l'énergie turbulente k . En effet, l'équation de transport exacte de ε est constituée de termes relativement difficiles à interpréter physiquement et pour lesquels construire une modélisation ressemble fort à une gageure. Toutes les tentatives de modélisation terme à terme tentées jusqu'à aujourd'hui ont échoué dans la représentation des bilans exacts de l'équation de ε . Les différents termes sont donc très mal reproduits individuellement, mais les erreurs se compensent, et on arrive finalement à prédire ε correctement. Cependant, cette compensation des erreurs est obtenue grâce à la calibration des différents coefficients, et n'est donc garantie que dans le cas de l'écoulement particulier qui a servi d'étalon. Prud'homme et Elghobashi [127] notent, par exemple, que l'équation de ε , calibrée pour les couches limites sans gradient de pression, donne des résultats irréalistes en présence d'un gradient de pression adverse. De même, nous avons vu au § 3.1.3.2 qu'elle nécessite également une correction à proximité des points d'impact. On voit donc qu'en raison du manque de représentation réaliste des différents termes exacts, l'équation de ε manque d'universalité, ce qui pénalise l'applicabilité des modèles de turbulence dans des cas industriels très variés.

Échelles de la turbulence. Nous ne prétendons pas dresser ici une liste exhaustive des points faibles des modèles au second ordre souvent mis en avant, d'autant que, comme le remarque Launder [79], cette liste est empreinte d'une grande subjectivité, chaque auteur mettant en avant tel ou tel point suivant sa propre expérience.

C'est pourquoi nous nous contenterons de signaler un dernier point faible, très fréquemment mis en lumière, qui est l'utilisation d'échelles de temps et de longueur uniques, k/ε et $k^{3/2}/\varepsilon$. Dans de nombreux cas, lorsque la turbulence est soumise à des contraintes extérieures, par exemple une aspiration à la paroi, ou tout simplement lorsque la géométrie l'impose (jet impactant), l'écoulement peut être régi simultanément par différentes échelles caractéristiques. De plus, l'utilisation de ε pour représenter les échelles des grandes structures repose sur l'hypothèse d'équilibre spectral de la turbulence [71], qui est rarement vérifiée dans les cas réels. C'est pourquoi de nombreuses méthodes ont été proposées pour rendre compte de cette turbulence *multi-échelles* (cf. par exemple Schiestel [134]), mais l'accroissement de complexité qu'elles induisent fait qu'elles sont très peu utilisées en pratique.

Nous avons donc recensé un nombre relativement important de points faibles des modèles au second ordre classiques, qui ne sont pas significativement améliorés par le raffinement toujours plus grand des modèles proposés aujourd'hui sur les mêmes bases. C'est ce qui nous a fortement incités à nous orienter vers une approche novatrice, la relaxation elliptique de Durbin.

3.2 Modèles à viscosité turbulente

Malgré le fait que le second ordre apparaisse comme le niveau de modélisation le plus bas pour que la physique soit représentée de manière réaliste, les exigences d'efficacité et de simplicité du calcul industriel ont rendu très populaire l'approche simplifiée que constitue l'hypothèse de viscosité turbulente. Cette hypothèse, formulée il y a déjà un siècle par Boussinesq, consiste à exprimer de manière algébrique le déviateur du tenseur de Reynolds en fonction du taux de déformation moyenne :

$$\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = -2\nu_T S_{ij} \quad (3.52)$$

où $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i)$. Avec cette hypothèse, il n'est plus nécessaire de calculer directement les tensions de Reynolds, mais seulement l'énergie turbulente $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ et la viscosité turbulente ν_T .

3.2.1 Modèles haut-Reynolds

L'équation de Boussinesq (3.52) montre que la viscosité turbulente ν_T est homogène au rapport entre l'énergie turbulente et S_{ij} , ce dernier étant lui-même homogène à l'inverse d'un temps. Plus exactement, S_{ij}^{-1} est de l'ordre de l'échelle de temps T caractéristique des grosses structures énergétiques de l'écoulement. Il existe de nombreuses possibilités pour exprimer T , la solution classique étant d'utiliser ε , le taux de dissipation de k . On a alors $T = k/\varepsilon$, ce qui donne :

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.53)$$

Cette équation est connue sous le nom d'*équation de Prandtl-Kolmogorov*. L'expérience accumulée durant des décennies a abouti, au début des années 70, à la certitude qu'il est nécessaire, pour représenter ν_T avec suffisamment de généralité, de résoudre une équation de transport pour k et une seconde pour ε .

L'équation de transport exacte de k s'obtient en prenant la demi-somme de celles des tensions de Reynolds diagonales (équation 2.9), ce qui donne :

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_i} \right)}_{D^\nu} - \underbrace{\frac{\partial \overline{k u_i}}{\partial x_i}}_{D^T} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u_i p}}{\partial x_i}}_{D^p} - \underbrace{\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_P - \underbrace{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_\varepsilon \quad (3.54)$$

Les termes à modéliser sont encore une fois D^T , D^p et ε . Le terme de production P est, quant à lui, déjà modélisé, puisqu'en utilisant l'équation de Boussinesq (3.52), on obtient :

$$P = 2\nu_T S_{ij} S_{ij} \quad (3.55)$$

Le terme D^ν ne nécessite aucune modélisation, et il est de toute façon négligé à haut-Reynolds.

Le modèle que nous allons brièvement présenter maintenant est connu sous le nom de *modèle $k-\varepsilon$ standard*, et il est utilisé, éventuellement avec quelques aménagements, dans probablement 95 % des calculs industriels.

Diffusion turbulente. Le terme D^T est tout simplement modélisé par analogie avec D^ν , en remplaçant simplement ν par ν_T/σ_k :

$$D^T = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \quad (3.56)$$

où le coefficient σ_k est généralement pris égal à 1.

Diffusion par la pression. De même que dans les modèles au second ordre haut-Reynolds classiques, la diffusion par la pression est considérée comme contenue dans le modèle de la diffusion turbulente.

Taux de dissipation. Le taux de dissipation ε apparaît dans l'équation de transport de k mais aussi dans l'équation de Prandtl–Kolmogorov (3.53). Nous avons vu qu'il s'est avéré nécessaire de résoudre une équation de transport pour cette quantité, qui fournira alors la valeur à injecter dans l'équation de k , qui peut donc finalement s'exprimer tout simplement sous la forme :

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \quad (3.57)$$

P étant donné par (3.55) et ν_T par (3.53), il ne reste donc plus qu'à modéliser l'équation de transport de ε .

Or, son équation de transport exacte comporte de nombreux termes difficiles à interpréter physiquement et, par conséquent, à modéliser. On préfère alors utiliser une équation empiriquement « calquée » sur l'équation de k .

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad (3.58)$$

où P_ε et ε_ε sont reliés à P et ε en les rendant simplement dimensionnellement corrects par l'introduction du facteur ε/k . On a donc, finalement :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad (3.59)$$

Cette équation est utilisée également dans les modèles au second ordre, en remplaçant simplement le modèle de diffusion (3.56) par une hypothèse de gradient généralisé (cf. § 3.1.1).

3.2.2 Extension vers la paroi

De la même manière que pour les modèles au second ordre haut-Reynolds, le modèle k - ε standard nécessite des modifications pour pouvoir être appliqué aux écoulements de paroi sans l'aide de fonctions de paroi. Outre l'équation de ε , pour laquelle les modifications à apporter sont les mêmes que celles décrites au § 3.1.2.5, le principal point à corriger est le comportement de la viscosité turbulente ν_T .

En effet, on peut voir sur la figure 3.6 que la tension de cisaillement \overline{uv} est très largement surestimée par le k - ε standard dans la zone tampon. À la suite de Jones &

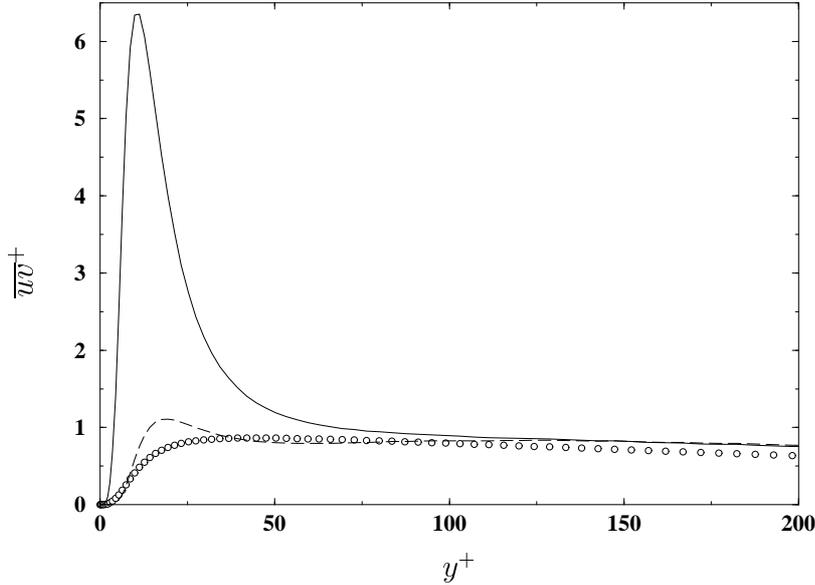


FIG. 3.6 – Tests a priori des \overline{uv} prédits par les $k-\varepsilon$ haut-Reynolds et bas-Reynolds. DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. \circ \overline{uv} donné par la DNS; — modèle $k-\varepsilon$ standard; --- modèle de Lam & Bremhorst [74].

Lauder [57], de nombreux auteurs [13, 50, 54, 74, 83, 111, 143, 164] ont proposé d'introduire une fonction d'amortissement f_μ dans la formule de Prantl-Kolmogorov (3.53), qui devient :

$$\nu_T = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.60)$$

Une très bonne revue de ce type de modèles est donnée par Patel *et al.* [123], qui montrent que la plupart des fonctions f_μ introduites ne corrigent pas correctement le comportement de la viscosité turbulente. Seul, parmi les modèles qu'ils examinent, le modèle de Lam & Bremhorst [74], donne un résultat satisfaisant, comme on peut le voir sur la figure 3.6. La fonction d'amortissement de Lam & Bremhorst est :

$$f_\mu = \left[1 - \exp \left(-0,0165 \frac{\sqrt{ky}}{\nu} \right) \right]^2 \left(1 + \frac{20,5}{Re_T} \right) \quad (3.61)$$

L'utilisation de f_μ , conjointement aux modifications portant sur l'équation de ε , suffit à pouvoir intégrer le modèle $k-\varepsilon$, dit alors *bas-Reynolds*, jusqu'aux parois. Cependant, pour les raisons évoquées au § 3.1.3.3, il est préférable d'éviter le recours aux fonctions d'amortissement. Ce sera l'un des intérêts du modèle $\overline{v^2}-f$, que nous présenterons au chapitre 5, et qui est un modèle à viscosité turbulente utilisant le concept de relaxation

elliptique et dans lequel aucune fonction d'amortissement n'est nécessaire.

3.2.3 Limitations des modèles à viscosité turbulente

Les modèles à viscosité turbulente sont très populaires dans l'industrie car ils sont simples, faciles à implanter, robustes, et donnent des résultats suffisamment réalistes dans un grand nombre d'écoulements. Cependant, ils ont un certain nombre de limitations, que nous allons passer rapidement en revue.

Tout d'abord, notons qu'ils possèdent les mêmes défauts que les modèles au second ordre (cf. § 3.1.3.3), si ce n'est en ce qui concerne le terme de redistribution, qui, étant de trace nulle, n'apparaît pas dans l'équation de k . Mais l'utilisation de l'hypothèse de Boussinesq induit des limitations supplémentaires.

La première limitation importante vient du fait que l'hypothèse de Boussinesq exprime de manière linéaire le tenseur de Reynolds en fonction du tenseur de déformation moyenne. Il en résulte une très mauvaise reproduction de l'anisotropie de la turbulence, qui rend impossible la prédiction des effets de cette anisotropie sur l'écoulement, comme par exemple la génération d'écoulements secondaires. Il en résulte également un terme de production toujours positif, ce qui ne permet pas au modèle d'être sensible aux effets stabilisateurs, comme ceux dus à la rotation d'ensemble ou à la courbure des lignes de courant. C'est pourquoi certains auteurs utilisent des modèles à viscosité turbulente non-linéaire, qui permettent de prendre en compte certains des effets cités précédemment [5, 27, 138].

La seconde limitation essentielle des modèles à viscosité turbulente est, tout simplement, l'absence d'équations de transport des tensions de Reynolds. Il en résulte une réaction immédiate de celles-ci aux variations des vitesses moyennes. Notamment, les axes propres du tenseur d'anisotropie des tensions de Reynolds sont alors en permanence confondus avec ceux du tenseur de déformation. Dans les écoulement réels, comme le montre Laurence [88] dans le cas d'un écoulement dans un faisceau de tubes, les tensions de Reynolds ne s'alignent pas immédiatement avec la déformation : il y a un retard, un temps de relaxation, qui rend l'interaction turbulence-champ moyen beaucoup plus complexe que ne le suppose l'hypothèse de Boussinesq. Cette limitation, qui détermine en grande partie la supériorité des modèles au second ordre sur les modèles à viscosité turbulente, rend illusoire l'application de ces derniers dans un grand nombre de situations pratiques, où la turbulence n'est pas en équilibre.

3.3 Conclusion du chapitre

Ce chapitre nous a permis de mettre en lumière la méthode qui a été utilisée durant les dernières décennies pour développer des modèles valables en présence de parois. Elle consiste essentiellement à prendre comme base des modèles haut-Reynolds et à introduire des modifications pour prendre en compte les effets de la paroi décrits au chapitre 2.

Cette méthode est à l'origine de nombreux problèmes rencontrés par ces modèles, dans la mesure où des modifications très fortes sont rendues nécessaires par le fait que les modèles haut-Reynolds reposent sur des hypothèses qui ne sont absolument pas valables à proximité des parois : l'hypothèse de localité, qui concerne aussi bien les modèles à viscosité turbulente que les modèles au second ordre ; l'hypothèse de Boussinesq, qui ne concerne que les premiers ; l'hypothèse de quasi-homogénéité, qui ne concerne que les derniers.

Les termes correctifs introduits, que ce soit sous la forme de termes d'écho de paroi, de fonctions d'amortissement ou de termes non-linéaires, apparaissent donc comme artificiels, n'étant pas vraiment justifiés par la théorie, mais plutôt rendus nécessaires pour « faire marcher » des modèles dans des situations où ils ne sont pas valables. Il semble donc illusoire d'essayer de développer des modèles de proche paroi de plus en plus complexes, calibrés le plus souvent pour vérifier certaines contraintes théoriques dans des situations extrêmes, alors que les hypothèses de base du modèle ne s'appliquent que loin des parois.

C'est pourquoi l'approche de la relaxation elliptique, introduite par Durbin, nous apparaît comme une alternative bien plus prometteuse : le modèle est non-local, propriété essentielle pour laquelle il a été spécifiquement développé ; et il n'utilise pas l'hypothèse de quasi-homogénéité à proximité des parois. Le reste de cet exposé est entièrement consacré à cette méthode.

Chapitre 4

Modélisation des effets de paroi par relaxation elliptique

4.1 Présentation

Ce chapitre est entièrement consacré à la présentation et à l'analyse d'une voie originale pour la modélisation de la turbulence en proche paroi, qui a été proposée par Durbin [35, 38], et qui consiste à utiliser le concept de *relaxation elliptique* pour prendre en compte la non-localité du terme de pression des équations de transport des tensions de Reynolds. Dans la première partie de ce chapitre, nous allons tenter de donner une description détaillée de ses fondements, notamment en montrant, par une analyse poussée des données de la DNS de Moser *et al.* [110], que les hypothèses introduites intuitivement par Durbin, fréquemment mises en question, sont relativement bien confirmées par les données de simulation directe. Puis, dans la deuxième partie, nous essaierons de dégager les améliorations que ce modèle apporte par rapport aux modèles classiques dans la description de la physique de proche paroi, mais aussi les points qu'elle ne résout pas et les problèmes supplémentaires qu'elle peut engendrer. Enfin, la troisième partie de ce chapitre sera consacré à l'étude des voies d'améliorations possibles, et en particulier à la proposition de nouvelles formulations pour l'équation de relaxation elliptique.

4.1.1 L'équation de relaxation elliptique

Nous avons vu au chapitre précédent que l'extension des modèles classiques aux régions de paroi est très pénalisée par la non-validité dans ces régions des deux hypothèses fondamentales qui sous-tendent ces modèles, l'hypothèse de quasi-homogénéité

et celle de localité. L'idée introduite par Durbin, qui est de développer une équation différentielle pour le terme de pression, permet d'éviter l'utilisation de ces hypothèses.

Tout d'abord, en raison des comportements asymptotiques incohérents qu'introduit la décomposition classique de la corrélation gradient de pression–vitesse ϕ_{ij}^* en corrélation pression–déformation ϕ_{ij} et diffusion par la pression D_{ij}^p (cf § 2.3), nous préférons travailler directement avec ϕ_{ij}^* sans le décomposer. De plus, même si cette approche n'est pas celle utilisée par Durbin, nous montrerons que les conditions aux limites utilisées pour l'équation de relaxation elliptique impliquent que ce soit bien ϕ_{ij}^* , et non ϕ_{ij} , qui soit modélisé.

Rappelons que ϕ_{ij}^* s'exprime comme une corrélation entre la vitesse fluctuante et le gradient de pression fluctuante :

$$\phi_{ij}^* = -\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} - \frac{1}{\rho} \overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} \quad (4.1)$$

Or, en prenant la dérivée spatiale de l'équation de Poisson pour la pression (2.10), on obtient également une équation de Poisson pour le gradient de pression :

$$\nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-2\rho \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \rho \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) \quad (4.2)$$

De la même manière que pour l'équation (2.10), on peut considérer que (4.2) satisfait la condition aux limites

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (4.3)$$

La solution de l'équation (4.2) peut alors être exprimée sous forme intégrale en utilisant la fonction de Green du domaine G_Ω (voir par exemple [30]). Cette fonction est solution du même problème de Neumann, dans lequel le terme source est remplacé par une fonction de Dirac¹.

$$\begin{cases} \nabla^2 G_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ \frac{\partial G_\Omega}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

La solution de (4.2) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_k}(\mathbf{x}') G_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (4.5)$$

1. Nous adoptons ici des notations et un vocabulaire « physiciens » pour les distributions. Les équations sont donc à interpréter *au sens des distributions*.

L'équation intégrale de ϕ_{ij}^* se déduit alors facilement de (4.5) :

$$\rho\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (4.6)$$

où Ψ_{ij} est défini par :

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \overline{-u_i(\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_j}(\mathbf{x}') - u_j(\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}')} \quad (4.7)$$

À ce stade, la méthode classique consisterait à séparer l'intégrale en partie rapide et partie lente, à appliquer l'hypothèse de quasi-homogénéité $\partial U_i / \partial x_j(\mathbf{x}') = \partial U_i / \partial x_j(\mathbf{x})$, permettant de sortir $\partial U_i / \partial x_j$ de l'intégrale, et enfin à utiliser l'hypothèse locale, qui consiste à exprimer les intégrales de corrélations en deux points restantes par des tenseurs exprimés au point \mathbf{x} .

Rompant complètement avec cette méthode, Durbin [35] propose de définir la fonction de corrélation $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ reliant la corrélation en deux points et la corrélation en un point de la manière suivante :

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (4.8)$$

et de la modéliser simplement par

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\frac{r}{L}\right) \quad (4.9)$$

où $r = \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$ et L est la longueur de corrélation. Il est ici important de noter que dans la définition (4.8), la corrélation en un point est exprimée en \mathbf{x}' , qui est la variable d'intégration dans (4.6). En effet, une manière plus classique [109] de définir la fonction de corrélation est d'écrire :

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (4.10)$$

ce qui permet de sortir la corrélation en un point de l'intégrale (4.6), conduisant à :

$$\rho\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \int_{\Omega} \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (4.11)$$

On en déduit alors une forme similaire à celle que l'on obtient pour le terme rapide après avoir utilisé l'hypothèse quasi-homogène. *Toute l'information non-locale serait alors contenue dans $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, qu'il serait très difficile de modéliser.*

Au contraire, avec la définition (4.8), l'équation (4.6) devient :

$$\rho\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (4.12)$$

La fonction de Green d'un domaine quelconque n'est pas connue analytiquement. Nous allons ici prendre en première approximation la fonction de Green de l'espace \mathbb{R}^3 , qui est :

$$G_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \quad (4.13)$$

Cette approximation peut sembler à première vue très restrictive, dans la mesure où elle n'est pas valable lorsque le domaine est limité par une paroi. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

En utilisant le modèle (4.9) et l'approximation (4.13), l'équation intégrale de ϕ_{ij}^* devient :

$$\rho\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = -\int_{\Omega} \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \frac{\exp(-r/L)}{4\pi r} dV(\mathbf{x}') \quad (4.14)$$

Or, la fonction :

$$\mathcal{G}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\exp(-r/L)}{4\pi r} \quad (4.15)$$

est la fonction de Green de l'espace \mathbb{R}^3 associée à l'opérateur $1/L^2 - \nabla^2$ (cf. [30]). Par conséquent, le produit de convolution (4.14) peut être inversé, montrant que ϕ_{ij}^* est solution de l'équation :

$$\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = -\frac{L^2}{\rho} \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (4.16)$$

Dans cette équation, le second membre reste à modéliser. On peut alors remarquer que, en turbulence homogène, (4.16) se réduit à :

$$\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = -\frac{L^2}{\rho} \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (4.17)$$

Par conséquent, on peut modéliser le second membre de (4.16) par n'importe quel modèle quasi-homogène ϕ_{ij}^h présenté au § 3.1.1. ϕ_{ij}^* vérifie alors l'équation :

$$\phi_{ij}^* - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^* = \phi_{ij}^h \quad (4.18)$$

connue sous le nom d'*équation de relaxation elliptique*. Modéliser le second membre par ϕ_{ij}^h peut paraître abusif en proche paroi, mais nous verrons que la solution de l'équation est essentiellement déterminée par les conditions aux limites dans cette région, le terme source ne devenant important que dans une zone où l'hypothèse quasi-homogène est valable.

L'originalité de ce modèle par rapport aux modèles classiques vient du fait que le terme de pression n'est pas exprimé sous forme d'une relation algébrique en un point, mais comme la solution d'une équation différentielle elliptique, qui prend donc en

compte l'effet non-local. Cette non-localité permet à ϕ_{ij}^* de « sentir » à distance l'effet de la paroi. Les conditions aux limites vont permettre d'imposer un comportement correct de ϕ_{ij}^* à la paroi, et le caractère elliptique de l'équation (4.18) permet de « raccorder » la zone de proche paroi à la zone lointaine, où le modèle ϕ_{ij}^h est valable.

4.1.2 Modélisation de ε_{ij}

Avant de nous intéresser aux conditions aux limites de (4.18), il est nécessaire d'aborder la question de la modélisation du tenseur de dissipation ε_{ij} . Nous avons vu au § 3.1.2.4 que, dans les modèles classiques, pour reproduire correctement l'anisotropie de ε_{ij} au voisinage de la paroi, on utilise un modèle ε_{ij}^* près de celle-ci, et une fonction f_s qui permet de faire « basculer » le modèle de ε_{ij}^* à $\frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}$ au loin (équation 3.30).

Or, il est fortement préférable, pour des raisons d'universalité, d'éviter le recours à des fonctions *ad hoc* telles que f_s . C'est pourquoi Durbin [35] propose d'utiliser également une équation de relaxation elliptique pour modéliser ε_{ij} . Tout d'abord, ε_{ij}^* , la forme limite de ε_{ij} près de la paroi, est choisie comme :

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon \quad (4.19)$$

Cette formulation n'a pas que des avantages (cf. § 3.1.2.4), mais elle a au moins celui de ne pas être dépendante explicitement de la géométrie, contrairement aux formulations plus élaborées (3.33) et (3.36). Mais rien n'empêche *a priori* de construire un modèle de relaxation elliptique à partir de (3.33) ou de (3.36).

On peut décomposer le tenseur de dissipation de la manière suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* + (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) \quad (4.20)$$

Au voisinage de la paroi, ε_{ij} doit tendre vers ε_{ij}^* , donc on doit avoir :

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) \rightarrow 0 \quad (4.21)$$

tandis que, loin de celle-ci, ε_{ij} doit tendre vers $\frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}$, ce qui correspond à :

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) \rightarrow \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} - \varepsilon_{ij}^* \quad (4.22)$$

On peut alors calculer $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*)$ à l'aide d'une équation de relaxation elliptique similaire à celle développée pour ϕ_{ij}^* , avec comme terme source la valeur que l'on veut obtenir au loin :

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) - L^2 \nabla^2 (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} - \varepsilon_{ij}^* \quad (4.23)$$

En imposant à cette équation la condition aux limites $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) = 0$ à la paroi, on obtiendra les deux comportements asymptotiques recherchés (4.21) et (4.22).

Cependant, il n'est pas nécessaire de résoudre deux équations de relaxation elliptique séparées pour ϕ_{ij}^* et $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*)$, car apparaît dans l'équation de transport de $\overline{u_i u_j}$ directement la différence $\phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij}$, qui peut s'écrire $\phi_{ij}^* - (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) - \varepsilon_{ij}^*$. Il suffit donc de résoudre une équation de relaxation elliptique pour $\mathcal{P}_{ij} = \phi_{ij}^* - (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*)$. Celle-ci s'obtient en prenant simplement la différence de (4.18) et de (4.23) :

$$\mathcal{P}_{ij} - L^2 \nabla^2 \mathcal{P}_{ij} = \phi_{ij}^h - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^* \quad (4.24)$$

qui devra respecter à la paroi la condition aux limites $\mathcal{P}_{ij} = 0$.

On voit donc que cette méthode permet d'obtenir le comportement anisotrope de ε_{ij} près de la paroi. Certes, contrairement à ϕ_{ij}^* , l'utilisation d'une équation de relaxation elliptique pour ε_{ij} n'a pas de fondement théorique, mais est tout aussi satisfaisante que l'utilisation d'une simple fonction *ad hoc* pour pondérer ε_{ij} et ε_{ij}^* . De plus, nous allons voir que cette méthode permet de respecter le bon équilibre des différents termes du bilan de $\overline{u_i u_j}$ près de la paroi, ce qui est l'une des qualités essentielles du modèle de Durbin.

4.1.3 Conditions aux limites

4.1.3.1 Bilan asymptotique de $\overline{v^2}$

La propriété de la turbulence la plus importante à reproduire par un modèle est l'anisotropie en proche paroi. Pour cela, il est indispensable de respecter l'équilibre du bilan de $\overline{v^2}$ dans cette région, tel qu'il a été décrit au § 2.3.

L'équation de transport de $\overline{v^2}$ au voisinage de la paroi se réduit à l'ordre dominant à (cf. § 2.3.4) :

$$D_{22}^v - \varepsilon_{22} + \phi_{22}^* = 0 \quad (4.25)$$

soit, en utilisant les notations introduites à la section précédente et le modèle (4.19) pour ε_{ij}^* , la paroi étant située en $y = 0$:

$$\nu \frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon}{k} \overline{v^2} + \mathcal{P}_{22} = 0 \quad (4.26)$$

Avec le modèle choisit pour ε_{ij}^* , le comportement asymptotique de ε_{ij} est $2\nu \overline{b_2^2} y^2$ au lieu de $8\nu \overline{b_2^2} y^2$ (voir tableau 2.1). Cependant, comme signalé au § 2.3.4, il est essentiel pour obtenir le bon comportement de $\overline{v^2}$ de respecter l'équilibre du bilan, c'est-à-dire

de faire en sorte que ϕ_{22}^* soit égal à la différence de D_{22}^ν et de ε_{22} , même si celle-ci n'est pas modélisée correctement. Ceci se traduit ici par :

$$\mathcal{P}_{22} = \frac{\varepsilon \overline{v^2}}{k} - \nu \frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial y^2} = -10\nu \overline{b_2^2} y^2 \quad (4.27)$$

Ce résultat montre que l'imposition de $\mathcal{P}_{22} = 0$ à la paroi n'est pas suffisante : on doit arriver à imposer exactement (4.27). Pour cela, introduisons le tenseur f_{ij} défini par :

$$f_{ij} = \frac{\mathcal{P}_{ij}}{k} \quad (4.28)$$

On a alors :

$$f_{22} = -10\nu \overline{b_2^2} \frac{y^2}{k} \quad (4.29)$$

Comme la condition aux limites à la paroi sur ε sera $\varepsilon = 2\nu \lim_{y \rightarrow 0} k/y^2$, on a :

$$f_{22} = -\frac{20\nu^2}{\varepsilon} \overline{b_2^2} \quad (4.30)$$

Il suffit donc de relier la condition aux limites de f_{22} à la valeur limite de $\overline{v^2}/y^4$ à la paroi, car en imposant un équilibre correct du bilan, on aura bien un comportement de $\overline{v^2}$ en y^4 . Cela donne :

$$f_{22} = -\frac{20\nu^2}{\varepsilon} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{v^2}}{y^4} \quad (4.31)$$

On voit donc que pour obtenir le bon équilibre du bilan de $\overline{v^2}$ à la paroi, il est nécessaire d'imposer la condition aux limites (4.31). Cela ne peut se faire qu'en résolvant l'équation de relaxation elliptique non pas pour \mathcal{P}_{ij} , mais pour f_{ij} , c'est-à-dire :

$$f_{ij} - L^2 \nabla^2 f_{ij} = \frac{1}{k} \left(\phi_{ij}^h - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^* \right) \quad (4.32)$$

C'est donc cette équation qui sera résolue conjointement à l'équation de transport de $\overline{u_i u_j}$, dans laquelle la différence $\phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij}$ sera modélisée par $k f_{ij} - \varepsilon_{ij}^*$.

4.1.3.2 Comportement asymptotique des tensions de Reynolds

Pour toutes les composantes du tenseur de Reynolds, le bilan à la paroi se réduit à (cf. § 2.3.4) :

$$\phi_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - D_{ij}^\nu \quad (4.33)$$

ce qui donne ici :

$$k f_{ij} = \varepsilon_{ij}^* - D_{ij}^\nu \quad (4.34)$$

soit :

$$\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial y^2} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon = -k f_{ij} \quad (4.35)$$

En utilisant $\varepsilon/k = 2\nu/y^2$, la solution de cette équation différentielle portant sur $\overline{u_i u_j}$ est :

$$\overline{u_i u_j} = A y^2 + \frac{B}{y} - \frac{\varepsilon}{20 \nu^2} f_{ij} y^4 \quad (4.36)$$

Comme on imposera $\overline{u_i u_j} = 0$ à la paroi, on aura $B = 0$. La solution se réduit donc à :

$$\overline{u_i u_j} = A y^2 - \frac{\varepsilon}{20 \nu^2} f_{ij} y^4 \quad (4.37)$$

C'est alors la condition aux limites sur f_{ij} qui fixera le comportement asymptotique de $\overline{u_i u_j}$. Il convient ici de distinguer les différentes tensions de Reynolds :

Cas de $\overline{v^2}$. Le cas de la composante $\overline{v^2}$ a déjà été étudié plus haut. On a vu que la condition aux limites sur f_{22} était donnée par (4.31). En introduisant (4.31) dans (4.37), on obtient $A = 0$, ce qui montre bien que l'on aura le comportement recherché $\overline{v^2} = O(y^4)$.

Cas de $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$. Pour ces composantes, on souhaite obtenir un comportement en y^2 . L'équation (4.37) montre que si la condition aux limites sur f_{ij} n'est pas choisie explicitement de manière à annuler A , on obtiendra $\overline{u_i u_j} = O(y^2)$. Par conséquent, la condition aux limites importe peu, et on choisira pour des raisons de simplicité $f_{ij} = 0$ pour ces deux tensions de Reynolds.

Cas de \overline{uv} . Ce cas est un peu plus problématique. En effet, l'équation (4.36) montre qu'il n'y a pas de terme en y^3 dans la solution. Par conséquent, il n'existe aucune condition de Dirichlet sur f_{ij} telle que $\overline{uv} = O(y^3)$.

En fait, si on suppose que $\overline{uv} = \alpha y^3$ dans l'équation (4.35), on arrive à la conclusion suivante :

$$y f_{12} = -\frac{8\nu^2}{\varepsilon} \alpha \quad (4.38)$$

ce qui montre que la seule condition aux limites qui puisse permettre d'obtenir un comportement de \overline{uv} en y^3 est la condition singulière en zéro :

$$f_{12} = -\frac{8\nu^2}{\varepsilon} \frac{\overline{uv}}{y^4} \quad (4.39)$$

Ce type de conditions aux limites ne peut s'appliquer qu'au premier point à l'intérieur du domaine et peut introduire des instabilités dans les calculs, en raison des grandes valeurs que peut prendre f_{12} . De plus, il en résulte une plus grande

sensibilité au maillage. C'est pourquoi on préfère utiliser la condition aux limites qui annule A :

$$f_{12} = -\frac{20\nu^2 \overline{uv}}{\varepsilon y^4} \quad (4.40)$$

car, puisqu'elle induit, comme le montre (4.37), un comportement de \overline{uv} en y^4 , la singularité en zéro est éliminée. En fait, l'influence du choix de cette condition aux limites est assez limitée, dans la mesure où l'amortissement trop fort de \overline{uv} sera restreint à une très petite région. Ce défaut est de toute façon préférable au défaut inverse, où \overline{uv} serait surestimé près de la paroi.

Composante \overline{uw} . Cette composante, qui est nulle en canal, se comporte dans le cas général en y^2 à la paroi. La condition aux limites appliquée à f_{13} est donc la même que celle de f_{11} et f_{33} , c'est-à-dire $f_{13} = 0$.

Composante \overline{vw} . De la même manière que \overline{uv} , cette composante se comporte comme y^3 . Il n'y a donc pas non plus de condition aux limites de Dirichlet appropriée, et c'est donc également la condition suivante qui est appliquée :

$$f_{23} = -\frac{20\nu^2}{\varepsilon} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{vw}}{y^4} \quad (4.41)$$

qui donnera $\overline{vw} = O(y^4)$.

4.1.4 Modèle complet

Le modèle de relaxation elliptique prend en compte les termes de pression et le tenseur de dissipation. Pour les termes qui restent à modéliser, toutes les possibilités sont ouvertes. Il s'agit de l'échelle de longueur L , du taux de dissipation, de la diffusion turbulente, du terme source de l'équation de relaxation elliptique ϕ_{ij}^h et éventuellement de la diffusion par la pression. Nous allons ici présenter le modèle le plus simple, tel qu'il a été défini par Durbin [38], ainsi que quelques variantes utilisées par différents auteurs.

Avant tout, réglons le cas de la diffusion par la pression. Comme nous l'avons signalé au § 4.1.1, contrairement à Durbin, nous avons écrit l'équation de relaxation elliptique pour ϕ_{ij}^* , sans le décomposer. Il n'y a donc pas lieu d'introduire un terme de diffusion par la pression dans le modèle. Durbin, lui, considère que ce terme est inclus dans la diffusion turbulente. Cependant, près de la paroi, cette dernière est négligeable, tandis que la diffusion par la pression prend des valeurs importantes (cf. figure 2.11). De plus, en définissant plus haut les conditions aux limites, on a utilisé le fait que le terme de pression équilibre la différence entre la dissipation et la diffusion moléculaire en

proche paroi. Ceci est vrai *uniquement* pour le terme de pression total ϕ_{ij}^* , pas pour la corrélation pression–déformation ni pour le terme $\text{dév}(\phi_{ij}^*)$ utilisé par Durbin. Par conséquent, c’est bien pour le terme complet ϕ_{ij}^* que l’équation de relaxation elliptique doit être utilisée. Grâce aux conditions aux limites, la diffusion par la pression est donc bien prise en compte près de la paroi. Loin de celle-ci, il est en général négligé, mais rien n’interdit d’introduire dans le terme source un modèle pour ce terme, tel que ceux présentés au § 3.1.2.3. Aucun auteur ne semble pourtant avoir envisagé cette possibilité.

Modèle quasi-homogène en terme source. Le terme source ϕ_{ij}^h de l’équation de relaxation elliptique peut être modélisé par n’importe lequel des modèles quasi-homogènes évoqués au § 3.1.1.1. Habituellement, pour la partie rapide, c’est le modèle IP qui est utilisé, et le modèle de Rotta pour la partie lente [7, 36, 37, 38, 69, 70]. Cependant, d’autres modèles plus élaborés peuvent également être utilisés, comme le modèle QI [32], le SSG [32, 90, 121, 163] et même le modèle de Craft & Launder [90, 163]. Cependant, l’utilisation de modèles étendus au bas-Reynolds en ajoutant des fonctions d’amortissement ou des termes non-linéaires est contraire à l’esprit de la relaxation elliptique. Il est tout à fait envisageable d’utiliser des modèles non-linéaires *haut-Reynolds*, développés pour assurer par exemple la réalisabilité du modèle, mais l’extension vers la région de proche paroi est entièrement prise en compte par l’équation de relaxation elliptique. Ce modèle a été développé de manière à éviter l’utilisation des techniques hasardeuses d’extension aux régions de proche paroi des modèles haut-Reynolds que nous avons critiquées au § 3.1.3.3. Par conséquent, il est préférable d’éviter d’utiliser de tels modèles comme terme source.

Diffusion turbulente. N’importe lequel des modèles de diffusion turbulente décrits au § 3.1.1.3 peut être utilisé. Dans la plupart des cas, c’est simplement le modèle de Daly & Harlow [28] qui est choisi. Cependant, Demuren & Wilson [32] ont également testé avec succès le modèle de Mellor & Herring [105] en association avec le modèle SSG pour le terme source ϕ_{ij}^h .

Étant donnés les choix qui ont été faits, le modèle de Durbin pour les tensions de Reynolds s’écrit de la manière suivante :

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + k f_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \overline{u_l u_m T} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} \right) + \nu \nabla^2 \overline{u_i u_j} \quad (4.42)$$

$$f_{ij} - L^2 \nabla^2 f_{ij} = \frac{1}{k} \left(-C_1 \frac{1}{T} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) - C_2 (P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij}) - \frac{2}{3} \frac{k}{T} \delta_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{T} \right)$$

$$= \frac{1 - C_1}{kT} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) - \frac{C_2}{k} (P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij}) \quad (4.43)$$

avec les coefficients : $C_\mu = 0,23$; $\sigma_k = 1,2$; $C_1 = 1,22$; $C_2 = 0,6$. Les termes k/ε ont été remplacés par T , de manière à rester consistant avec ce qui est fait dans l'équation du taux de dissipation, que nous allons décrire au paragraphe suivant.

Taux de dissipation. Nous avons montré au § 4.1.2 de quelle manière le tenseur de dissipation ε_{ij} était pris en compte par une équation de relaxation elliptique. Cependant, il reste à écrire une équation de transport du taux de dissipation ε valable jusqu'à la paroi.

Encore une fois, n'importe lequel des modèles présentés au § 3.1.2.5 peut être utilisé. Cependant, par soucis d'éviter au maximum le recours à des fonctions *ad hoc*, Durbin [35] a proposé de ne pas introduire de fonction f_{ε_2} pour prendre en compte l'augmentation de la dissipation en fin de décroissance d'une turbulence de grille.

Le problème de la singularité du terme ε^2/k à la paroi est quant à lui levé en réécrivant ce terme sous la forme ε/T , où T est l'échelle de temps de la turbulence : $T = k/\varepsilon$. Pour éviter la singularité, il suffit alors de borner cette échelle par l'échelle de Kolmogorov $\nu^{1/2}/\varepsilon^{1/2}$. Durbin a donc proposé d'utiliser :

$$T = \max \left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right) \quad (4.44)$$

avec $C_T = 6$. Cette échelle de temps est également utilisée pour le terme de génération $P\varepsilon/k$ qui est réécrit sous la forme P/T .

Enfin, pour prendre en compte l'augmentation de la génération de ε près de la paroi, Durbin a proposé d'utiliser une fonction f_{ε_1} de la forme :

$$f_{\varepsilon_1} = 1 + 0,1 \frac{P}{\varepsilon} \quad (4.45)$$

L'équation de transport de ε s'écrit donc finalement :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C'_{\varepsilon_1} P - C_{\varepsilon_2} \varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \overline{u_l u_m} T \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + \nu \nabla^2 \varepsilon \quad (4.46)$$

où $C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1} f_{\varepsilon_1}$. La condition aux limites est donnée par (2.36). Les coefficients sont : $C_{\varepsilon_1} = 1,44$; $C_{\varepsilon_2} = 1,9$; $\sigma_\varepsilon = 1,65$.

Échelle de longueur. L'échelle de longueur qui apparaît dans l'équation de relaxation elliptique (4.32) doit également être modélisée. L'échelle turbulente classique $k^{3/2}/\varepsilon$ est utilisée mais, comme elle tend vers zéro à la paroi, pour éviter une singularité de

l'équation de relaxation elliptique, elle est bornée par l'échelle de Kolmogorov $\nu^{3/4}/\varepsilon^{1/4}$. On a donc :

$$L = C_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \right) \quad (4.47)$$

avec $C_L = 0,2$ et $C_\eta = 80$ (cf. Durbin & Laurence [41] pour le choix des coefficients).

4.2 Hypothèses sous-jacentes

Pour développer le modèle de relaxation elliptique pour le terme de pression, quelques hypothèses ont été utilisées, de manière plus ou moins implicite. Le but de cette section est de rendre plus explicites ces hypothèses et de déceler celles qui peuvent (doivent) être remises en question.

La validité de ces hypothèses a été étudiée en détail pendant la thèse et a constitué une part importante du travail. Pour cela, nous avons utilisé la base de données de simulation directe du canal à $Re_\tau = 590$ de Moser *et al.* [110]. Cette étude ne sera pas reprise en détail dans ce rapport. Elle a été exposée dans trois publications qui sont données en annexe A, B et C, cette dernière étant la plus complète et la plus détaillée. Nous y ferons simplement référence lorsque nous en utiliserons les conclusions.

4.2.1 Fonction de corrélation scalaire

L'hypothèse de base du modèle de Durbin est l'approximation des corrélations en deux points. En effet, dans l'équation intégrale de ϕ_{ij}^* (4.6), il est nécessaire de modéliser la corrélation en deux points $\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, que l'on souhaite exprimer en fonction de la corrélation en un point $\Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$. Or, la relation linéaire la plus générale entre ces deux quantités est :

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{kl}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (4.48)$$

Le tenseur d'ordre quatre qui apparaît dans cette équation contient 81 coefficients, mais ce nombre peut être considérablement réduit en utilisant diverses propriétés de symétrie [112]. Cependant, une relation de ce type est trop élaborée dans l'optique de prendre simplement en compte l'effet non-local et ne pourrait conduire qu'à des modèles très complexes. C'est pourquoi on choisit de se contenter d'un tenseur d'ordre zéro, c'est-à-dire d'une simple fonction de corrélation $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

Cette hypothèse est une limitation du modèle, dans la mesure où elle implique que l'effet non-local soit le même pour toutes les composantes de ϕ_{ij}^* . L'étude des corrélations en deux points à partir des données de simulation directe (cf. annexe C),

montre que ce n'est pas le cas. En effet, on peut calculer une fonction de corrélation scalaire $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ différente pour chaque composante $\Psi_{\alpha\beta}$ de la manière suivante :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}', \mathbf{x}')} \quad (4.49)$$

On constate alors (cf. annexe C, figure 2) que les fonctions de corrélation sont similaires, notamment en ce qui concerne leurs formes et leurs évolutions au travers du canal, mais que la largeur des pics, c'est-à-dire l'échelle de corrélation, dépend de la composante.

En utilisant la même fonction de corrélation scalaire pour chaque composante, on fait alors une approximation : l'effet non-local est donc représenté plus qualitativement que quantitativement. On ne peut pas résoudre ce problème de manière simple, par exemple en définissant des échelles de corrélation différentes selon les composantes, car le modèle ne serait plus invariant par changement des axes du repère. La seule solution serait donc de modéliser le tenseur de corrélation d'ordre quatre défini par (4.48).

4.2.2 Modélisation de la fonction de corrélation

L'hypothèse de base du modèle est l'utilisation de l'approximation (4.9). La fonction de corrélation est modélisée par une exponentielle, qui dépend uniquement de la norme r du vecteur séparation $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$, et qui est donc isotrope. La forme en exponentielle est relativement bien confirmée par les données de simulation directe (cf. annexe C, figure 2, 4–11), mais, en revanche, l'hypothèse d'isotropie peut être remise en question. En particulier, près de la paroi, on constate, en particulier pour la composante Ψ_{22} , une très forte élongation des courbes d'iso-corrélation dans la direction de l'écoulement. Cette propriété est tout à fait cohérente avec les résultats sur les auto-corrélations en deux points de la vitesse [47, 133]. Elle résulte de la présence de structures instantanées très près de la paroi, les stries, que nous avons décrites au § 2.1.2.

Cette propriété n'a pas de conséquences sur l'effet non-local en canal, dans la mesure où celui-ci ne joue pas dans les directions d'homogénéité, mais elle peut avoir un rôle important dans des écoulements plus complexes.

En revanche, l'asymétrie de la fonction de corrélation dans la direction y , qui peut être constatée jusque dans la zone logarithmique, peut avoir une grande influence, même dans un canal. En effet, la non-localité de ϕ_{ij}^* implique que sa valeur au point \mathbf{x} est une moyenne pondérée de contributions élémentaires en chaque point \mathbf{x}' du domaine (équation 4.6). Sous la forme (4.12), on voit que la valeur de ϕ_{ij}^* est déterminée par les valeurs de $\Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$ pondérées par le produit de la fonction de corrélation et de la fonction de Green. Par conséquent, l'asymétrie de f dans la direction y montre que les

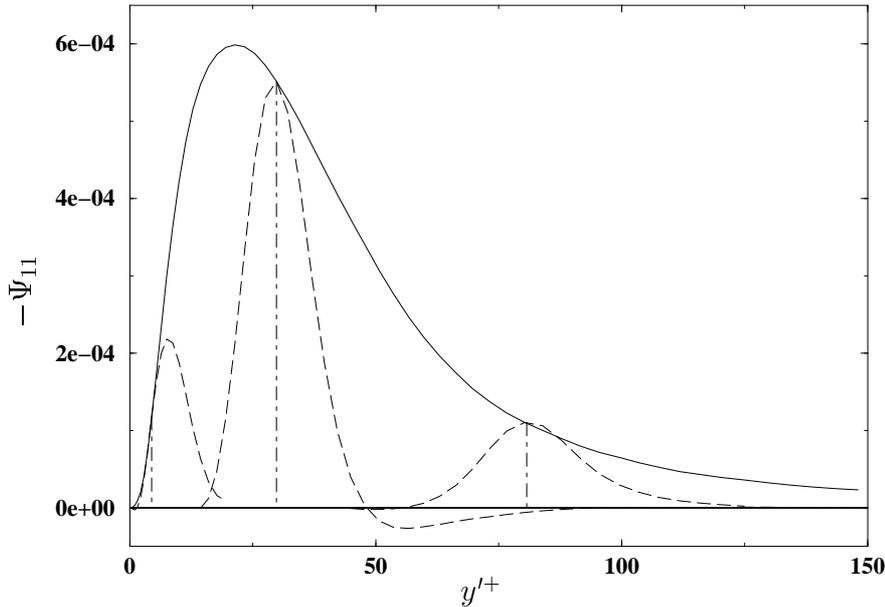


FIG. 4.1 – Profils de $\Psi_{11}^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ et de $\Psi_{11}^+(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$. DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. — $\Psi_{11}^+(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$; --- $\Psi_{11}^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ pour des séparations suivant l'axe des y avec $y = 4$, $y = 30$ et $y = 80$ (les traits mixtes verticaux indiquent les points de séparation nulle).

points entre \mathbf{x} et la paroi ont un poids moindre que ceux entre \mathbf{x} et le centre du canal. L'absence de prise en compte de cette asymétrie peut avoir des conséquences importantes, dans la mesure où la corrélation en un point $\Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$ varie considérablement sur la région où les corrélations en deux points ne sont pas nulles, comme on peut le voir sur la figure 4.1.

Le modèle isotrope (4.9), qui se traduit par l'opérateur isotrope $L^2 \nabla^2$ dans l'équation de relaxation elliptique, ne permet donc de prendre en compte ni l'élongation des isocorrélations dans la direction de l'écoulement, ni l'asymétrie de f dans la direction normale à la paroi. Nous verrons au § 4.3 que cela influe négativement sur le comportement du modèle dans la zone logarithmique, et au § 4.4 qu'il est possible de modifier le modèle pour prendre en compte le caractère anisotrope de la fonction de corrélation et corriger ainsi le comportement du modèle.

4.2.3 Inversion du produit de convolution

Le développement de l'équation de relaxation elliptique utilise le fait que la fonction $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-r/L)/4\pi r$, qui apparaît dans le produit de convolution (4.14), est la fonction de Green de \mathbb{R}^3 associée à l'opérateur $1/L^2 - \nabla^2$. Or, ceci n'est pas tout à fait

exact dans la mesure où L n'est pas constant. En utilisant cette propriété, on commet donc une *erreur d'inversion*.

L'importance de celle-ci dépend de l'amplitude des variations de L sur la région qui contribue significativement à l'intégrale. Cette région est restreinte, car $\mathcal{G}_{\mathbf{R}^3}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ tend rapidement vers zéro quand la séparation augmente. On peut estimer en première approximation que cette région est une sphère de rayon L . Sur cette sphère, la variation de L est de l'ordre de $L\|\nabla L\|$. On peut donc négliger la variation relative de L seulement si $\|\nabla L\|$ est petit devant 1. Or, près d'une paroi L est approximativement donné par κy , la constante de Kármán valant $\kappa \simeq 0,41$. Par conséquent, $\|\nabla L\|$ n'est pas négligeable devant 1 et on ne peut pas considérer L comme une constante dans (4.14).

L'équation de relaxation elliptique est donc entachée d'une erreur d'inversion, dont les conséquences sont difficiles à évaluer. Cependant, on voit intuitivement que la variation de L et l'asymétrie de la fonction de corrélation sont indissociables : l'échelle de corrélation variant rapidement avec y , la distance de corrélation est plus grande du côté des $y' > y$ que du côté $y' < y$ et f est alors asymétrique. Nous verrons au § 4.4 qu'il est possible d'éviter cette erreur d'inversion en travaillant dans un espace transformé dans lequel L est constant, et que l'équation de relaxation elliptique modifiée aura un meilleur comportement que l'équation originale.

4.2.4 Échelle de longueur

L'une des hypothèses du modèle qui est le plus souvent mise en question est l'utilisation de l'échelle de Kolmogorov comme borne inférieure dans le modèle (4.47) de l'échelle de longueur. Or, la signification physique de l'échelle de longueur apparaissant dans le modèle (4.9), et, par conséquent, la manière de l'évaluer à partir de données de simulation directe n'est pas si évidente qu'il y paraît à première vue.

Tout d'abord, notons qu'il ne s'agit pas d'une échelle intégrale. En effet, une telle échelle peut être définie à partir de l'équation intégrale de ϕ_{ij}^* , en utilisant la définition standard (4.10) de la fonction de corrélation \mathcal{F} . Avec cette définition, ϕ_{ij}^* s'écrit sous la forme (4.11), qui suggère la définition de l'échelle intégrale suivante :

$$L_{int}^2(\mathbf{x}) = \left| \int_{\Omega} \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \right| \quad (4.50)$$

Ainsi définie, L_{int} est une échelle intégrale, car elle exprime le rapport entre $\rho\phi_{ij}^*$, qui est donné par l'intégrale (4.6) des corrélations en deux points, et la corrélation en un point :

$$\rho\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = \pm L_{int}^2(\mathbf{x}) \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (4.51)$$

Cependant, cette échelle n'est pas le L du modèle, car les définitions respectives (4.8) et (4.10) de f et de \mathcal{F} sont différentes.

Néanmoins, on peut noter que L est l'intégrale de zéro à l'infini de la fonction $\exp(-r/L)$. On serait alors tenté d'évaluer l'échelle de longueur dans chaque direction par l'intégrale sur une ligne de la fonction de corrélation issue de la DNS. Malheureusement, cette définition conduit à des paradoxes dans les directions d'homogénéité. Par exemple, pour déterminer l'échelle de longueur correspondant à Ψ_{11} , l'intégrale suivante doit être évaluée :

$$L_{\mathbf{m}} = \int_0^{\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{x} + r\mathbf{m}) dr \quad (4.52)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\Psi_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + r\mathbf{m})}{\Psi_{11}(\mathbf{x} + r\mathbf{m}, \mathbf{x} + r\mathbf{m})} dr \quad (4.53)$$

où \mathbf{m} est un vecteur unitaire définissant la direction d'intégration. Or, on a :

$$\Psi_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -2u_1(\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_1}(\mathbf{x}') \quad (4.54)$$

et si \mathbf{m} est choisi dans la direction de l'écoulement, l'intégrale est identiquement nulle, en raison de l'homogénéité dans cette direction². On arrive alors à la conclusion que l'échelle de corrélation dans la direction de l'écoulement est nulle, ce qui est évidemment incorrect.

Ce problème vient du fait que dans l'intégrale (4.52), les différentes régions n'ont pas le bon poids. En effet, la seule manière correcte d'évaluer une échelle de longueur par une intégrale est d'utiliser (4.50). Prenons alors l'exemple d'une turbulence isotrope dans l'espace non-borné \mathbb{R}^3 . Dans ce cas, l'intégrale (4.50) se réduit à :

$$L_{int}^2(\mathbf{x}) = \left| \int_0^{\infty} r \mathcal{F}(\mathbf{x}, r) dr \right| \quad (4.55)$$

ce qui est très différent de (4.52) : le facteur r donne un poids plus important aux grandes séparations.

Par conséquent, une définition très simple de l'échelle de corrélation va être utilisée. On peut en effet remarquer que la fonction $\exp(-r/L)$ prend la valeur $1/e$ pour $r = L$. L'échelle de corrélation dans chaque direction \mathbf{m} peut donc être définie comme la norme r de la séparation $\mathbf{x}' - \mathbf{x} = r\mathbf{m}$ pour laquelle la fonction de corrélation prend la valeur $1/e$. L'échelle $L_{\mathbf{m}}$ est donc définie implicitement par :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x} + L_{\mathbf{m}}\mathbf{m}) = \frac{1}{e} \quad (4.56)$$

2. Dans la simulation directe, l'homogénéité est simulée par une périodicité, et l'intégrale est alors également identiquement nulle.

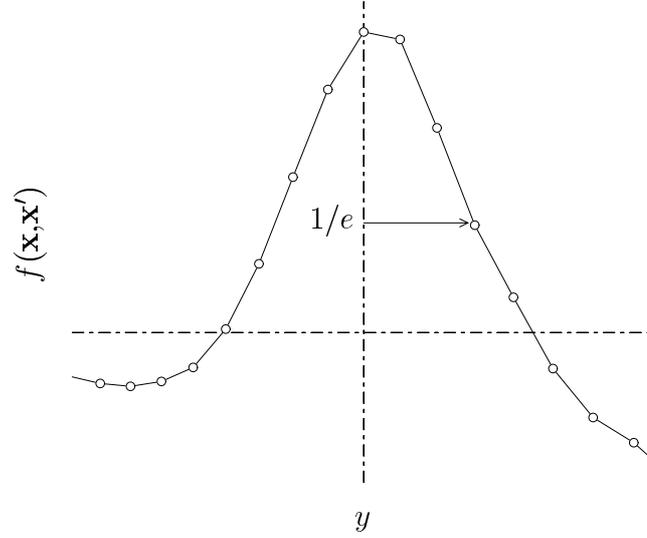


FIG. 4.2 – Définition de l'échelle de corrélation $L_{\mathbf{m}}$ avec, ici, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_y$.

comme illustré sur la figure 4.2. L'échelle de corrélation mesure donc la demi-largeur du pic de la fonction de corrélation³.

Contrairement à l'échelle intégrale, cette définition ne caractérise que la largeur du pic de la fonction de corrélation : les régions d'excursions négatives de f (cf. annexe C, figure 2) sont complètement ignorées. Cependant, si l'on compare loin de la paroi l'échelle de corrélation (dans la direction y) et l'échelle intégrale (cf. annexe C, figure 13), on voit qu'elles sont identiques sur une grande partie de l'écoulement⁴.

Ce résultat est très intéressant. Il montre tout d'abord que les excursions négatives n'ont pas de poids significatif dans l'intégrale définissant l'échelle intégrale. Ce résultat justifie *a posteriori* l'utilisation de la demi-largeur du pic de f pour évaluer l'échelle de corrélation. Ensuite, cela montre que, loin de la paroi, les fonctions de corrélation f et \mathcal{F} sont identiques : de la même manière que l'on peut assimiler $\partial U_i / \partial x_j(\mathbf{x}')$ à $\partial U_i / \partial x_j(\mathbf{x})$ dans l'intégrale (3.4) définissant la partie rapide du terme de pression (hypothèse quasi-homogène), on peut assimiler $\Psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$ à $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ dans (4.12). En revanche, on doit s'attendre à ce que ceci ne soit plus vrai à proximité de la paroi, où $\Psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$ subit des variations rapides, de manière similaire au résultat trouvé par Bradshaw *et al.* [11]. Et en effet, on peut voir sur la figure 13 de l'annexe C que les échelles de corrélation et

3. L'expression *demi-largeur* est ici abusive, dans la mesure où le pic n'étant pas symétrique, les deux « demi-largeurs » ne sont pas égales, comme on peut le voir sur la figure 4.2.

4. La décroissance rapide de L_{int} au-delà de $y^+ = 400$ visible sur cette figure n'est pas physique, elle est due à l'erreur numérique, car les deux quantités $\phi_{ij}^*(\mathbf{x})$ et $\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, dont le rapport est évalué pour calculer L_{int} (équation 4.51), tendent vers 0 au centre du canal.

intégrale se séparent au dessous de $y^+ \simeq 50$.

De plus, on peut voir également sur cette figure que l'échelle de longueur turbulente $L_T = C_L k^{3/2} \varepsilon^{-1}$ reproduit quasiment parfaitement l'échelle intégrale sur tout l'écoulement, à condition bien sûr de choisir le coefficient adéquat. Ce coefficient dépend de la composante de ϕ_{ij}^* considérée, problème lié à l'utilisation d'une fonction de corrélation scalaire (cf. § 4.2.1)⁵.

On peut donc utiliser l'échelle turbulente L_T pour représenter l'évolution de l'échelle de corrélation tant que cette dernière est identique à l'échelle intégrale. En revanche, au-dessous de $y^+ \simeq 50$, la figure montre que l'échelle de corrélation doit être modélisée par l'échelle de Kolmogorov $L_K = C_L C_\eta \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$. De plus, le point où L_T et L_K se croisent est approximativement situé à l'endroit où l'échelle de corrélation et l'échelle intégrale divergent⁶. Ce résultat justifie donc totalement la modélisation de L par le maximum de L_K et de L_T (équation 4.47).

4.2.5 Condition aux limites homogène sur le gradient de pression

Une autre hypothèse utilisée au cours du développement de l'équation de relaxation elliptique est la condition aux limites de Neumann homogène (4.3) sur le gradient de pression. Cette hypothèse n'a pas vraiment de conséquences importantes : en effet, on peut utiliser le caractère linéaire de (4.2) et séparer la pression en deux termes, p^a et p^b , vérifiant :

$$p = p^a + p^b \quad (4.57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \frac{\partial p^a}{\partial x_k} = \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\partial p^a}{\partial x_k} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (4.58)$$

5. De plus, c'est l'échelle de corrélation dans la direction y qui a été tracée ici. Du fait de l'anisotropie de la fonction de corrélation, on obtiendrait un coefficient différent en choisissant une autre direction.

6. Il est à noter que le point de croisement de L_T et L_K est régi par le coefficient C_η . Or, sur la figure 13 de l'annexe C, c'est bien la valeur originale $C_\eta = 80$ qui a été utilisée.

$$\begin{cases} \nabla^2 \frac{\partial p^b}{\partial x_k} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\partial p^b}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \right) \end{cases} \quad (4.59)$$

Kim [64] a montré à partir des données de DNS [66] dans un canal à $Re_\tau = 180$, que l'on pouvait négliger la pression de Stokes, qui est la partie de la pression qui « porte » la condition aux limites non-homogène de l'équation (2.10). p^b est l'équivalent de la pression de Stokes pour l'équation (4.2), et nous admettrons qu'elle peut également être négligée.

Nous avons donc travaillé uniquement avec p^a et « oublié » p^b . Ce dernier contient une partie de l'information sur les conditions aux limites, mais cela n'a pas de conséquences, car les conditions aux limites de l'équation de relaxation elliptique dérivent directement de considérations d'équilibre des bilans des tensions de Reynolds à la paroi.

4.2.6 Utilisation de la fonction de Green de \mathbf{R}^3

Nous avons utilisé au § 4.1.1 l'approximation de la fonction de Green du domaine G_Ω par la fonction de Green de \mathbf{R}^3 . On peut alors légitimement se demander si l'équation de relaxation elliptique que l'on en déduit est valable dans n'importe quel domaine, et en particulier ce qu'il advient en présence d'une paroi.

Pour cela, plaçons-nous dans le domaine semi-infini $\Omega = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, qui est limité par une paroi plane située en $y = 0$. La fonction de Green de ce domaine est [30] :

$$G_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} - \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|} \quad (4.60)$$

La présence du terme image dans la fonction de Green est due au fait que l'on résout un problème de Neumann homogène sur le gradient de pression. En effet, c'est ce terme qui assure la bonne condition aux limites de la solution sous forme intégrale (4.5) de l'équation de Poisson du gradient de pression, car on a :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial p}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_k}(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (4.61)$$

C'est donc bien la nullité de la dérivée normale de la fonction de Green à la paroi qui assure la bonne condition aux limites.

De la même manière qu'au § 2.2.2, on peut remarquer que le terme image prend en compte l'effet d'écho de paroi, cette fois-ci non plus sur la pression elle-même, mais

sur le gradient de pression. Cet effet est moins intuitif, car il ne correspond pas à un phénomène acoustique, mais il est tout à fait similaire, les équations vérifiées par $\partial p/\partial x_k$ étant les mêmes que celles vérifiées par la pression (cf. § 2.2.2). De la même manière que l'effet d'écho de paroi sur la pression a pour conséquence une intensification de la corrélation pression-déformation ϕ_{ij} , celui sur le gradient de pression induit une amplification de ϕ_{ij}^* . Notamment, à la paroi, le terme d'écho est exactement égal au terme principal et représente donc la moitié de l'intégrale totale. Par conséquent, on peut se demander si le fait de considérer qu'on peut remplacer la fonction de Green (4.60) par celle de l'espace \mathbb{R}^3 n'est pas une hypothèse qui va pénaliser l'utilisation du modèle à proximité d'une paroi. Nous allons voir qu'il n'en est rien, car l'équation de relaxation elliptique contient en fait implicitement le terme d'écho de paroi.

En effet, de manière analogue à celle associée à l'opérateur laplacien, la fonction de Green \mathcal{G}_Ω associée à l'opérateur elliptique $1/L^2 - \nabla^2$ dans le domaine $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ fait apparaître un terme image :

$$\mathcal{G}_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\exp(-\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|/L)}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} + \frac{\exp(-\|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|/L)}{4\pi\|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|} \quad (4.62)$$

L'équation de relaxation elliptique contient donc bien, implicitement, la prise en compte d'un terme image. Cependant, ce terme image n'est pas rigoureusement équivalent à celui qui provient du terme image dans l'équation de ϕ_{ij}^* . En effet, la solution sous forme intégrale de l'équation de relaxation elliptique (4.16) dans le domaine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ s'écrit :

$$\rho \phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = - \int_\Omega \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \left(\frac{\exp\left[-\frac{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}{L}\right]}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} + \frac{\exp\left[-\frac{\|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|}{L}\right]}{4\pi\|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|} \right) dV(\mathbf{x}') \quad (4.63)$$

Or, l'équation intégrale de ϕ_{ij}^* (4.6) s'écrit, dans ce domaine :

$$\rho \phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = - \int_\Omega \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left(\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} + \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|} \right) dV(\mathbf{x}') \quad (4.64)$$

ce qui donne, en utilisant le modèle (4.9) pour la fonction de corrélation :

$$\rho \phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = - \int_\Omega \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \left(\frac{\exp\left[-\frac{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}{L}\right]}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} + \frac{\exp\left[-\frac{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}{L}\right]}{4\pi\|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|} \right) dV(\mathbf{x}') \quad (4.65)$$

Les équations (4.63) et (4.65) diffèrent par l'argument de l'exponentielle du terme image, qui fait intervenir \mathbf{x}^* dans la première, et \mathbf{x}' dans la seconde. Ainsi, le terme de pression modélisé (4.65) n'est pas, dans ce domaine, rigoureusement solution de l'équation de relaxation elliptique (4.16). Cependant, le terme image dans l'intégrande est important principalement quand le point \mathbf{x}' est au voisinage de la paroi. Sa contribution est essentielle uniquement lorsque $1/4\pi\|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|$ est du même ordre de grandeur que $1/4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$, c'est-à-dire très près de la paroi. Or, dans cette région, les fonctions $\exp(-\|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|/L)$ et $\exp(-\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|/L)$ sont, de même, quasiment égales. L'effet d'écho de paroi, qui est représenté par le terme image dans (4.65), est donc pris en compte implicitement par l'équation de relaxation elliptique. Ceci est dû au caractère elliptique de l'opérateur, qui est l'une des principales propriétés du modèle. L'équation de relaxation elliptique peut donc être considérée comme valide en présence d'une paroi. On admettra qu'elle peut être utilisée dans un domaine de géométrie quelconque.

4.2.7 Utilisation de la fonction f_{ij}

L'équation de relaxation elliptique a été développée comme modèle de ϕ_{ij}^* et, par extension, de $\mathcal{P}_{ij} = \phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^*$, ce qui ne pose aucun problème particulier, par linéarité de l'équation. En revanche, l'application de cette équation à $f_{ij} = \mathcal{P}_{ij}/k$ ne semble pas justifiée *a priori*. Cette manipulation a été introduite au § 4.1.3 pour assurer le bon comportement asymptotique de la tension de Reynolds $\overline{v^2}$ à la paroi.

En fait, l'introduction de f_{ij} est totalement justifiée, car elle est indispensable pour rétablir le comportement asymptotique de ϕ_{ij}^* , qui est perdu en introduisant le modèle (4.8). En effet, le comportement près de la paroi de ϕ_{ij}^* peut s'analyser en écrivant ce terme sous la forme :

$$\rho \phi_{ij}^* = C_{ij} u_i' (\partial p / \partial x_j)' + C_{ji} u_j' (\partial p / \partial x_i)' \quad (4.66)$$

où les primes désignent les valeurs *rms* et C_{ij} est le coefficient de corrélation entre u_i et $\partial p / \partial x_j$. La condition aux limites utilisée pour $\partial p / \partial x_i$ est une condition de Neumann homogène. Par conséquent, $(\partial p / \partial x_i)'$ tend vers une valeur finie. Le coefficient de corrélation, quant à lui, n'a aucune raison de tendre vers zéro, et tend donc également vers une valeur finie. Par conséquent, ϕ_{ij}^* se comporte à l'ordre dominant comme le plus grand de u_i' et de u_j' , ce qui peut s'écrire :

$$\phi_{ij}^* = O(u_i') + O(u_j') \quad (4.67)$$

résultat conforme aux comportements décrits dans le tableau 2.1.

Ce comportement asymptotique se retrouve évidemment dans l'équation intégrale de ϕ_{ij}^* , qui peut s'écrire :

$$\rho\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = \overline{u_i(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_j}(\mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') + u_j(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}')} \quad (4.68)$$

Le comportement quand $y \rightarrow 0$ est ici régi par les termes $u_i(\mathbf{x})$ et $u_j(\mathbf{x})$. En revanche, en utilisant le modèle (4.8)–(4.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \rho\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \overline{u_i(\mathbf{x}') \frac{\partial p}{\partial x_j}(\mathbf{x}') \exp\left(-\frac{r}{L}\right) G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') +} \\ &\quad \int_{\Omega} \overline{u_j(\mathbf{x}') \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}') \exp\left(-\frac{r}{L}\right) G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}')} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Dans cette équation, les termes u_i et u_j ne sont plus des fonctions de \mathbf{x} , mais de \mathbf{x}' . Par conséquent, quand \mathbf{x} tend vers la paroi, l'intégrale (4.69) ne se comporte plus en $O(u'_i) + O(u'_j)$, mais tend vers une valeur finie.

La seule manière de conserver le bon comportement asymptotique serait de remplacer le modèle :

$$\overline{u_i(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial x_j}(\mathbf{x}') = u_i(\mathbf{x}') \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}') \exp\left(-\frac{r}{L}\right)} \quad (4.70)$$

par

$$\overline{u_i(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial x_j}(\mathbf{x}') = u'_i(\mathbf{x}) \frac{u_i(\mathbf{x}') \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}')}{u'_i(\mathbf{x}')} \exp\left(-\frac{r}{L}\right)} \quad (4.71)$$

Avec ce modèle, on conserverait le comportement asymptotique de ϕ_{ij}^* en $O(u'_i) + O(u'_j)$. Malheureusement, la formulation (4.71) n'est pas invariante par changement de repère, et ne peut donc pas être utilisée telle quelle.

Cependant, nous avons vu au § 4.1.3.2 que la fonction f_{ij} a été essentiellement introduite pour rendre compte correctement du comportement asymptotique de $\overline{v^2}$, et donc pour imposer la bonne condition aux limites sur ϕ_{22}^* . Or, ϕ_{22}^* se comporte en $O(v')$, et on a $O(v') = O(k)$. Par conséquent, si on utilise le modèle :

$$\overline{u_i(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial x_j}(\mathbf{x}') = k(\mathbf{x}) \frac{u_i(\mathbf{x}') \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}')}{k(\mathbf{x}')} \exp\left(-\frac{r}{L}\right)} \quad (4.72)$$

on préserve un ordre correct pour ϕ_{22}^* . Or, en utilisant ce modèle, on arrive à l'équation de relaxation elliptique suivante :

$$\frac{\phi_{ij}^*}{k} - L^2 \nabla^2 \frac{\phi_{ij}^*}{k} = \frac{\phi_{ij}^h}{k} \quad (4.73)$$

qui peut être combinée avec une équation de relaxation elliptique empirique portant sur $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*)/k$, pour donner l'équation de f_{ij} (4.32).

On voit donc que le passage de l'équation (4.24) portant sur \mathcal{P}_{ij} à l'équation (4.32) portant sur f_{ij} , qui peut paraître relativement arbitraire, est en fait totalement justifiée.

4.3 Analyse critique du modèle au second ordre

De la même manière qu'au § 3.1.3 pour les modèles classiques, nous allons tenter de dégager les avantages et les inconvénients du modèle au second ordre utilisant la relaxation elliptique. Nous insisterons sur les défauts des modèles classiques qui sont corrigés mais aussi sur ceux qui ne le sont pas et sur les difficultés supplémentaires que peut apporter ce modèle.

4.3.1 Améliorations apportées

Non-localité. L'incontestable qualité de ce modèle est son caractère non-local. En résolvant une équation différentielle sur le terme de pression, on évite de faire dépendre ce dernier uniquement de quantités évaluées au point considéré. Cette propriété rend possible la prise en compte au niveau des tensions de Reynolds des effets cinématiques décrits au § 2.2.2, et, en particulier, de l'effet de blocage. Ce dernier est reproduit correctement à la paroi, au moins sur la composante $\overline{v^2}$, grâce à l'imposition d'un équilibre correct entre la diffusion moléculaire, la dissipation et le terme de pression, qui permet de prédire le comportement en y^4 de $\overline{v^2}$, comme le montre la figure 4.4. Dans des régions plus lointaines, jusqu'à une distance déterminée par l'échelle de longueur L utilisée dans le modèle, l'effet de blocage est simulé par le fait que l'opérateur elliptique tend à « raccorder » la solution à la condition aux limites. Cet effet à distance est rendu possible par le caractère elliptique de l'équation, qui est lui-même une conséquence de la conservation de la non-localité, grâce à la modélisation directe de la fonction de corrélation.

La reproduction de l'effet de blocage est essentielle, car il est, comme nous l'avons vu au § 2.2.2, l'expression de l'incompressibilité du fluide au niveau fluctuant. Mis à part l'introduction de termes d'« écho de paroi », qui posent de nombreux problèmes, la méthode de la relaxation elliptique est la *seule méthode connue actuellement* pour prendre en compte cet effet. Cette propriété justifie à elle seule l'utilisation du modèle de Durbin. Elle explique que ce modèle soit capable de reproduire de manière remarquable les anisotropies, comme le montre la figure 4.3. Sa forme réduite à trois

équations de transport, le $\overline{v^2-f}$, que nous allons présenter plus loin, s'est révélée capable de prédire correctement les anisotropies en proche paroi pour un grand nombre d'écoulements différents, sans aucune modification d'un écoulement à l'autre : canal, écoulements décollés, jet impactant, couche limite 3D, etc.

Non-utilisation de l'hypothèse quasi-homogène. L'un des principaux points faibles des modèles classiques est l'utilisation de l'approximation du gradient de vitesse par son développement limité à l'ordre zéro dans l'expression intégrale du terme rapide (cf. § 3.1.1.1). Il a été montré au § 3.1.3.3 que cette hypothèse n'est valide que pour $y^+ > 40$, et qu'elle oblige à introduire des corrections très fortes pour pouvoir intégrer les modèles classiques jusqu'à la paroi.

Dans la méthode de la relaxation elliptique, l'hypothèse quasi-homogène n'est pas utilisée explicitement. Cependant, elle l'est implicitement puisque le terme source est remplacé par un modèle quasi-homogène. En fait, cela n'introduit pas de problème, car la solution de l'équation de relaxation elliptique est déterminée par les conditions aux limites dans une vaste région : on peut voir sur les figures 4.7–4.9 que la très mauvaise solution donnée par le modèle quasi-homogène au voisinage de la paroi est très largement corrigée, grâce aux fortes conditions aux limites. Laurence & Durbin [90] ont comparé les solutions données par l'équation de relaxation elliptique portant sur f_{22} avec deux modèles comme terme source : le modèle Rotta+IP et le modèle cubique de Craft & Launder [23]. Alors que ces deux modèles donnent normalement des résultats complètement différents, lorsqu'ils sont utilisés comme terme source de l'équation de relaxation elliptique, les prédictions sont presque identiques jusqu'à $y^+ = 25$. Ceci montre que les conditions aux limites sont suffisamment fortes pour imposer le comportement du modèle dans la sous-couche visqueuse et dans une partie de la zone tampon. Par conséquent, les effets néfastes de l'utilisation de l'hypothèse quasi-homogène pour construire les modèles classiques sont complètement occultés par leur incorporation dans l'équation de relaxation elliptique.

Simplicité. Le résultat évoqué au paragraphe précédent montre qu'il est inutile d'utiliser comme terme source des modèles non-linéaires, dont la complexité n'a pour origine que la nécessité de pallier l'utilisation de l'hypothèse quasi-homogène. Le modèle le plus simple (Rotta+IP) est donc en général préféré, ou, à la limite, le SSG, pour éviter la surestimation de la redistribution dans la zone logarithmique.

Par conséquent, les modèles utilisant la relaxation elliptique sont très simples et comportent peu de termes : le modèle original [38], avec comme terme source le modèle

Rotta+IP, est totalement linéaire. Ceci contraste avec les modèles classiques, qui introduisent de nombreuses non-linéarités, que ce soit dans des termes supplémentaires ou dans des fonctions d'amortissement.

Or, la simplicité présente de nombreux avantages : tout d'abord, elle permet au modèle d'être facilement accessible à d'autres personnes que celles qui l'ont conçu ; ensuite, elle permet de comprendre plus facilement le rôle des différents termes et leurs influences respectives dans les écoulements complexes, ce qui est essentiel dans le cadre d'une utilisation industrielle ; enfin, elle rend en général plus facile la résolution des systèmes et plus rapide la convergence des résultats, en particulier dans les applications industrielles où les maillages sont très souvent à peine assez fins. La méthode de la relaxation elliptique ne rend d'ailleurs pas nécessaire un extrême raffinement du maillage à la paroi, un premier point à $y^+ = 1$ étant largement suffisant.

4.3.2 Problèmes non-résolus

Dans la construction du modèle de Durbin au § 4.1.4, de nombreux éléments des modèles classiques ont été repris, et par conséquent, certains problèmes en ont été hérités.

Tout d'abord, l'équation de transport de ε est pratiquement la même. Les différences, telles que l'utilisation d'une échelle de temps bornée par l'échelle de Kolmogorov, correspondent à des choix qui ne sont pas liés à la méthode de la relaxation elliptique. Les défauts habituels dus à l'équation de ε , décrits au § 3.1.3.3, sont donc toujours présents.

De la même manière, le cas de la marche descendante, dont l'intensité de la recirculation est sous-estimée par les modèles classiques, n'est pas mieux résolu par le modèle de Durbin [70, 120, 121] : l'hypothèse mise en cause est la modélisation des corrélations triples par un simple modèle de gradient généralisé, le même que celui utilisé dans les modèles classiques. De même, le rétablissement de la couche limite en aval de la bulle de recirculation n'est pas amélioré. En revanche, il est à noter que, paradoxalement, le modèle $\overline{v^2-f}$, présenté plus loin, dans lequel les corrélations triples sont modélisées à l'aide de la viscosité turbulente, reproduit quasiment parfaitement l'écoulement sur une marche descendante (cf. annexe D).

Un autre point n'est pas parfaitement résolu : le comportement asymptotique des composantes \overline{uv} et \overline{vw} à la paroi (figure 4.4). Nous avons remarqué au § 3.1.3.2 que la grande majorité des modèles classiques ne parvient pas à reproduire correctement les comportements asymptotiques des tensions de Reynolds. Le modèle de Durbin, quant à lui, donne entière satisfaction pour les composantes $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$ et \overline{uw} , mais pas pour \overline{uv}

et \overline{vw} . En effet, on obtient un comportement en y^4 au lieu de y^3 . Cependant, ce défaut est relativement mineur. Par exemple, dans un canal, où \overline{vw} est nul, le rôle essentiel de \overline{vw} est d'extraire de l'énergie de l'écoulement moyen et d'alimenter la composante $\overline{u^2}$ à travers le terme de production P_{11} . Or, son trop fort amortissement est uniquement sensible dans la sous-couche visqueuse, où la production est de toute façon négligeable (cf. figure 2.7). Il est donc préférable que \overline{vw} soit sous-estimé que surestimé dans cette région, car dans ce cas la production P_{11} prédite par le modèle pourrait ne plus être négligeable dans le bilan de $\overline{u^2}$.

4.3.3 Points faibles spécifiques

Nous allons maintenant passer en revue les principales faiblesses spécifiques à la méthode de la relaxation elliptique, et qui sont à l'origine des travaux d'amélioration entrepris durant cette thèse, exposés en détail dans l'article en annexe C.

Amplification en zone logarithmique. Tout d'abord, le défaut le plus important du modèle est celui souligné par Wizman *et al.* [163]: l'opérateur elliptique induit un comportement erroné en zone logarithmique. En effet, on peut déterminer analytiquement la solution de l'équation (4.43) dans cette zone, en utilisant les approximations classiques: $\phi_{ij}^h = A^h/y$, $k = u_\tau^2/C_\mu^{1/2}$ et $\varepsilon = u_\tau^3/\kappa y$, où A^h est une constante. On voit alors que le terme source se comporte en $1/y$, et si on cherche une solution $f_{ij} = \Gamma f_{ij}^h$, on obtient :

$$\Gamma = \frac{1}{1 - 2C_L^2 C_\mu^{-3/2} \kappa^2} \quad (4.74)$$

En choisissant C_L de telle manière que $C_L^2 C_\mu^{-3/2} = 1$, ce qui correspond à $L = \kappa y$, on obtient le facteur d'amplification $\Gamma = 1.51$. Ce résultat ne représente pas directement la solution de l'équation différentielle, dans la mesure où les conditions aux limites ne sont pas prises en compte. Il donne cependant une indication sur le comportement du modèle dans la zone logarithmique.

L'amplification de la redistribution dans cette zone n'est évidemment pas souhaitable: le modèle Rotta+IP surestimant déjà la redistribution, il serait préférable que l'équation de relaxation elliptique produise un amortissement de celle-ci. Cette amplification est obtenue quel que soit le modèle quasi-homogène choisi comme terme source, car ils se comportent tous approximativement en $1/y$ dans la zone logarithmique. Avec un modèle comme le SSG, qui prédit une redistribution correcte, il serait souhaitable que l'équation de relaxation elliptique soit neutre, c'est-à-dire ne produise ni amplification, ni réduction. Les conséquences de ce défaut ne sont pas négligeables. En effet,

cela rend difficile la prédiction correcte à la fois de la sous-couche visqueuse (vitesse de frottement) et de la zone logarithmique et contraint fortement le choix des coefficients.

Les raisons de ce défaut du modèle ont fait l'objet d'une étude approfondie durant cette thèse. Ces travaux sont longuement exposés dans l'article en annexe C. La principale conclusion est que ce défaut est dû à la modélisation trop grossière de la fonction de corrélation. En effet, la très forte inhomogénéité de l'écoulement, due à la présence de la paroi, induit une asymétrie de la fonction de corrélation dans la direction normale. Comme il a été montré au § 4.2.2, l'absence de prise en compte de cette propriété a pour conséquence de surestimer le poids relatif des points situés entre le point courant et la paroi : l'effet non-local modélisé privilégie la région de paroi au détriment de la région centrale. Comme dans la zone logarithmique la corrélation en un point décroît très rapidement (figure 4.1), l'intégrale du produit fonction de corrélation–corrélation en un point est surestimée. Or, la forme de la fonction de corrélation est à l'origine de la forme de l'opérateur elliptique : c'est pourquoi celui-ci provoque une amplification de la redistribution dans la zone logarithmique.

Nous verrons au § 4.4 comment il est possible de prendre en compte cette asymétrie, et ainsi de développer de nouvelles formes de l'équation de relaxation elliptique qui ne présentent pas le même défaut d'amplification que la forme originale.

Autres points faibles. Pour éviter les fonctions d'amortissement dans le modèle, toute dépendance en Re_T a été supprimée. Or, nous avons signalé au § 2.2.3 que les effets cinématiques et dynamiques, qui affectent la turbulence en présence d'une paroi, peuvent se manifester indépendamment les uns des autres. Ils doivent donc être pris en compte séparément dans les modèles. L'effet de blocage est sans aucun doute le plus important, et sa reproduction grâce à un opérateur non-local est la grande force du modèle. Cependant, l'effet des bas nombres de Reynolds peut aussi être significatif, et peut surtout se manifester en dehors des régions pariétales. Le modèle de Durbin ne prend pas en compte ces effets : il s'agit donc plus d'un modèle *de proche paroi* que d'un modèle *bas-Reynolds*.

L'un des points les plus souvent critiqués du modèle est l'ajout de six équations supplémentaires, à savoir une équation de relaxation elliptique par tension de Reynolds. De plus, ces équations sont souvent couplées deux à deux avec les équations de transport des tensions de Reynolds, de manière à pouvoir imposer implicitement les conditions aux limites (4.31), (4.40) et (4.41) sur f_{22} , f_{12} et f_{23} , respectivement. En effet, ces conditions aux limites faisant intervenir la tension de Reynolds correspondante, il est préférable de coupler les équations pour stabiliser le modèle en rendant implicite

cette dernière. Le modèle est donc, il est vrai, plus lourd à gérer qu'un simple modèle utilisant des fonctions d'amortissement, comme par exemple le modèle de Shima [140]. En revanche, par rapport à des modèles cubiques, tel que le modèle TCL [25], le nombre plus important d'équations est compensé par la simplicité du modèle, et notamment par sa linéarité qui rend les systèmes beaucoup plus faciles à résoudre.

4.4 Reformulation du modèle

Les possibilités qui ont été étudiées durant la thèse pour corriger le défaut principal du modèle, l'amplification de la redistribution en zone logarithmique, sont exposées en détail dans l'article donné en annexe C. Nous allons uniquement ici en retracer la démarche et en rappeler les conclusions.

4.4.1 Fonction de corrélation asymétrique

Nous avons souligné au § 4.2.2 que la modélisation de la fonction de corrélation $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ par une fonction exponentielle est trop simple et ne permet pas de prendre en compte l'asymétrie de l'effet non-local. L'équation de relaxation elliptique qui en découle produit alors une amplification de la redistribution dans la zone logarithmique, signalée à la section précédente.

Une solution simple est donc de dissymétriser la fonction de corrélation, en identifiant par exemple la direction d'inhomogénéité à l'aide du gradient de l'échelle de longueur, de la manière suivante :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\frac{r}{L + \beta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla L}\right) \quad (4.75)$$

Cette simple modification permet de développer une nouvelle forme de l'équation de relaxation elliptique :

$$(1 + 16\beta(\nabla L)^2)\phi_{ij}^* - L^2\nabla^2\phi_{ij}^* - 8\beta L\nabla L \cdot \nabla\phi_{ij}^* = \phi_{ij}^h \quad (4.76)$$

Cette formulation diffère de la formulation originale par la présence de deux termes supplémentaires : $16\beta(\nabla L)^2\phi_{ij}^*$ et $-8\beta L\nabla L \cdot \nabla\phi_{ij}^*$. Ces deux termes ont un effet bénéfique sur le modèle, car ils tendent à réduire la redistribution. En effet, la même analyse que celle faite au § 4.3.3 montre que le facteur d'amplification de cette formulation est :

$$\Gamma = \frac{1}{1 + 2(12\beta - 1)C_L^2 C_\mu^{-3/2} \kappa^2} \quad (4.77)$$

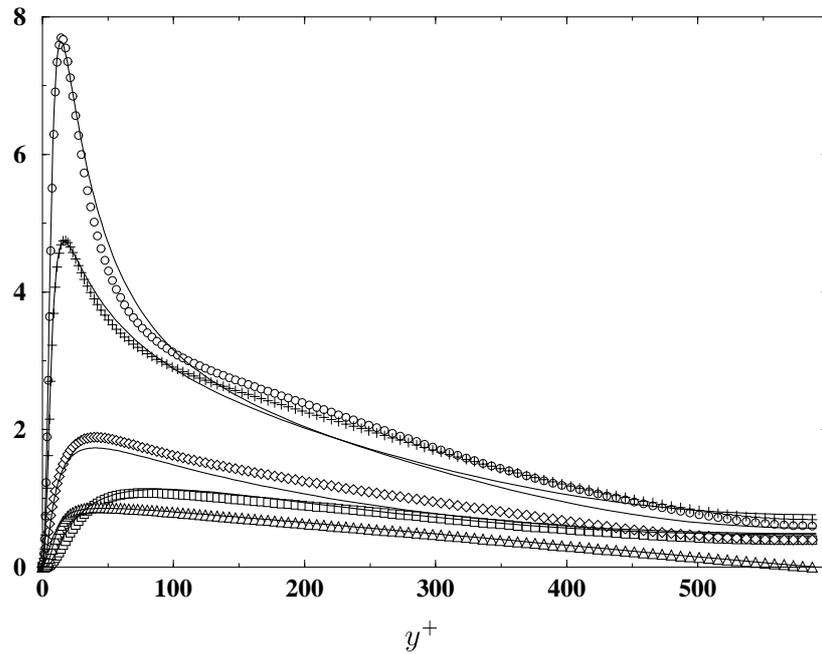


FIG. 4.3 – Énergie turbulente et tensions de Reynolds données par le modèle de Durbin dans un canal à $Re_\tau = 590$. Symboles : DNS de Moser et al. [110]; lignes : modèle. + k ; $\circ \overline{u^2}$; $\square \overline{v^2}$; $\diamond \overline{w^2}$; $\triangle -\overline{uv}$.

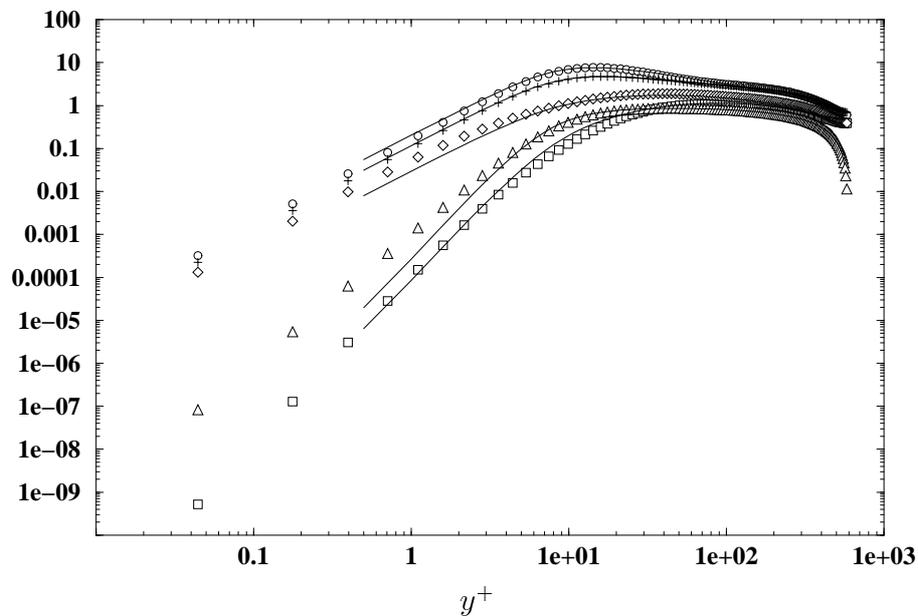


FIG. 4.4 – Même figure que 4.3 en échelles logarithmiques.

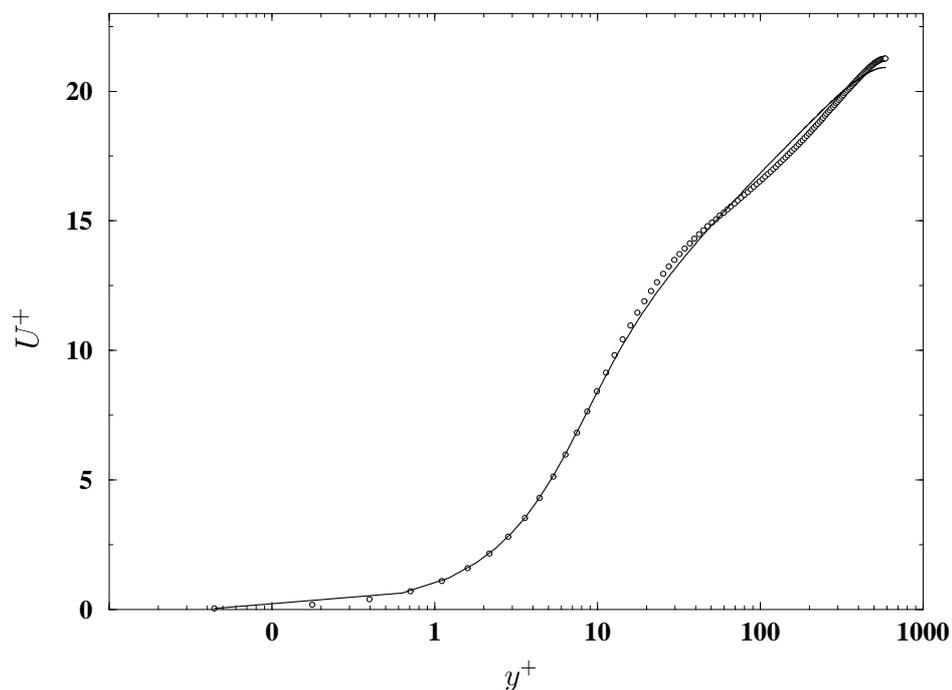


FIG. 4.5 – Vitesse moyenne U donnée par le modèle de Durbin dans un canal à $Re_\tau = 590$. \circ DNS de Moser et al. [110]; — modèle.

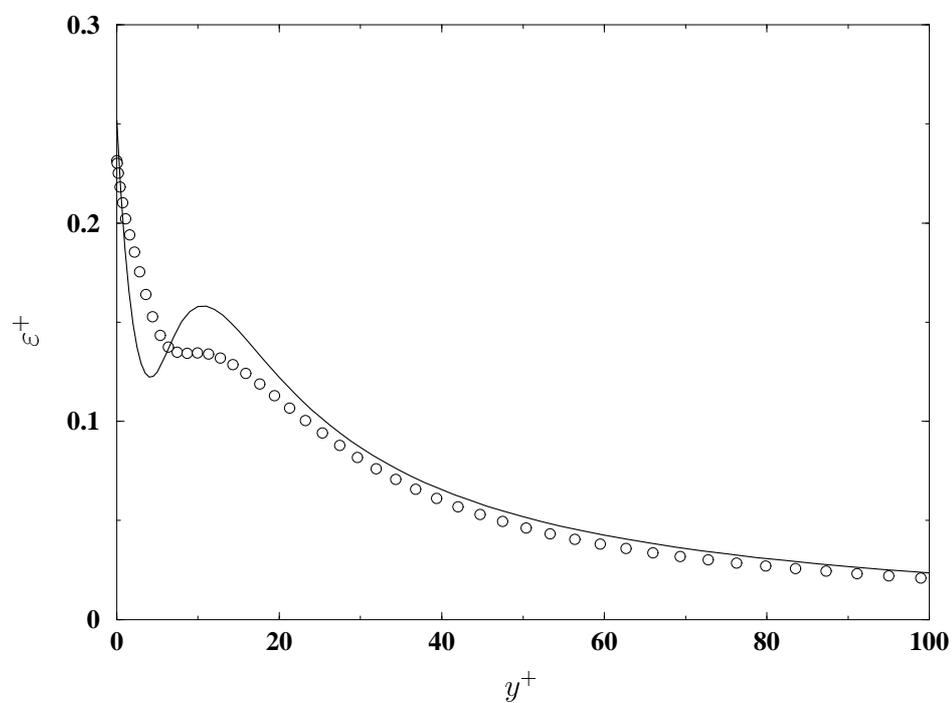


FIG. 4.6 – Taux de dissipation donné par le modèle de Durbin dans un canal à $Re_\tau = 590$. \circ DNS de Moser et al. [110]; — modèle.

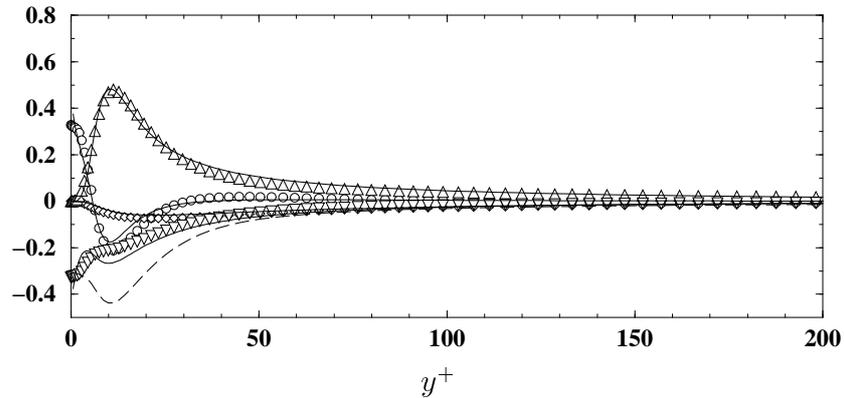


FIG. 4.7 – Bilan de $\overline{u^2}$ prédit par le modèle de Durbin dans un canal à $Re_\tau = 590$. Symboles : DNS de Moser et al. [110]; lignes : modèle. \circ $D_{11}^\nu + D_{11}^T$; \diamond Φ_{11}^* ; \triangle P_{11} ; ∇ ε_{11} ; --- Φ_{11}^h (Rappelons que, pour le modèle, une partie de la dissipation est incluse dans le terme de redistribution).

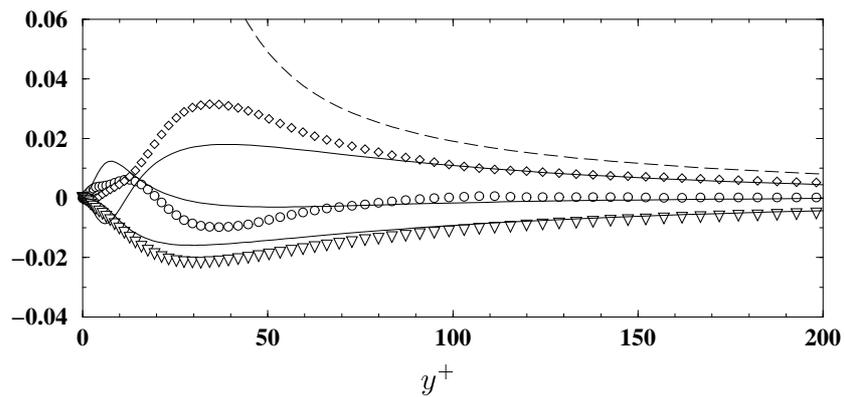


FIG. 4.8 – Bilan de $\overline{v^2}$. Voir la figure 4.7 pour les légendes. (Φ_{22}^h tend vers 0,28 à la paroi)

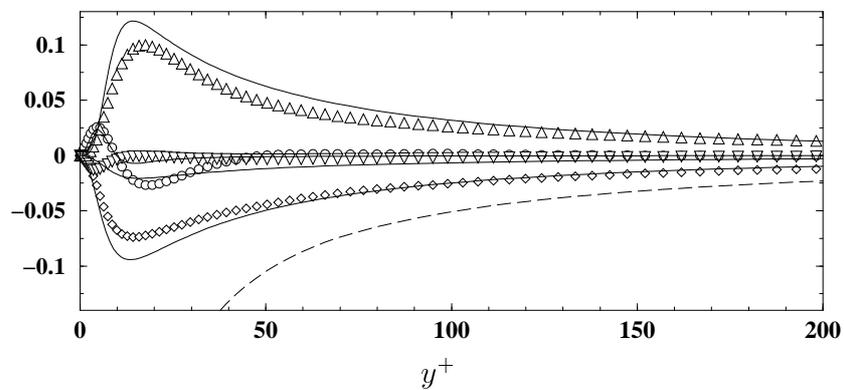


FIG. 4.9 – Bilan de $-\overline{uv}$. Voir la figure 4.7 pour les légendes. (Φ_{12}^h tend vers $-0,28$ à la paroi)

En fonction du coefficient β , qui détermine la plus ou moins forte asymétrie de la fonction de corrélation, on obtient différents facteurs d'amplification. Avec $\beta = 0$, on retrouve le modèle original ($\Gamma = 1,51$) et si on fait tendre β vers l'infini, le facteur d'amplification tend vers zéro. Entre les deux, on peut obtenir n'importe quelle valeur de Γ . En particulier, avec $\beta = \frac{1}{12}$, on a $\Gamma = 1$ et le modèle est donc neutre.

Ceci permet d'adapter le comportement de l'équation de relaxation elliptique au modèle utilisé comme terme source. Avec le modèle Rotta+IP, qui surestime la redistribution en zone logarithmique, on peut choisir un coefficient $\beta > \frac{1}{12}$. Or, Wizman *et al.* ont obtenu de bons résultats avec la formulation suivante :

$$\phi_{ij}^* - L^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{L^2} \nabla (L^2 \phi_{ij}^*) \right) = \phi_{ij}^h \quad (4.78)$$

caractérisée par le facteur d'amplification :

$$\Gamma = \frac{1}{1 + 2C_L^2 C_\mu^{-3/2} \kappa^2} \quad (4.79)$$

qui vaut 0,75. Cette formulation, totalement empirique, a donné de bons résultats dans un canal : on peut penser qu'en utilisant la formulation (4.76) avec $\beta = \frac{1}{6}$ qui donne le même facteur d'amplification, on obtiendra également une amélioration des résultats.

4.4.2 Transformation de l'espace

Une autre possibilité pour améliorer le modèle consiste à tenter de corriger l'erreur d'inversion notée au § 4.2.3. Pour cela, on peut définir une transformation de l'espace $\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$, de telle manière que l'échelle de longueur de corrélation L soit approximativement constante dans l'espace d'arrivée. Ainsi, on peut appliquer la même méthode que celle appliquée au § 4.1.1 dans l'espace transformé (cf. annexe C), dans lequel on obtient une équation de relaxation elliptique, sans erreur d'inversion puisque la transformation $\boldsymbol{\alpha}$ a été choisie pour minimiser les variations de L . Pour revenir dans l'espace physique, il est nécessaire de modéliser la matrice jacobienne \mathcal{A}_{ij} de la transformation inverse $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$. Par exemple, en 1D, pour compenser les variations de L (dilater l'espace là où L est petit et le contracter là où il est grand), on voit aisément qu'il faut choisir $\boldsymbol{\alpha}$ tel que :

$$\frac{d\alpha_2}{L_\alpha} = \frac{dy}{L(y)} \quad (4.80)$$

Cette relation se généralise en 3D, ce qui donne pour la matrice jacobienne :

$$A_{ij} = \frac{L_{ij}}{L_\alpha} \quad (4.81)$$

L'équation de relaxation elliptique obtenue en repassant dans l'espace physique est alors :

$$\phi_{ij}^* - L_{kl}L_{ml} \frac{\partial^2 \phi_{ij}^*}{\partial x_k \partial x_m} - L_{ml} \frac{\partial L_{kl}}{\partial x_m} \frac{\partial \phi_{ij}^*}{\partial x_k} = \phi_{ij}^h \quad (4.82)$$

Il reste à modéliser L_{ij} . Le choix le plus naturel est :

$$L_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\overline{u_i u_j}}{k} L \quad (4.83)$$

Même si cette nouvelle formulation de l'équation de relaxation elliptique a été développée seulement pour corriger l'erreur d'inversion, la transformation de l'espace pour que L soit constant corrige également en partie l'asymétrie de la fonction de corrélation dans la direction normale à la paroi (cf. annexe C, figure 14). Grâce à l'utilisation d'une matrice jacobienne liée aux tensions de Reynolds, on peut de même annuler une partie de l'anisotropie de la fonction de corrélation. Dès lors, le modélisation de cette fonction par une exponentielle isotrope est bien meilleure dans l'espace transformé que dans l'espace physique.

On voit que dans l'expression (4.82) apparaît un terme similaire à celui présent dans la précédente formulation (4.76), de la forme $L \nabla L \cdot \nabla \phi_{ij}^*$. Ce terme joue dans le sens de la réduction de la redistribution, et (4.82) est une formulation *quasi-neutre*, car son facteur d'amplification est donné par :

$$\Gamma = \frac{1}{1 - \frac{9}{4} \left(\frac{\overline{u_1 u_2^2}}{k^2} + \frac{\overline{u_2 u_1^2}}{k^2} \right) C_L^2 C_\mu^{-3/2} \kappa^2} \quad (4.84)$$

qui vaut 1,06 en prenant les valeurs classiques des anisotropies en zone logarithmique : $a_{12} = -0,30$; $a_{22} = -0,42$.

La formulation (4.82) comprenant un nombre important de termes, il pourrait sembler préférable, pour alléger les calculs, de simplifier l'expression de la matrice d'échelles de longueur L_{ij} , on négligeant l'anisotropie :

$$L_{ij} = L \delta_{ij} \quad (4.85)$$

qui conduit à l'équation de relaxation elliptique :

$$\phi_{ij}^* - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^* - L \nabla L \cdot \nabla \phi_{ij}^* = \phi_{ij}^h \quad (4.86)$$

Le facteur d'amplification associé à cette formulation est donné par :

$$\Gamma = \frac{1}{1 - C_L^2 C_\mu^{-3/2} \kappa^2} \quad (4.87)$$

qui vaut 1,2. On voit donc que le terme $L\nabla L \cdot \nabla \phi_{ij}^*$ joue dans le bon sens, mais, malheureusement, n'est pas suffisant à lui seul pour corriger l'amplification due au terme $L^2\nabla^2\phi_{ij}^*$. La formulation (4.86) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\phi_{ij}^* - L\nabla \cdot (L\nabla \phi_{ij}^*) = \phi_{ij}^h \quad (4.88)$$

qui est à rapprocher des formulations neutres proposées par Wizman *et al.* [163] :

$$\phi_{ij}^* - \nabla^2 (L^2 \phi_{ij}^*) = \phi_{ij}^h \quad (4.89)$$

Laurence & Durbin [89] :

$$\phi_{ij}^* - \nabla \cdot (L^2 \nabla \phi_{ij}^*) = \phi_{ij}^h \quad (4.90)$$

et Durbin & Laurence [41] :

$$\phi_{ij}^* - L\nabla^2 (L\phi_{ij}^*) = \phi_{ij}^h \quad (4.91)$$

4.4.3 Test *a priori* des nouvelles formulations

L'étude théorique montre donc que les formulations proposées à la section précédente ont un meilleur comportement que le modèle original. Nous allons maintenant confirmer ces résultats par des tests *a priori* sur les données de simulation directe en canal à $Re_\tau = 590$ de Moser *et al.* [110]. Nous ne nous intéressons ici qu'à la prédiction du terme de pression ϕ_{ij}^* , et non au terme total \mathcal{P}_{ij} comprenant une partie de la dissipation. L'équation résolue est donc, pour la formulation originale :

$$\frac{\phi_{ij}^*}{k} - L^2\nabla^2 \frac{\phi_{ij}^*}{k} = \frac{\phi_{ij}^h}{k} \quad (4.92)$$

La forme de l'opérateur de relaxation elliptique, qui est dans cette équation $1 - L^2\nabla^2$ est différente pour les autres formulations testées, à savoir (4.78), (4.76), (4.89) et (4.82). Le terme source ainsi que l'échelle de longueur et l'énergie turbulente sont issues des données de simulation directe. L'équation de relaxation elliptique est alors résolue par inversion directe de la matrice du système, avec, au centre du canal, une condition de symétrie et, à la paroi, la condition de Dirichlet :

$$\left. \frac{\phi_{ij}^*}{k} \right|_{y=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\phi_{ij}^{* \text{ DNS}}}{k^{\text{DNS}}} \quad (4.93)$$

Tout d'abord, la figure 4.10 montre les résultats obtenus pour la composante ϕ_{22}^* avec comme terme source le modèle Rotta+IP. On peut voir que ce modèle, sans relaxation elliptique, outre le fait qu'il a un très mauvais comportement près de la paroi,

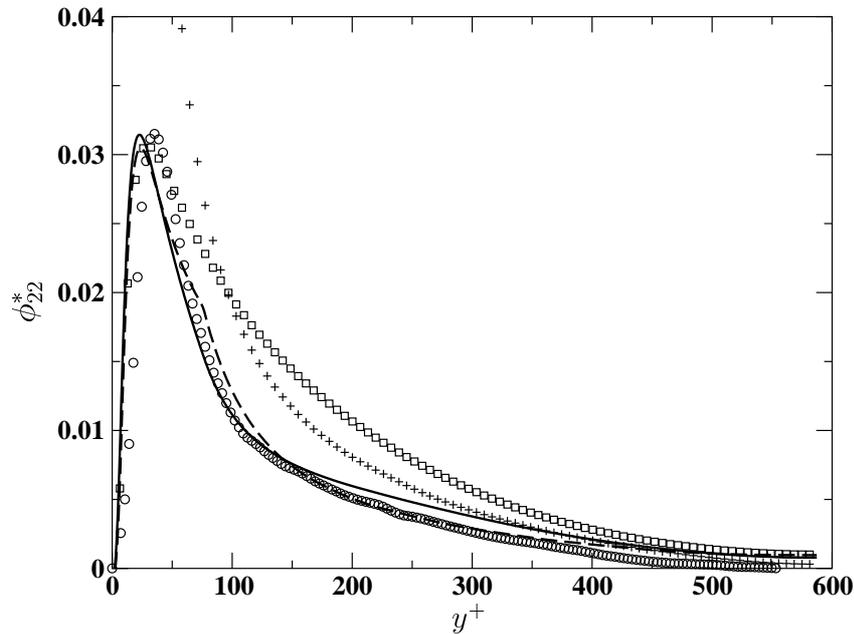


FIG. 4.10 – Tests a priori de différentes formulations de l'équation de relaxation elliptique (composante ϕ_{22}^*). Terme source et échelle de longueur issus de la DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. + terme source ϕ_{22}^h (modèle Rotta+IP) ; \circ ϕ_{22}^* issu de la DNS ; \square modèle original ; --- modèle (4.78) de Wizman et al. ; — proposition (4.76) avec $\beta = \frac{3}{12}$.

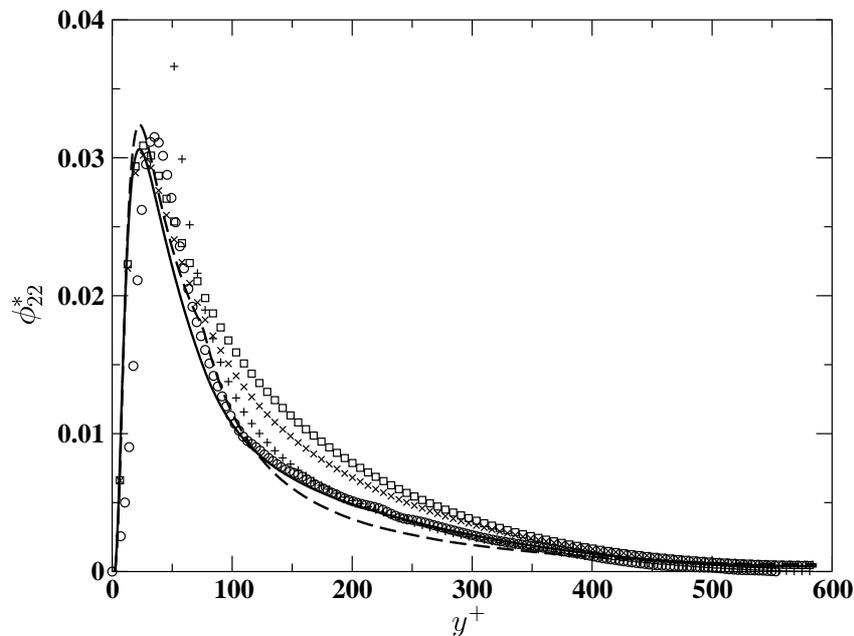


FIG. 4.11 – Même test que sur la figure 4.10 avec comme terme source le modèle SSG. + terme source ϕ_{22}^h (modèle SSG) ; \circ ϕ_{22}^* issu de la DNS ; \square modèle original ; --- modèle neutre (4.89) de Wizman et al. ; — proposition (4.76) avec $\beta = \frac{2}{12}$; \times proposition anisotrope (4.82)–(4.83).

surestime la redistribution dans la zone logarithmique. Le modèle de Durbin, sous sa forme originale, corrige quasiment parfaitement la prédiction près de la paroi (le pic de ϕ_{22}^* est légèrement décalé), ce qui montre l'importance de la condition à la paroi : même si le terme source est complètement faux dans la sous-couche visqueuse et la zone tampon, la condition aux limites, qui, elle, est exacte, suffit à imposer la bonne solution. En revanche, dans la zone logarithmique, le modèle original de Durbin, comme prévu par la théorie, amplifie ϕ_{22}^* , alors qu'un amortissement serait préférable.

De manière à améliorer la prédiction, on peut utiliser les formulations dont le facteur d'amplification théorique est inférieur à 1. Tout d'abord, on voit que la formulation (4.78) de Wizman *et al.* donne un excellent résultat. Il faut néanmoins signaler que cette formulation a été obtenue en cherchant l'opérateur elliptique de la forme $1 - L^a \nabla \cdot (L^b \nabla L^c)$, avec $a + b + c = 2$, qui donne la meilleure prédiction sur le présent test.

La formulation (4.76), quant à elle, a été proposée au § 4.4.1 sur une base théorique, et seul le coefficient β peut être adapté. Quand on fait croître β , on obtient, comme prévu par la théorie, un amortissement de plus en plus fort de la redistribution. La courbe de la figure 4.10 a été obtenue en utilisant le coefficient $\beta = \frac{3}{12}$. On voit que cette formulation donne des résultats aussi bons, voire meilleurs, que celle de Wizman *et al.*, du moins dans la première partie de la zone logarithmique ($y^+ < 100$). En revanche, dans la zone centrale ($y^+ > 200$), on peut noter une surestimation résiduelle de la redistribution.

Sur la figure 4.11 sont tracés les résultats obtenus avec comme terme source le modèle SSG. On peut voir que ce modèle, sans relaxation elliptique, donne de bien meilleurs résultats que le modèle Rotta+IP. Aucune correction n'est nécessaire au-delà de la zone tampon : ce sont donc, dans ce cas, des formulations neutres qui doivent être utilisées.

Remarquons, tout d'abord, que la forme originale du modèle, tracée ici pour comparaison, amplifie encore une fois largement la redistribution dans la zone logarithmique.

La formulation (4.89) de Wizman *et al.*, neutre en théorie, donne en fait une légère réduction de ϕ_{22}^* . Cet écart entre la théorie et les résultats n'est pas vraiment surprenant : la théorie n'est en toute rigueur valable que dans la limite des nombres de Reynolds infinis. De la même manière, le résultat théorique pour la formulation (4.76) n'est pas exactement vérifié : alors qu'elle devrait être neutre pour $\beta = \frac{1}{12}$, elle donne avec ce coefficient un légère amplification. En revanche, on peut voir sur la figure 4.11 qu'avec le coefficient $\beta = \frac{2}{12}$, la prédiction de la redistribution est quasiment parfaite sur l'ensemble de l'écoulement : seul le décalage du pic de ϕ_{22}^* , défaut commun à toutes

les formulations, persiste.

Enfin, la dernière formulation testée est la formulation *quasi-neutre* (4.82). La figure montre que celle-ci prédit un profil de ϕ_{22}^* meilleur que la formulation originale de Durbin, mais bien moins bonne que les deux formulations neutres. Une amplification de la redistribution bien plus importante que celle prévue par la théorie est obtenue.

4.5 Conclusion du chapitre

Ces tests *a priori* des nouvelles formulations de l'équation de relaxation elliptique terminent la partie théorique de la thèse. Nous avons montré, tout d'abord, grâce à l'analyse sur données de simulation directe des corrélations en deux points entre vitesse et laplacien du gradient de pression que la méthode de la relaxation elliptique repose sur des bases relativement solides. En effet, alors que les hypothèses qui la soutendent avaient été formulées empiriquement par Durbin [35, 38], la plupart d'entre elles s'avèrent tout à fait consistantes avec les données de simulation directe.

Nous avons également montré que le comportement du modèle en zone logarithmique, qui n'est pas totalement satisfaisant, est dû au fait que les hypothèses du modèle ne sont que des approximations « au premier ordre ». En prenant en compte de manière plus fine les caractéristiques de la fonction de corrélation, il est possible d'obtenir de nouvelles formulations de l'équation de relaxation elliptique qui ne présentent pas le même défaut que la formulation originale.

Le modèle au second ordre de Durbin est donc très prometteur en ce qui concerne le problème qui nous occupe, la simulation de la turbulence en proche paroi, car il permet de prédire de manière très satisfaisante les anisotropies en canal. De plus, contrairement aux modèles utilisant des fonctions d'amortissement, ou des termes non-linéaires, pour corriger le mauvais comportement dû aux hypothèses quasi-homogène et locale, le bon comportement du modèle de Durbin est obtenu sans aucune correction ni manipulations des équations pour « faire coller » les résultats aux données. Cette qualité augure d'une bien plus grande universalité du modèle.

Malheureusement, les contraintes industrielles, et notamment le besoin de prouver la faisabilité de l'implantation de modèles à relaxation elliptique dans le code N3S pour des applications industrielles à court terme, ne nous ont pas permis de développer plus avant l'étude des résultats donnés par les nouvelles formulations. Nous avons dû nous intéresser exclusivement à la forme réduite à trois équations de transport du modèle de Durbin, le modèle $\overline{v^2-f}$.

Chapitre 5

Le modèle $\overline{v^2-f}$

Utilisation dans un code industriel

Dans un cadre industriel, l'utilisation des modèles au second ordre reste souvent très limitée. C'est pourquoi Durbin [35] a proposé une version simplifiée de son modèle au second ordre, réduite à trois équations de transport, et utilisant le concept de viscosité turbulente. Ce modèle a été appelé à l'origine $k-\varepsilon-\overline{v^2}$, il est plus couramment désigné aujourd'hui par $\overline{v^2-f}$.

Ce modèle a été choisi pour être implanté dans le code industriel N3S pour sa simplicité et le fait que, contrairement au modèle au second ordre de Durbin, il a été appliqué, avec succès, à un grand nombre de cas : écoulement avec gradient de pression adverse [39], écoulements instationnaires [39], couche limite 3D [119], écoulement 3D avec tourbillon en fer à cheval [119], écoulement aérodynamiques [93], jets impactants [6, 117].

L'objectif de ce chapitre est de montrer la faisabilité de l'implantation de ce modèle dans le code industriel N3S, développé à EDF, et son applicabilité à des écoulement d'intérêt industriel.

5.1 Présentation du modèle

5.1.1 Équations

Nous avons vu au § 3.2 que les modèles à viscosité turbulente doivent être fortement corrigés par des fonctions d'amortissement pour pouvoir être appliqués dans les régions de paroi. Comme pour le modèle au second ordre de Durbin, le $\overline{v^2-f}$ va être construit de manière à éviter l'utilisation de ces fonctions *ad hoc*, qui pénalisent l'universalité des

modèles.

La plus importante de ces fonctions d'amortissement est la fonction f_μ , qui permet de corriger la très forte surestimation de la viscosité turbulente à l'approche de la paroi, et par conséquent de la tension de cisaillement \overline{uv} (figure 3.6). C'est cette fonction qui doit être supprimée en priorité.

Pour cela, notons que le terme de diffusion turbulente de Daly & Harlow modifié utilisé dans le modèle au second ordre de Durbin (cf. équation 4.42) peut s'écrire sous la forme :

$$D_{ij}^T = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\nu_{Tlm}}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} \right) \quad (5.1)$$

où ν_{Tlm} est une viscosité turbulente généralisée :

$$\nu_{Tlm} = C_\mu \overline{u_l u_m} T \quad (5.2)$$

Or, dans un canal, le terme de diffusion turbulente (5.1) se réduit à :

$$D_{ij}^T = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{C_\mu \overline{v^2} T}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial y} \right) \quad (5.3)$$

Ceci suggère que, dans un canal, on puisse simplement utiliser la viscosité turbulente scalaire suivante :

$$\nu_T = C_\mu \overline{v^2} T \quad (5.4)$$

La figure 5.1 montre que ce modèle, proposé initialement par Launder [78], représente aussi bien la viscosité turbulente que le modèle de Lam & Bremhorst, sans utiliser de fonction d'amortissement.

Cependant, les tensions de Reynolds n'étant pas résolues, on ne dispose pas de $\overline{v^2}$ dans un modèle à viscosité turbulente. Le reconstruire par l'équation de Boussinesq n'étant évidemment pas possible, Durbin [35] a proposé de résoudre une équation de transport de $\overline{v^2}$. Pour cela, on peut remarquer que, dans un canal, l'équation de transport de $\overline{v^2}$ du modèle au second ordre de Durbin (4.42)–(4.43) s'écrit :

$$\frac{D\overline{v^2}}{Dt} = k f_{22} - \frac{\overline{v^2}}{k} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{C_\mu \overline{v^2} T}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial y^2} \quad (5.5)$$

avec

$$f_{22} - L^2 \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial y^2} = \frac{1 - C_1}{kT} (\overline{v^2} - \frac{2}{3}k) + \frac{2}{3} \frac{C_2}{k} P \quad (5.6)$$

On peut donc, en canal, utiliser l'expression de la viscosité turbulente (5.4), en association avec une équation de transport pour $\overline{v^2}$ et une équation de relaxation elliptique déduites respectivement de (5.5) et (5.6) :

$$\frac{D\overline{v^2}}{Dt} = k f - \frac{\overline{v^2}}{k} \varepsilon + \nabla \cdot \left((\nu + \nu_T) \nabla \overline{v^2} \right) \quad (5.7)$$

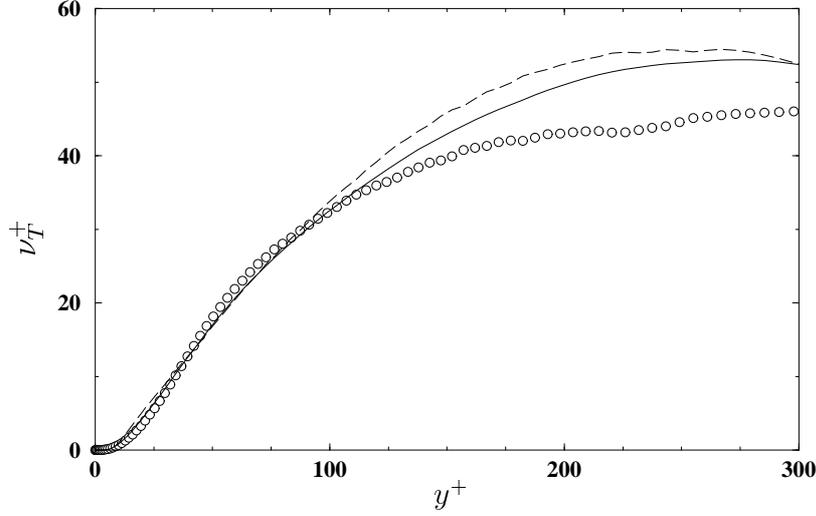


FIG. 5.1 – Tests a priori des ν_T prédits par les modèles de Lam & Bremhorst [74] et de Launder [78]. DNS de Moser et al. [110] à $Re_\tau = 590$. \circ ν_T donné par la DNS; --- modèle de Lam & Bremhorst (3.60)–(3.61); — modèle de Durbin (5.4).

et

$$f - L^2 \nabla^2 f = (C_1 - 1) \frac{(2/3 - \overline{v^2}/k)}{T} + C_2' \frac{P}{k} \quad (5.8)$$

Il est à noter dans ces équations que σ_k a été pris égal à 1, que f_{22} a simplement été noté f pour alléger les notations et que l'on a posé $C_2' = \frac{2}{3}C_2$.

L'équation de transport de k est modélisée de manière tout à fait classique :

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + \nabla \cdot ((\nu + \nu_T) \nabla k) \quad (5.9)$$

avec $P = 2\nu_T S_{ij} S_{ij}$.

L'équation transport de ε est, quant à elle, déduite directement de celle du modèle au second ordre, seul le terme de diffusion étant modifié :

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{C_{\varepsilon 1}' P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon}{T} + \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) \quad (5.10)$$

Les équations (5.4), (5.7), (5.8), (5.9) et (5.10) constituent le modèle $\overline{v^2}$ - f , les échelles de temps et de longueur étant données respectivement par (4.44) et (4.47). Les équations du modèle sont donnée *in extenso* dans l'article en annexe D avec les valeurs des coefficients. Elles sont applicables directement en géométrie quelconque. Cependant, en dehors d'un canal, on peut se demander quel est le sens physique de la variable $\overline{v^2}$.

5.1.2 Sens de $\overline{v^2}$ dans un cas général

Dans le cas d'un canal, la variable $\overline{v^2}$ est bien la tension de Reynolds normale aux parois, c'est-à-dire la tension de Reynolds dont le terme de production est nul. En revanche, dans un cas général, résoudre une équation pour une composante tensorielle isolée peut paraître choquant *a priori*. Tel qu'il est écrit, le modèle n'est pas invariant par rotation du repère.

Cependant, il ne faut pas voir $\overline{v^2}$ comme une composante tensorielle isolée mais plutôt comme une nouvelle échelle scalaire qui, en canal, se confond effectivement avec la composante $\overline{v^2}$ du tenseur de Reynolds et, dans le cas général, se confond au voisinage d'une paroi avec la composante normale.

Cette échelle scalaire permet de quantifier l'anisotropie près de la paroi. En ce sens, elle est à rapprocher des indicateurs habituellement utilisés tels que le second invariant du tenseur d'anisotropie A_2 ou le paramètre d'aplatissement de Lumley A . On peut d'ailleurs noter une certaine similitude d'approche entre le $\overline{v^2}$ - f et le modèle k - ε - A_2 de Craft *et al.* [26].

5.1.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites pour k et $\overline{v^2}$ sont les conditions exactes $k = 0$ et $\overline{v^2} = 0$. Pour ε , on utilise la condition aux limites évoquée au 2.3.3 :

$$\varepsilon = 2\nu \lim_{y \rightarrow 0} \frac{k}{y^2} \quad (5.11)$$

Pour f , on applique la même condition aux limites que pour le f_{22} du modèle au second ordre :

$$f = -\frac{20\nu^2}{\varepsilon} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{v^2}}{y^4} \quad (5.12)$$

qui permet d'obtenir un comportement asymptotique de $\overline{v^2}$ en y^4 .

5.1.4 Contraintes de réalisabilité

La réalisabilité du modèle requiert que les valeurs propres du tenseur de Reynolds restent positives. Or, l'équation de Boussinesq s'écrit, dans les axes propres du tenseur de déformation :

$$\overline{u_\alpha^2} = -2\nu_T \lambda_\alpha + \frac{2}{3}k \quad (5.13)$$

où les λ_α sont les valeurs propres du tenseur de déformation. L'équation de Boussinesq prédit une tension de cisaillement nulle dans ces axes, ce qui montre qu'il s'agit égale-

ment des axes propres du tenseur de Reynolds. Dans ce repère, les tensions diagonales $\overline{u_\alpha^2}$ sont donc les valeurs propres du tenseur de Reynolds.

La réalisabilité du modèle nécessite donc de vérifier la condition suivante :

$$\forall \alpha, 0 \leq \overline{u_\alpha^2} \quad (5.14)$$

En utilisant (5.13) et l'expression de la viscosité turbulente (5.4), on obtient la condition suivante portant sur l'échelle de temps T :

$$\forall \alpha, T \leq \frac{k}{3C_\mu \overline{v^2} \lambda_\alpha} \quad (5.15)$$

On voit donc qu'il suffit de borner T pour s'assurer que les valeurs propres du tenseur de Reynolds soit toujours positives.

L'expression (5.15) n'étant pas simple à utiliser, puisqu'elle nécessite l'évaluation des valeurs propres du tenseur de déformation, nous allons chercher une majoration ne faisant intervenir que des invariants de ce tenseur. Pour cela, notons que la trace de S_{ij} est nulle :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (5.16)$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\lambda_1^2 = \lambda_1^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3 \quad (5.17)$$

Or, $(\lambda_2 - \lambda_3)^2 \geq 0$, donc (5.17) donne :

$$\lambda_1^2 \leq 2\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2 \quad (5.18)$$

et finalement :

$$3\lambda_1^2 \leq 2\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2 = 2S_{ij}S_{ij} \quad (5.19)$$

Par permutation circulaire des indices, on en conclut :

$$\forall \alpha, |\lambda_\alpha| \leq \sqrt{\frac{2}{3} S_{ij} S_{ij}} \quad (5.20)$$

On peut donc en conclure que si on impose la majoration

$$T \leq \frac{k}{\sqrt{6} C_\mu \overline{v^2} \sqrt{S_{ij} S_{ij}}} \quad (5.21)$$

on a bien, $\forall \alpha, 0 \leq \overline{u_\alpha^2}$.

Notons que cette majoration est optimale, au sens où, lorsque deux valeurs propres du tenseur de déformation sont égales, par exemple $\lambda_2 = \lambda_3$, si $T = k/(\sqrt{6}C_\mu\overline{v^2}\sqrt{S_{ij}S_{ij}})$, on a exactement $\overline{u_1^2} = 0$.

L'imposition de la majoration (5.21) permet donc de garantir que les valeurs propres du tenseur de Reynolds restent positives, du moins tant que l'énergie turbulente reste elle-même positive.

En effet, il est à noter que la positivité des variables k , ε et $\overline{v^2}$ n'est pas garantie. En pratique, on observe qu'elles peuvent passer par des valeurs négatives, notamment au début des simulations, quand on est très loin de la solution. En revanche, on observe uniquement des valeurs positives à convergence. Les valeurs propres du tenseur de Reynolds reconstruit par l'équation de Boussinesq sont alors elles aussi positives, grâce à la condition (5.21) appliquée sur T .

De plus, l'application de la majoration (5.21) permet de corriger la forte surestimation de l'énergie turbulente près des points d'impact qui caractérise les modèles à viscosité turbulente. En effet, Durbin [40] indique que ce défaut est en partie dû à une surestimation de T , qui diminue la production de ε par rapport à celle de k (cf. équations 5.9 et 5.10). L'imposition de la contrainte (5.21) permet de réduire d'un facteur 10 l'énergie turbulente près du point d'impact (cf. [40]).

Une seconde majoration est imposée dans le modèle sur l'échelle de longueur L . Hors les parties de l'écoulement où les échelles de Kolmogorov entrent en jeu dans les expressions (4.44) et (4.47) des échelles de temps et de longueur, on a la relation $L = C_L k^{1/2} T$. Dès lors, il est logique d'utiliser pour L la majoration suivante :

$$L \leq C_L \frac{k^{3/2}}{\sqrt{6}C_\mu\overline{v^2}\sqrt{S_{ij}S_{ij}}} \quad (5.22)$$

Cette contrainte permet de limiter l'amplitude de L , et joue un rôle comparable à celui de la correction de Yap (3.51).

5.2 Implantation du modèle $\overline{v^2-f}$ dans N3S

5.2.1 Description

Le modèle $\overline{v^2-f}$ est originaire du CTR¹ et a été peu utilisé en dehors. Il a été implanté dans divers codes, aux différences finies ou aux volumes finis, utilisant tous des maillages structurés. Dans le cadre des applications industrielles intéressant EDF, en

1. Center for Turbulence Research, université de Stanford.

géométries complexes, des maillages non-structurés sont utilisés. Le code N3S, développé au Laboratoire national d'hydraulique d'EDF est un code aux éléments finis, les éléments étant des triangles en 2D et des tétraèdres en 3D. Le modèle $\overline{v^2}$ - f va donc, pour la première fois, être implanté dans un code aux éléments finis à maillages non-structurés.

5.2.1.1 Le code N3S

N3S résout les équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible en phase unique. La discrétisation spatiale utilisant la méthode des éléments finis, les équations sont résolues sous forme faible. Les éléments triangulaires ou tétraédriques sont de type P1–isoP2 : les points de discrétisation de la pression sont les sommets des éléments ; pour les autres variables, ce sont les sommets ainsi que les milieux de chaque arête. Il y a donc en 2D, trois nœuds de pression et 6 nœuds de vitesse par élément. En 3D, ces nombres sont respectivement 4 et 10.

La dénomination *iso* signifie que les variables autres que la pression ne sont pas décomposées sur une base de fonctions quadratiques (éléments P1–P2), mais linéaires par sous-éléments : en ajoutant des nœuds au milieu de chaque arête, on définit 4 sous-éléments en 2D, et 8 en 3D, sur lesquels des fonctions de base linéaires sont utilisées. Les éléments P1–isoP2 sont préférés aux éléments P1–P2 car ils vérifient la condition *inf-sup*.

La discrétisation temporelle des équations repose sur une méthode à pas fractionnaires. Le premier pas est l'étape de convection, résolue par la méthode des caractéristiques. Le deuxième pas est l'étape de diffusion des variables scalaires. Le troisième et dernier pas est la résolution du problème de Stokes généralisé (système vitesse–pression) par, au choix, l'algorithme de Chorin ou l'algorithme d'Uzawa.

Nous ne décrivons pas ici plus en détail le fonctionnement général du code N3S. Toutes les précisions complémentaires peuvent être trouvées dans [12]. Seuls les points particuliers au modèle $\overline{v^2}$ - f vont être décrits.

5.2.1.2 Implantation du modèle $\overline{v^2}$ - f

Conditions aux limites. Il peut paraître curieux de commencer par les conditions aux limites, mais celles-ci déterminent en fait très largement la méthode à utiliser pour la résolution. En effet, si les conditions à la paroi $k = 0$ et $\overline{v^2} = 0$ ne créent pas de difficultés (elles sont prises en compte par une méthode de projection, comme toujours dans N3S), en revanche, celles sur ε et f imposent une résolution couplée des équations de k et ε d'une part, et de $\overline{v^2}$ et f d'autre part.

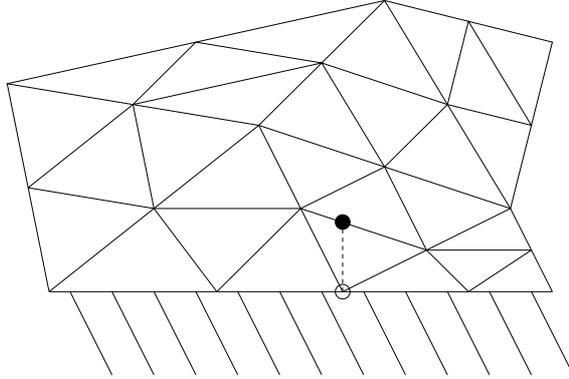


FIG. 5.2 – Méthode d'évaluation des valeurs limites apparaissant dans les conditions à la paroi (5.11) et (5.12). ○ point où les conditions aux limites $\varepsilon = 2\nu k/y^2$ et $f = -20\nu^2\overline{v^2}/\varepsilon y^4$ sont appliquées; ● point où les valeurs k/y^2 et $\overline{v^2}/y^4$ sont évaluées.

Ces conditions à la paroi, données par (5.11) et (5.12) nécessitent respectivement l'évaluation des rapports limites

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{k}{y^2} \quad (5.23)$$

et

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{v^2}}{y^4} \quad (5.24)$$

Avec un maillage orthogonal, il est facile d'évaluer ces limites comme étant simplement la valeur du rapport au premier nœud intérieur du maillage. En éléments finis triangulaires², cette méthode n'est évidemment pas applicable directement, la normale à la paroi au point considéré ne passant pas, en général, par un nœud du maillage. En revanche, comme illustré sur la figure 5.2, il suffit d'évaluer par interpolation le rapport au point d'intersection de la normale à la paroi avec la première arête du maillage rencontrée. Cette méthode assez fruste, et s'apparentant plus à des différences finies qu'à des éléments finis, a néanmoins donné entière satisfaction³.

Les conditions aux limites sur ε et f font donc intervenir respectivement les valeurs de k et de $\overline{v^2}$ en deux points⁴ à l'intérieur du domaine. La solution la plus simple

2. Le but de ce travail étant essentiellement de montrer la faisabilité de l'implantation du modèle en éléments finis non-structurés, nous n'avons considéré que des cas 2D.

3. Il est à noter que, en général, on utilise plusieurs couches de mailles orthogonales près de la paroi. Le point où les conditions aux limites sont évaluées coïncide donc dans ce cas avec un nœud du maillage.

4. Trois points en 3D.

serait de traiter les conditions aux limites de manière explicite, c'est-à-dire d'évaluer les rapports (5.23) et (5.24) à partir des valeurs de k et de $\overline{v^2}$ au pas de temps précédent. Malheureusement, cette méthode conduit à une certaine instabilité numérique : les rapports peuvent prendre de très grandes valeurs lorsque k et $\overline{v^2}$ s'écartent de leur comportements asymptotiques en y^2 et y^4 , respectivement. Notamment, au début des simulations, lorsque k et $\overline{v^2}$ sont très loin de leurs valeurs convergées, les conditions aux limites explicites déstabilisent le calcul. Il est donc préférable de prendre en compte ces conditions aux limites de manière implicite, et donc de coupler les équations de k et ε d'une part, et celles de $\overline{v^2}$ et f d'autre part.

Méthode de résolution des systèmes couplés. Deux systèmes distincts, k - ε et $\overline{v^2}$ - f sont donc à résoudre. La convection étant tout d'abord prise en compte par la méthode des caractéristiques, les dérivées particulières apparaissant dans les équations de transport de ces quatre variables peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\varphi^{(n+1)} - \tilde{\varphi}^{(n)}}{\Delta t} \quad (5.25)$$

où φ est l'une quelconque des variables, l'exposant entre parenthèses indique le numéro de l'itération temporelle, Δt la valeur du pas de temps et $\tilde{\varphi}^{(n)}$ la valeur de $\varphi^{(n)}$ convectée par la méthode des caractéristiques.

Dans la résolution des systèmes k - ε et $\overline{v^2}$ - f , certains termes sont implicites, d'autres restent explicites. Aucun test n'a été réalisé pour vérifier la nécessité ou les bénéfices tirés de ces implicitations : nous avons directement profité de l'expérience en la matière accumulée au CTR⁵. La prise en compte des différents termes est donc la suivante :

- Tous les termes de diffusion de la forme

$$\nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varphi} \right) \nabla \varphi \right) \quad (5.26)$$

sont implicites, comme toujours dans N3S, ν_T étant, lui, explicite.

- Dans le système k - ε , les termes de production de k et de ε sont explicites, les termes de dissipation sont implicites. Pour celui de k , puisqu'on résout un système couplé, on implicite directement ε . Les coefficients pondérateurs C'_{ε_1} et T sont explicites.
- Dans le système $\overline{v^2}$ - f , les termes de l'équation de $\overline{v^2}$ sont tous implicites, tandis que le terme source de celle de f est totalement explicite. Dans kf , terme « productif » de $\overline{v^2}$, k est bien sûr explicite, mais f est implicite. Dans le terme de dissipation $(\varepsilon/k) \overline{v^2}$, le facteur ε/k est explicite, $\overline{v^2}$ est implicite.

5. Sacha Parneix, communication personnelle.

On peut résumer la description précédente en écrivant les équations des deux systèmes, avec les exposants (n) pour les termes explicites et $(n+1)$ pour les termes implicites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k^{(n+1)}}{\Delta t} - \frac{\tilde{k}^{(n)}}{\Delta t} = P^{(n)} - \varepsilon^{(n+1)} + \nabla \cdot \left((\nu + \nu_T^{(n)}) \nabla k^{(n+1)} \right) \\ \frac{\varepsilon^{(n+1)}}{\Delta t} - \frac{\tilde{\varepsilon}^{(n)}}{\Delta t} = \frac{C'_{\varepsilon_1} P^{(n)} - C_{\varepsilon_2} \varepsilon^{(n+1)}}{T^{(n)}} + \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_T^{(n)}}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon^{(n+1)} \right) \end{array} \right. \quad (5.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{v^2}^{(n+1)}}{\Delta t} - \frac{\widetilde{\overline{v^2}}^{(n)}}{\Delta t} = k^{(n)} f^{(n+1)} - \frac{\overline{v^2}^{(n+1)}}{k^{(n)}} \varepsilon^{(n)} + \nabla \cdot \left((\nu + \nu_T^{(n)}) \nabla \overline{v^2}^{(n+1)} \right) \\ f^{(n+1)} - L^{(n)2} \nabla^2 f^{(n+1)} = (C_1 - 1) \frac{(2/3 - \overline{v^2}^{(n)}/k^{(n)})}{T^{(n)}} + C_2 \frac{P^{(n)}}{k^{(n)}} \end{array} \right. \quad (5.28)$$

avec, pour ε et f , les conditions aux limites :

$$\varepsilon^{(n+1)} = 2\nu \frac{k^{(n+1)}}{y^2} \quad (5.29)$$

et

$$f^{(n+1)} = -\frac{20\nu^2 \overline{v^2}^{(n+1)}}{\varepsilon^{(n)} y^4} \quad (5.30)$$

évaluées comme décrit sur la figure 5.2. Ces conditions aux limites sont prises en compte directement dans la matrice du système. La résolution des systèmes k - ε et $\overline{v^2}$ - f est effectuée par l'algorithme BI-CGSTAB [156].

5.2.2 Validation

5.2.2.1 Écoulement en canal à $Re_\tau = 395$

Pour valider l'implantation du modèle dans N3S nous allons comparer ses résultats avec ceux donnés par le même modèle implanté dans un code 1D développé au CTR⁶. Le cas du canal à $Re_\tau = 395$ a été choisi, et les résultats peuvent alors être comparés avec des données de simulation directe [110].

Le nombre de points du maillage n'étant pas limité dans ce cas très simple, nous avons volontairement choisi un maillage très fin pour les simulations avec N3S, de manière à s'affranchir de tout problème d'erreur de discrétisation. Le maillage contient 200 nœuds de vitesse dans la largeur du demi-canal. Le premier point intérieur est situé

6. Paul Durbin, communication personnelle

environ à $y^+ = 0,5$. Au centre du canal, une condition de symétrie est utilisée. Les cas monodimensionnels n'étant pas prévus dans le code N3S, on résout le problème dans un domaine 2D, contenant seulement trois nœuds dans la direction de l'écoulement, avec des conditions aux limites de périodicité. Le maillage est orthogonal, constitué d'éléments triangulaires provenant de rectangles coupés en deux suivant une diagonale.

Le maillage choisi pour le code 1D, quant à lui, contient 100 points. Le premier point intérieur est situé à $y^+ = 1,25$. Une condition de symétrie est également appliquée au centre du canal.

Le code 1D résout les équations adimensionnées par u_τ et ν , tandis que N3S résout les équations adimensionnées par U_b et h , respectivement la vitesse débitante et la demi-largeur du canal. Les simulations avec le code 1D sont donc réalisées à Re_τ imposé et celles avec N3S à Re imposé. Par conséquent, pour pouvoir comparer les deux, on a procédé de la manière suivante : tout d'abord, une simulation avec le code 1D à $Re_\tau = 395$ est réalisée. On peut alors déterminer le nombre de Reynolds Re de la simulation en intégrant le profil de U^+ , puisque :

$$\int_0^{Re_\tau} U^+ dy^+ = \frac{1}{\nu} \int_0^h U dy = \frac{hU_b}{\nu} \quad (5.31)$$

On trouve que la simulation avec le code 1D à $Re_\tau = 395$ correspond à $Re = 7\,273$. On peut alors réaliser la simulation avec le code N3S en imposant cette valeur.

La figure 5.3 compare les profils des différentes variables de l'écoulement obtenus avec les données de simulation directe. Tout d'abord, notons la parfaite coïncidence des résultats donnés par les deux codes, ce qui est le but premier de ces simulations. Ceci est obtenu alors que les maillages sont différents et, notamment, le premier point à l'intérieur du domaine, où les conditions aux limites sont évaluées, est situé à des distances différentes de la paroi dans les deux cas. Les conditions aux limites à la paroi apparaissent donc relativement indépendantes du maillage.

En comparant ces résultats avec la simulation directe, on voit que la vitesse moyenne est surestimée dans la zone logarithmique (presque inexistante pour ce faible nombre de Reynolds) et dans la zone centrale. Le débit est alors lui aussi surestimé, et le nombre de Reynolds obtenu $Re = 7\,273$ est supérieur à celui de la DNS, $Re = 6\,881$.

Le pic de k est également légèrement surestimé, mais l'anisotropie est globalement bien reproduite. La dissipation est, quand à elle, sous-estimée dans la sous-couche visqueuse et surestimée au-delà.

On voit donc que, en imposant le même frottement à la paroi que la simulation directe, on obtient des résultats presque parfaits dans la sous-couche visqueuse : pour la vitesse moyenne, ce n'est pas surprenant, puisque la pente à l'origine est imposée ;

pour k et $\overline{v^2}$, c'est la conséquence du respect rigoureux de leurs bilans asymptotiques respectifs à la paroi, imposés grâce aux conditions aux limites sur ε et f , respectivement. En ce qui concerne ε , on constate que l'introduction d'un coefficient C'_{ε_1} variable devant la production ne suffit pas à corriger totalement le profil dans la sous-couche visqueuse.

En revanche, au-delà de cette zone, les variables sont globalement surestimées. On voit donc qu'il n'est pas possible d'obtenir à la fois la bonne vitesse de frottement à la paroi et le bon débit, ou, ce qui est équivalent, à la fois le bon Re_τ et le bon Re .

Sur la figure 5.4 sont tracés les résultats obtenus en imposant, cette fois-ci, le bon nombre de Reynolds Re . La procédure est l'inverse de la précédente : connaissant le nombre de Reynolds $Re = 6\,881$ de la DNS on peut imposer cette valeur pour la simulation avec N3S. On peut alors évaluer la vitesse de frottement u^* obtenue : on en déduit que $Re_\tau = 375$, valeur que l'on impose pour la simulation avec le code 1D.

Les résultats doivent cette fois-ci être comparés adimensionnés par U_b et h . Tout d'abord, notons, une fois encore, la parfaite concordance des profils obtenus avec les deux codes.

Ensuite, les résultats de ces simulations sont bien meilleurs au centre du canal que ceux représentés sur la figure 5.3, pour toutes les variables. Ceci est dû au fait que le débit, et donc le nombre de Reynolds Re , sont respectés. L'amélioration est particulièrement probante sur U et ε .

En revanche, la vitesse de frottement n'étant pas reproduite, les résultats dans la sous-couche visqueuse sont dégradés. La pente de U est sous-estimée, ainsi que les valeurs de k et de $\overline{v^2}$. La valeur prise par ε à la paroi est également moins bien prédite (37 % au lieu de 27 % d'erreur).

On peut donc conclure de ces tests que, tout d'abord, l'implantation dans le code N3S est correcte : les inquiétudes en ce qui concerne la prise en compte des conditions aux limites (cf. § 5.2.1.2) sont en particulier levées.

Ces simulations nous ont également permis d'illustrer les conséquences de l'amplification de la redistribution dans la zone logarithmique, qui, comme signalé au § 4.3.3, rend difficile la prédiction correcte de la vitesse de frottement et de la vitesse débitante simultanément. On peut espérer que les nouvelles formulations proposées aux § 4.4, qui corrigent ce défaut d'amplification, permettent d'améliorer également les résultats du modèle $\overline{v^2-f}$. Les tests pour confirmer ou infirmer cette espérance restent à réaliser.

5.2.2.2 Marche descendante

Le second cas test choisi pour valider l'implantation du modèle $\overline{v^2-f}$ dans N3S est le cas de la marche descendante à $Re = 5\,000$, dont une simulation directe a été réalisée

par Le *et al.* [92]. Le calcul avec N3S sera validé par comparaison avec le code aux différences finies INS2D⁷.

Le domaine de calcul utilisé pour la DNS est symétrique (double marche). On utilise donc une condition de symétrie. L'origine du repère étant le coin inférieur de la marche (cf. figure 5.5), l'entrée du domaine se situe en $x/e = -3$, e désignant la hauteur de la marche. Les profils issus des données de simulation directe sont imposés comme condition d'entrée pour toutes les variables transportées, y compris $\overline{v^2}$, assimilé, dans cette portion de canal, à la tension de Reynolds $\overline{v^2}$. Pour f , la condition à l'entrée du domaine est $\partial f / \partial \mathbf{n} = 0$. Des conditions de sortie libre sont utilisées à la frontière en aval du domaine.

Le maillage P1 utilisé est représenté sur la figure 5.5. Il comprend 6 229 nœuds, ce qui correspond à 24 637 nœuds P2. Comme dans le cas du canal, le maillage a été choisi excessivement fin de manière à s'affranchir de tout problème de discrétisation.

Les résultats obtenus pour la vitesse moyenne et l'énergie turbulente sont représentés sur les figures 5.6 et 5.7. Encore une fois, la coïncidence des profils obtenus avec N3S et avec le code de référence, ici INS2D, est quasiment parfaite, ce qui achève de valider l'implantation du modèle $\overline{v^2}$ - f dans N3S. Il existe cependant un faible écart entre les coefficients de frottement obtenus avec les deux codes, tracés sur la figure 5.8 : cela vient de l'évaluation *a posteriori* de la dérivée de la vitesse à la paroi sur des maillages différents.

On peut voir sur ces figures que les résultats donnés par le $\overline{v^2}$ - f sont très satisfaisants sur ce cas⁸. Même si l'intensité de la turbulence est légèrement surestimée dans la bulle de recirculation et sous-estimée au dessus, on peut voir que les profils de vitesse correspondent de manière remarquable aux profils donnés par la DNS. Les trois caractéristiques de cet écoulement que les modèles de turbulence ne parviennent pas à prédire simultanément en général, la longueur de recirculation, l'intensité du courant de retour et le rétablissement de la couche limite en aval (cf. § 3.1.3.2), sont correctement reproduites ici.

La prédiction précise de l'intensité de la recirculation et du coefficient de frottement est le résultat le plus intéressant dans le cadre des activités d'EDF. En effet, le fait que le modèle reproduise correctement la région de proche paroi augure de sa capacité à prédire les échanges thermiques entre le fluide et la paroi.

Les cas tests du canal et de la marche descendante nous ont donc permis de valider

7. NASA Ames Research Center.

8. Signalons que les profils tracés en $x/e = -3$ sont exacts, car cette abscisse correspond à l'entrée du domaine.

l'implantation du modèle $\overline{v^2-f}$ dans le code industriel N3S. Nous allons, à la section suivante, nous intéresser à un cas plus représentatif des écoulements industriels (refroidissement d'une turbine, par exemple), le cas du canal dont l'une des parois, chauffée, est garnies de *ribs*⁹ pour augmenter les échanges thermiques entre le fluide et la paroi.

5.2.3 Canal garni de *ribs*

5.2.3.1 Présentation du cas test

Le cas test 2D du canal dont l'une des parois est garnie de *ribs* a été proposé au 7^e *workshop* ERCOFTAC/IAHR [154]. La géométrie du problème est représentée sur la figure 5.9. Deux séries de données expérimentales sont utilisées : la première, de Drain & Martin [33], ne contient que des mesures de vitesses, et correspond à un nombre de Reynolds basé sur la vitesse débitante U_b et le diamètre hydraulique de $Re_H = 37\,200$; la seconde, de Liou *et al.* [94], ne contient que des mesures de température, et correspond à $Re_H = 12\,600$.

Deux simulations différentes doivent donc être réalisées, pour lesquelles le même maillage est utilisé. Ce maillage est représenté sur la figure 5.10. Il contient 11 548 nœuds P1 et 45 736 nœuds P2. Des conditions aux limites périodiques sont appliquées.

5.2.3.2 Cas sans transferts thermiques

Les résultats donnés par le modèle $\overline{v^2-f}$ sont comparés aux données expérimentales sur les figures 5.11, 5.12 et 5.15. Les résultats donnés par le modèle $k-\varepsilon$ standard avec fonctions de paroi sont également tracés pour comparaison. Malheureusement, les données expérimentales sont relativement limitées : on dispose uniquement de la vitesse longitudinale U et des tensions de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et \overline{uv} . Dès lors, la seule variable du modèle qui peut être directement comparée aux expériences est la vitesse U .

On peut voir sur la figure 5.11 que les profils de vitesse donnés par le $\overline{v^2-f}$ et le $k-\varepsilon$ standard sont très similaires en général, sauf dans la zone de recirculation. Dans le reste du domaine, l'écoulement est essentiellement déterminé par le champ de pression induit par la géométrie et dépend peu de la turbulence. Celle-ci ne joue un rôle prépondérant que dans la bulle de recirculation et dans la couche de cisaillement entre celle-ci et le reste de l'écoulement. C'est pourquoi les deux modèles donnent des résultats très proches dans la plus grande partie du domaine.

La comparaison avec les données expérimentales semble montrer que les modèles prédisent une vitesse U trop forte dans la moitié supérieure du canal, et trop faible dans

9. Barreaux à section carrée.

la zone juste au-dessus des *ribs*, située environ entre $y/e = 1$ et $y/e = 2$. Cependant, tous les résultats présentés au *workshop* [154] donnaient les mêmes résultats dans ces zones, qu'il s'agisse de modèles à viscosité turbulente ou au second ordre. Il en a été conclu qu'il existait probablement dans les expériences des effets 3D : la présence de tourbillons contra-rotatifs axés sur x et situés entre le sommet des *ribs* et la paroi supérieure du canal peut en effet être à l'origine d'une accélération de l'écoulement dans le plan de mesure là où les tourbillons convergent et d'une décélération là où ils divergent. Il est donc difficile de tirer des conclusions des comparaisons entre les expériences et les simulations dans cette région de l'écoulement.

En revanche, on peut voir que, dans la zone située près de la paroi inférieure, entre deux *ribs* consécutifs, le modèle $\overline{v^2}$ - f reproduit correctement, malgré une légère sous-estimation, l'intensité de la recirculation. À la position $x/e = 5,32$, les données expérimentales exhibent un très léger courant de retour. Cela semble montrer qu'il n'y a en fait pas de point de recollement et que les deux zones de recirculation, l'une située derrière un *rib*, l'autre devant le *rib* suivant, sont en fait connectées. Cette propriété est visible sur les lignes de courant données par le $\overline{v^2}$ - f tracées sur la figure 5.13. Il est difficile de savoir, à la seule vue des rares données expérimentales, si ces deux zones sont séparées ou non. Une simulation des grandes échelles réalisée à EDF [154] a montré que ces deux zones se séparent et se réunissent alternativement au cours du temps, mais a semblé confirmer qu'en moyenne, elles ne forment qu'une vaste zone. En tout état de cause, le modèle k - ε , quant à lui (figure 5.14), prédit un recollement et deux zones de recirculation de trop petites dimensions et un courant de retour beaucoup trop faible (figure 5.11).

Le modèle $\overline{v^2}$ - f étant un modèle à viscosité turbulente, il est intéressant de comparer à l'expérience la tension de cisaillement \overline{uv} reconstruite par l'équation de Boussinesq (3.52). Les profils de $-\overline{uv}$ sont présentés sur la figure 5.12. Le $\overline{v^2}$ - f , comme le k - ε , donne de très mauvais résultats juste au-dessus du *rib*, notamment en $x/e = 0,1$. Aux sections $x/e = 4,18$ et $x/e = 5,32$, les prédictions sont meilleures en dessous de $y/e = 1$, mais l'écart reste important, pour les deux modèles, entre $y/e = 1$ et $y/e = 2,5$.

Le modèle $\overline{v^2}$ - f comprenant une équation de transport pour une échelle scalaire $\overline{v^2}$ qui permet de mesurer le « degré » d'anisotropie, il est également intéressant de comparer cette dernière à la tension de Reynolds $\overline{v^2}$ donnée par les mesures. Rappelons, si besoin est, que ces deux grandeurs ne sont identiques que dans le cas d'un canal simple. Ici, elles ne sont comparées qu'à titre de curiosité. On voit sur la figure 5.15 que le $\overline{v^2}$ du modèle est relativement similaire à la tension $\overline{v^2}$ dans la partie supérieure du domaine, là où l'écoulement est proche d'un écoulement en canal. En revanche, dans la

zone de recirculation, même si elles suivent une évolution similaire, les deux grandeurs sont très différentes. Cependant, le $\overline{v^2}$ du modèle reproduit correctement l'anisotropie, contrairement à la tension de Reynolds $\overline{v^2}$ reconstruite par l'équation de Boussinesq, également représentée sur la figure 5.15.

La rareté des données expérimentales, et le doute quant à leur bidimensionalité ne permettent pas de tirer de conclusions précises sur ce cas test. Cependant, la bonne prédiction de l'intensité de la recirculation est particulièrement encourageante pour le cas thermique qui va suivre. En effet, elle montre que, encore une fois, la région de proche paroi est correctement reproduite, ce qui rend possible la prédiction des transferts thermiques entre le fluide et la paroi.

5.2.3.3 Cas avec transferts thermiques

Dans ce cas, un flux thermique constant est imposé à la paroi inférieure du domaine (cf. figure 5.9). Les données expérimentales de Liou *et al.* [94] fournissent le coefficient de Nusselt à la paroi, défini par :

$$Nu = \frac{\dot{q}_p D_e}{\lambda(\Theta_p - \Theta_b)} \quad (5.32)$$

où D_e est le diamètre hydraulique, λ la conductivité thermique, Θ_p la température à la paroi et Θ_b est définie par :

$$\Theta_b = \frac{\int_0^{2H} \Theta |U| y dy}{\int_0^{2H} |U| y dy} \quad (5.33)$$

Le nombre de Nusselt est donc directement déduit des mesures du champ de température, le flux de chaleur à la paroi du canal étant connu, car imposé.

La simulation est réalisée en deux temps : la température étant considérée comme un scalaire passif, c'est-à-dire n'influant pas sur le champ de vitesse, les résolutions de la dynamique et de la thermique peuvent être découplées. Le champ de vitesse est calculé dans un premier temps, cette fois-ci à $Re_H = 12\,600$. Ensuite, on réalise une seconde simulation pour calculer uniquement le champ de température, le champ de vitesse restant figé.

Dans cette seconde simulation, deux choix sont possibles pour les conditions aux limites. Le premier consiste à résoudre de manière couplée l'équation de l'énergie dans le *rib* et dans le fluide. C'est le choix le plus difficile à mettre en œuvre, mais aussi le plus proche des conditions expérimentales. Le second choix consiste à considérer que le

flux thermique constant imposé à la face inférieure du *rib* se répercute de manière égale sur les trois autres faces. Cette hypothèse, évidemment naïve, permet cependant de ne pas résoudre l'équation de l'énergie dans le *rib*, et d'avoir des conditions aux limites très simples pour le domaine fluide : flux nul à la paroi supérieure, flux constant \dot{q}_p à la paroi inférieure entre deux *ribs* consécutifs, flux constant $\dot{q}_p/3$ sur les faces du *rib*. C'est cette seconde solution qui est le plus souvent choisie, et qui a été utilisée par tous les autres participants au *workshop*. Cependant, pour être le plus proche possible des conditions expérimentale, et parce que le code N3S peut être couplé aisément au code Syrthes, également développé à EDF et permettant de résoudre l'équation de l'énergie dans les solides, nous avons choisi la première solution. Mais pour pouvoir évaluer l'influence de ces conditions aux limites sur les résultats, nous avons également réalisé une simulation avec flux constant sur les parois du *rib*.

Le champ thermique est obtenu en résolvant l'équation de transport de la température moyenne Θ :

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial \overline{u_k \theta}}{\partial x_k} \quad (5.34)$$

où θ est la température fluctuante et α la diffusivité thermique. Une simple hypothèse de diffusivité turbulente a été choisie pour modéliser les flux thermiques :

$$\overline{u_k \theta} = -\alpha_T \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} \quad (5.35)$$

où la diffusivité turbulente α_T est exprimée en fonction de la viscosité turbulente :

$$\alpha_T = \frac{\nu_T}{Pr_T} \quad (5.36)$$

Le nombre de Prandtl turbulent Pr_T est donné par la formule de Kays & Crawford [59]

$$Pr_T = \frac{1}{0,5882 + 0,228(\nu_T/\nu) - 0,0441(\nu_T/\nu)^2 [1 - \exp(-5,165/(\nu_T/\nu))]} \quad (5.37)$$

Sur la figure 5.16 sont présentés les résultats obtenus pour le nombre de Nusselt normalisé par Nu_s , le nombre de Nusselt pour un écoulement turbulent dans une conduite lisse à section circulaire, donné par la formule de Dittus-Boelter :

$$Nu_s = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4} \quad (5.38)$$

où Pr est le nombre de Prandtl du fluide. Le rapport Nu/Nu_s caractérise l'intensification des transferts thermiques due à la présence des *ribs*.

On peut voir sur la figure 5.16 que le nombre de Nusselt obtenu avec les deux types de conditions aux limites, flux constant et couplage fluide-solide, sont parfaitement

identiques, sauf sur les faces du *rib* et à proximité des coins inférieurs de celui-ci. Ce résultat montre que les conditions aux limites sur le *rib* n'ont pas d'influence notable sur la majeure partie de la paroi du canal. Les bons résultats obtenus ne sont donc pas dûs simplement à la prise en compte de la conduction de la chaleur dans le *rib*.

Sur les faces du *rib*, les résultats sont très différents des données expérimentales. Cependant, sur ces faces, le flux thermique n'est pas connu, et il n'est pas précisé dans [94] quelle valeur est utilisée pour le calcul de Nu . Il est donc difficile, encore une fois, de tirer des conclusions en ce qui concerne le flux thermique à travers ces faces.

Sur la paroi inférieure du canal, entre deux *ribs* consécutifs, on peut distinguer deux parties : la première, entre $s/e = 2$ et $s/e = 5$, où Nu est prédit avec une excellente précision (moins de 5 % d'erreur) ; la seconde, entre $s/e = 5$ et $s/e = 8$, où Nu est légèrement sous-estimé (jusqu'à 30 % d'erreur). Cependant, ces résultats restent d'une précision remarquable, compte tenu de la simplicité des modèles dynamiques et thermiques. De plus, le modèle $\overline{v^2-f}$ était le seul parmi tous les modèles utilisés par les participants au *workshop* à être capable de reproduire correctement le Nusselt [154].

Dans le cas de la simulation couplée fluide–solide, on obtient un nombre de Nusselt négatif sur la majeure partie de la face aval du *rib*. Comme on peut le voir sur la figure 5.17, ceci vient du fait que le coin supérieur gauche du *rib* est refroidi par l'écoulement, alors qu'il y a accumulation de chaleur au pied du coin inférieur droit. Il y a alors un flux de chaleur du fluide vers le solide qui évacue une partie de la chaleur accumulée dans cette zone où le fluide est quasiment stagnant (cf. les lignes de courant dans le cas à $Re_H = 37\,200$, figure 5.13). La température y est alors beaucoup plus basse que celle obtenue lors de la simulation avec flux constant sur les parois du *ribs*.

5.3 Conclusion du chapitre

Ce chapitre, consacré au modèle $\overline{v^2-f}$, avait deux objectifs principaux : d'une part, montrer la faisabilité de l'implantation du modèle dans un code industriel aux éléments finis utilisant des maillages non-structurés ; d'autre part, tester la capacité du modèle à reproduire les caractéristiques de la turbulence, et notamment les flux thermiques à la paroi, dans un cas d'intérêt industriel. Ces deux objectifs ont été atteints de manière tout à fait satisfaisante.

Tout d'abord, les cas de validations, canal et marche descendante, ont montré que, en choisissant des maillages suffisamment fins, les résultats ne dépendent quasiment pas du code utilisé pour la simulation, même lorsque les méthodes numériques sont radicalement différentes. Ce résultat montre également que la méthode de prise en

compte des conditions aux limites sur ε et f , qui s'apparente plus à une discrétisation de type différences finies qu'éléments finis, n'a pas de conséquences dommageables sur les résultats du modèle.

Le cas test du canal garni de *ribs* a quant à lui permis de montrer que le modèle $\overline{v^2}-f$ peut être un bon compromis entre la simplicité et l'exigence de qualité des résultats pour les applications industrielles. Il s'avère qu'avec le modèle le plus simple qui soit pour les flux thermiques, on obtient des prédictions remarquables du nombre de Nusselt. Ceci montre qu'il est en premier lieu vital d'utiliser un modèle qui reproduise avec précision le champ dynamique : un modèle thermique très simple peut alors être suffisant pour obtenir un champ thermique correct. Cependant, rien n'empêche d'utiliser en association avec le $\overline{v^2}-f$ un modèle thermique plus complexe, éventuellement en reconstruisant les tensions de Reynolds *a posteriori* à l'aide d'une relation plus élaborée que l'équation de Boussinesq¹⁰.

10. Paul Durbin, communication personnelle.

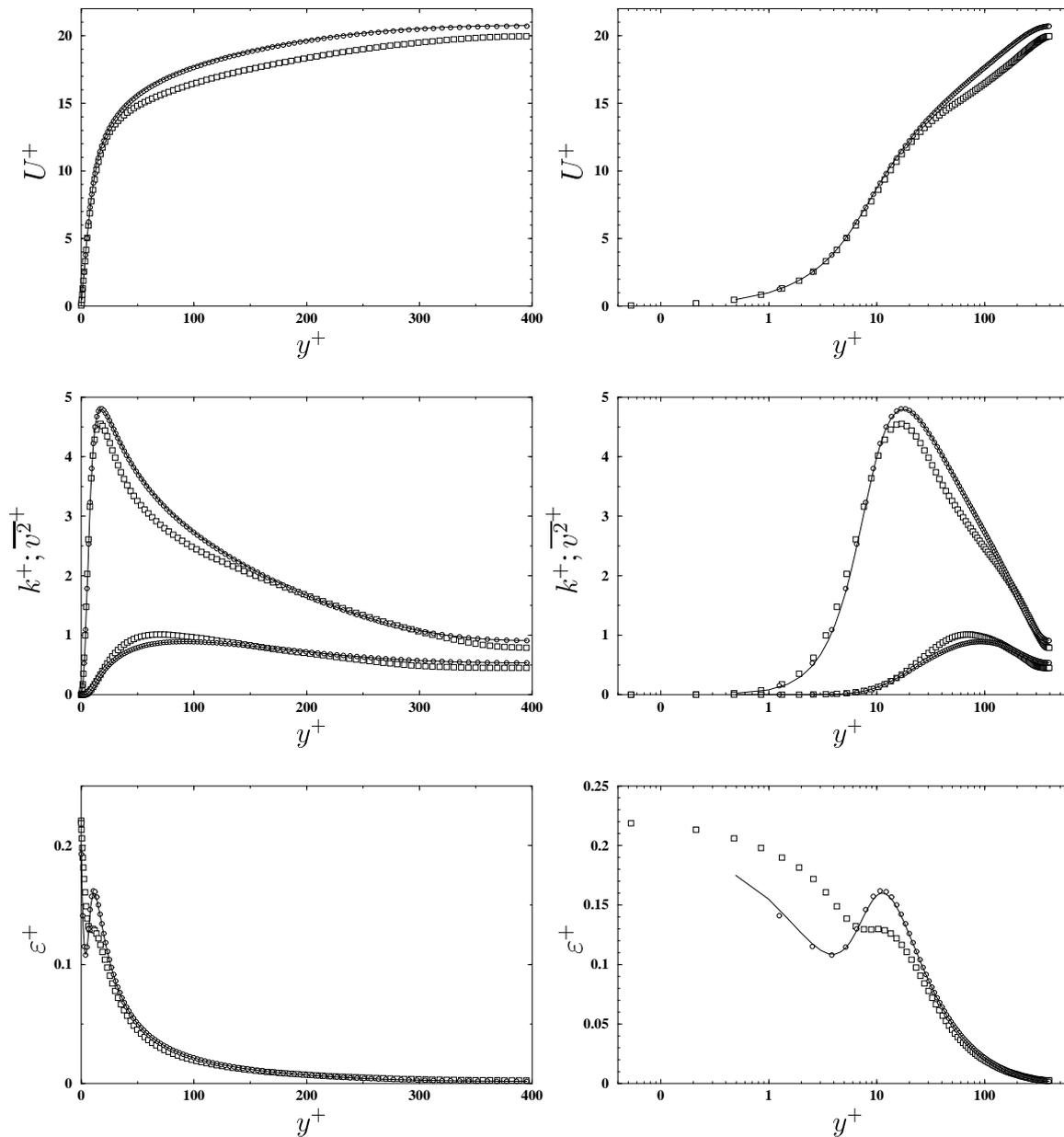


FIG. 5.3 – Comparaison avec des données de DNS en canal à $Re_\tau = 395$ des résultats donnés par le modèle $\overline{v^2}-f$ implanté dans N3S et dans un code 1D. Ces deux dernières simulations ont été réalisées de telle manière que Re_τ soit le même que celui de la DNS. Elles sont alors à $Re = 7\,273$, alors que la DNS est à $Re = 6\,881$. \square DNS; \circ code 1D; — N3S. À gauche : graphes linéaires. À droite : graphes semi-logarithmiques.

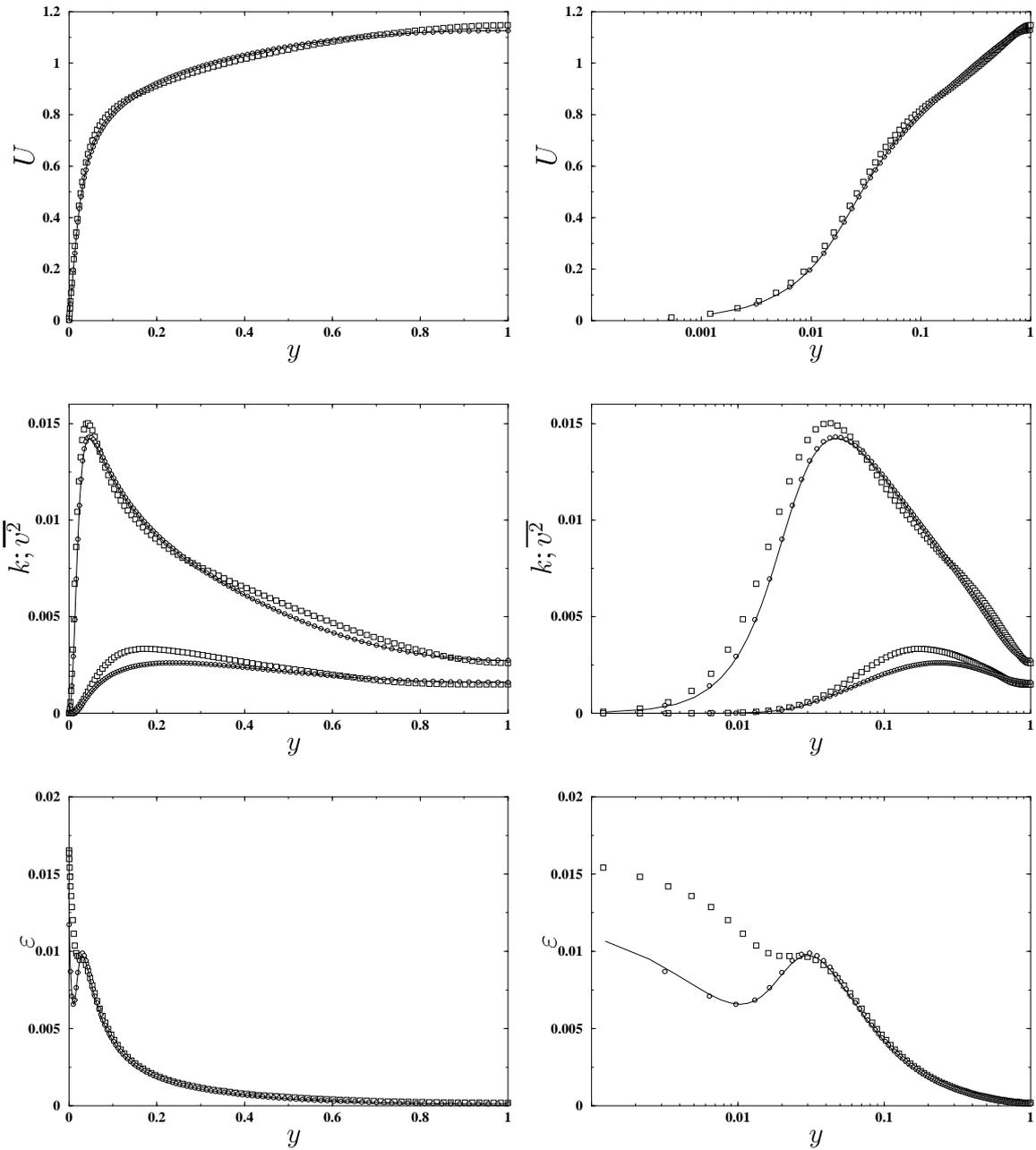


FIG. 5.4 – Mêmes comparaisons que sur la figure 5.3, mais, cette fois-ci, les simulations avec le modèle $\overline{v^2}$ - f sont réalisées au même nombre de Reynolds $Re = 6\,881$ que la DNS. Elles sont alors à $Re_\tau = 375$.

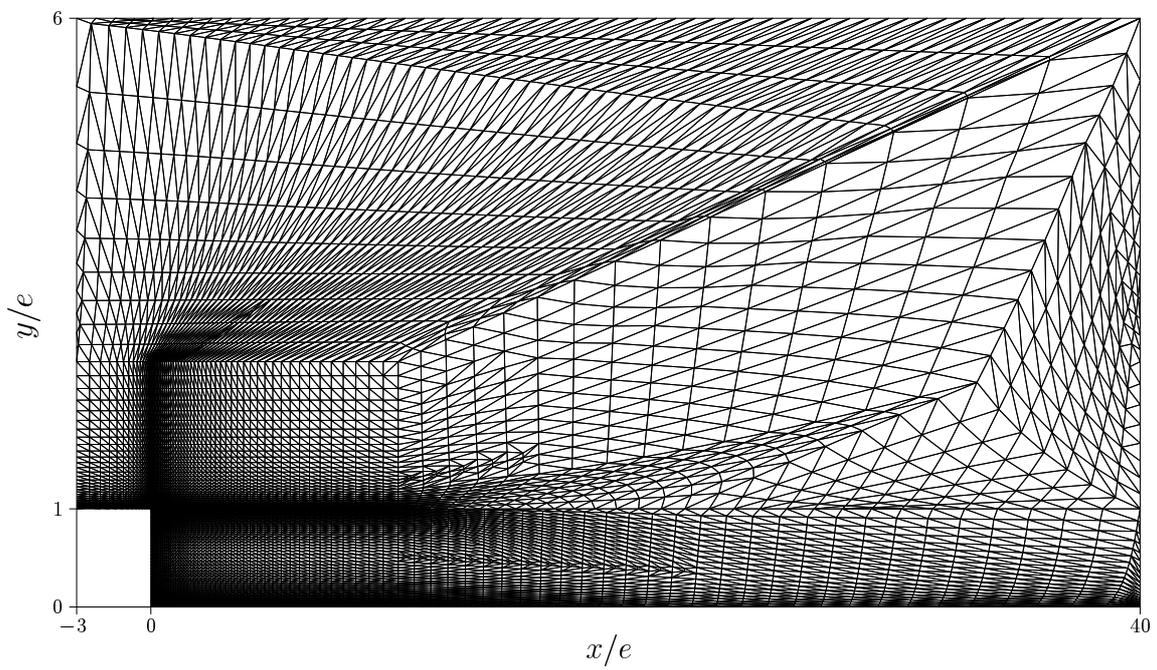


FIG. 5.5 – Maillage $P1$ employé pour la simulation de la marche descendante avec $N3S$.

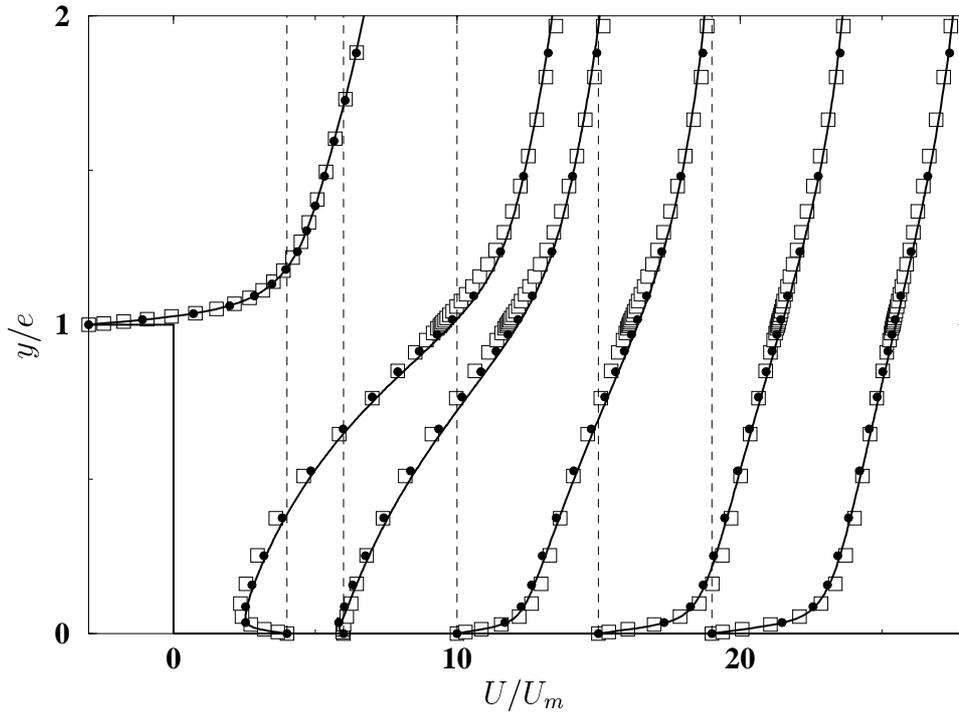


FIG. 5.6 – Marche descendante. Comparaison avec la DNS de Le et al. [92] des profils de vitesse moyenne. \square DNS; \bullet INS2D; — N3S. Les profils sont tracés en $x/e = -3$, $x/e = 4$, $x/e = 6$, $x/e = 10$, $x/e = 15$ et $x/e = 20$.

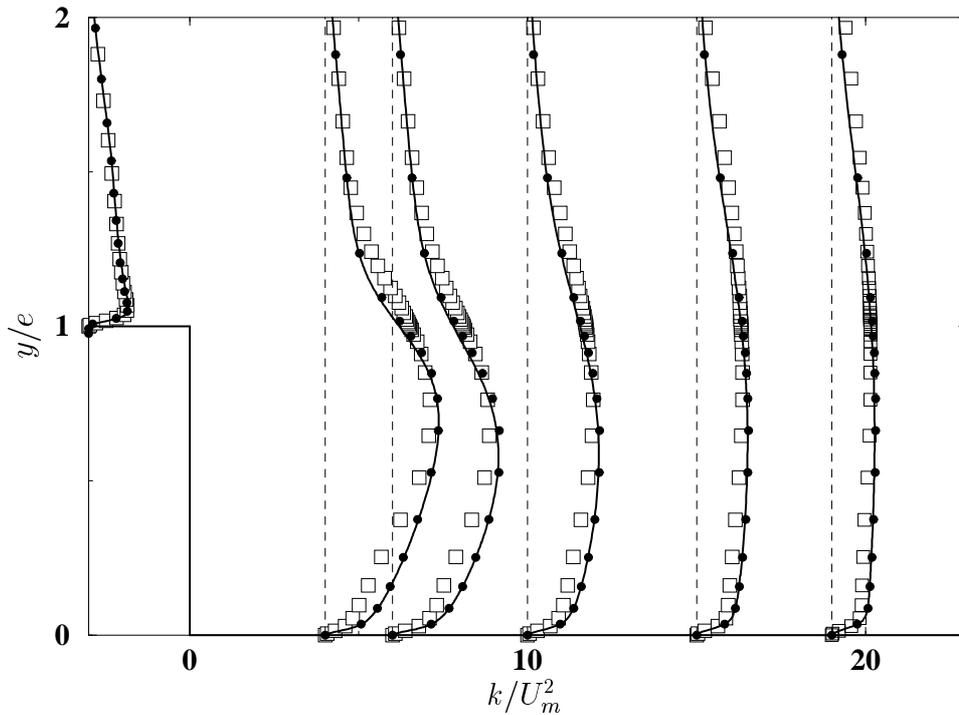


FIG. 5.7 – Même figure que 5.6 pour les profils de k .

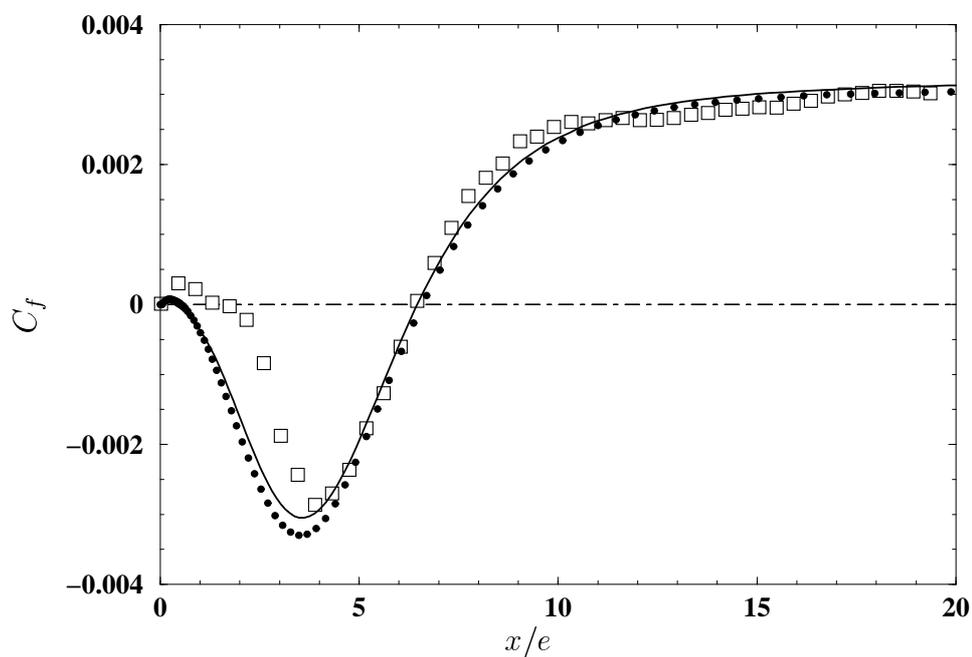


FIG. 5.8 – Comparaison avec la DNS de Le et al. [92] des coefficients de frottement C_f en aval de la marche obtenus par le code INS2D et le code N3S. \square DNS; \bullet INS2D; — N3S.

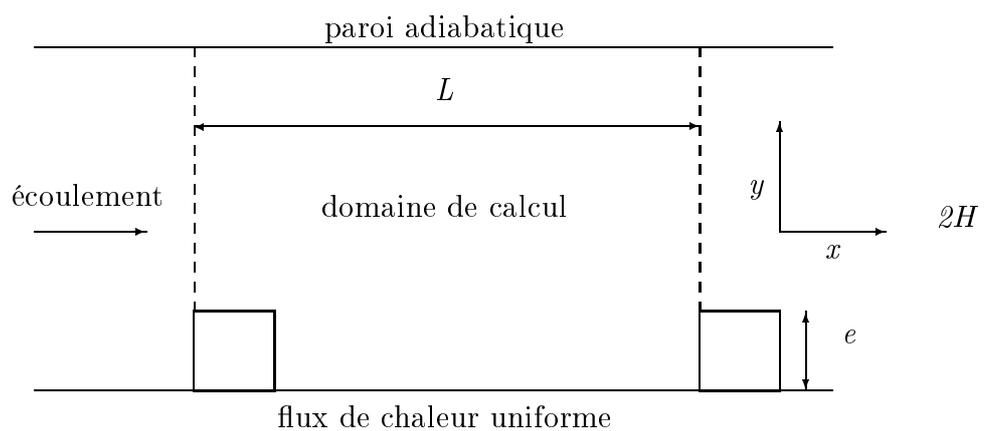


FIG. 5.9 – Cas test du canal garni de ribs. Géométrie du problème.

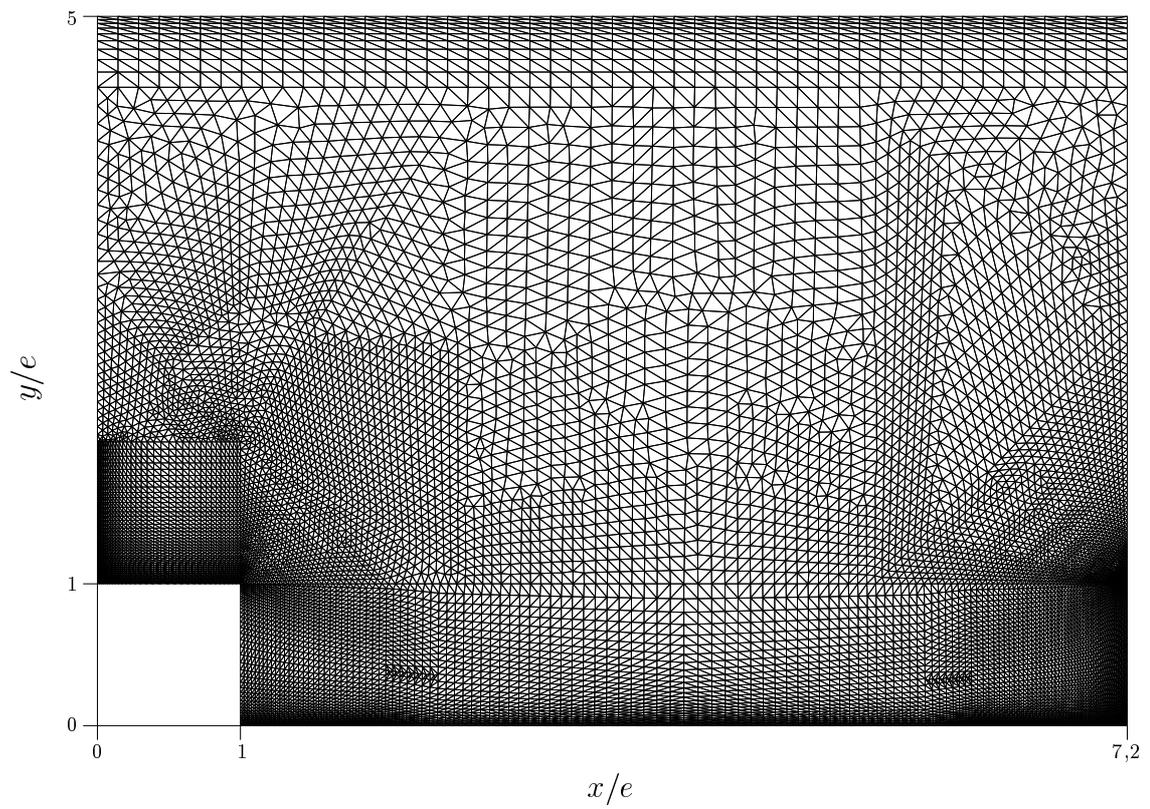


FIG. 5.10 – *Maillage P1 employé pour la simulation du canal garni de ribs.*

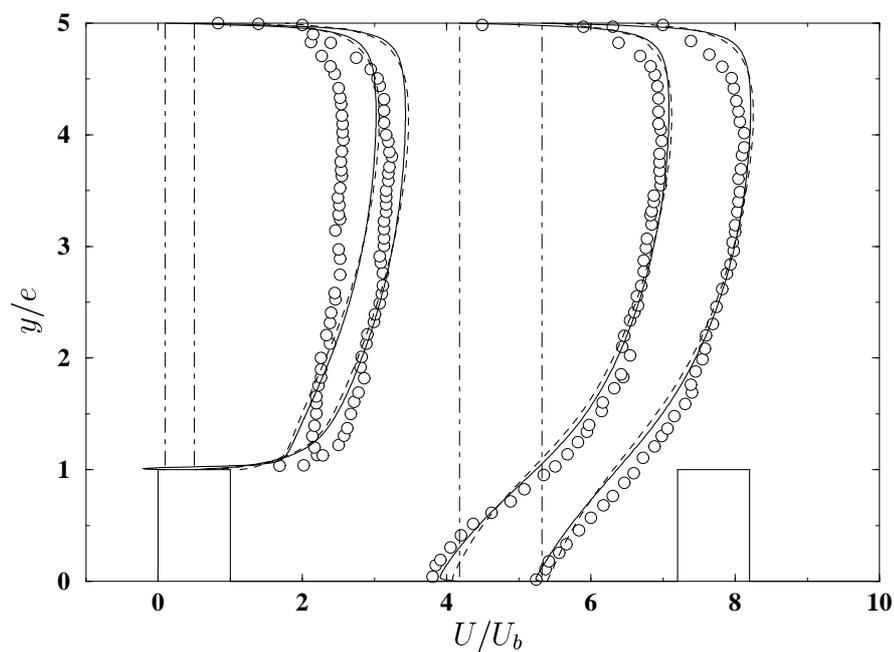


FIG. 5.11 – Cas du canal garni de ribs à $Re_H = 37\,200$. Profils de vitesse moyenne longitudinale en $x/e = 0,1$; $x/e = 0,5$; $x/e = 4,18$; $x/e = 5,32$. \circ Expérience de Drain & Martin [33]; — $\overline{v^2}-f$; --- $k-\varepsilon$.

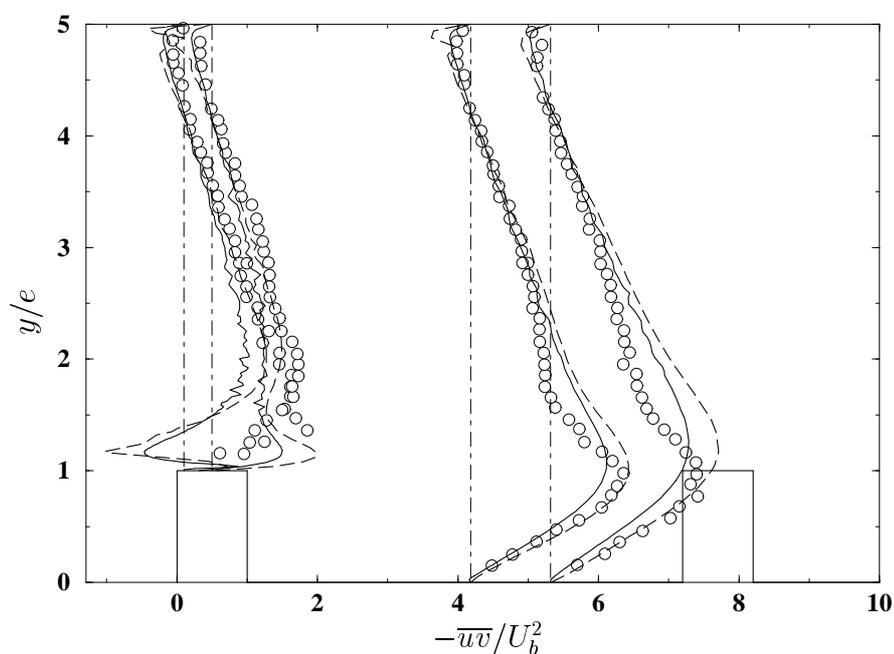


FIG. 5.12 – Même figure que 5.11 pour $-\overline{uv}$ reconstruit par l'équation de Boussinesq. Les irrégularités des courbes ne sont pas dues à des problèmes numériques mais au post-traitement (calcul de gradients de vitesse sur maillage non-structuré).

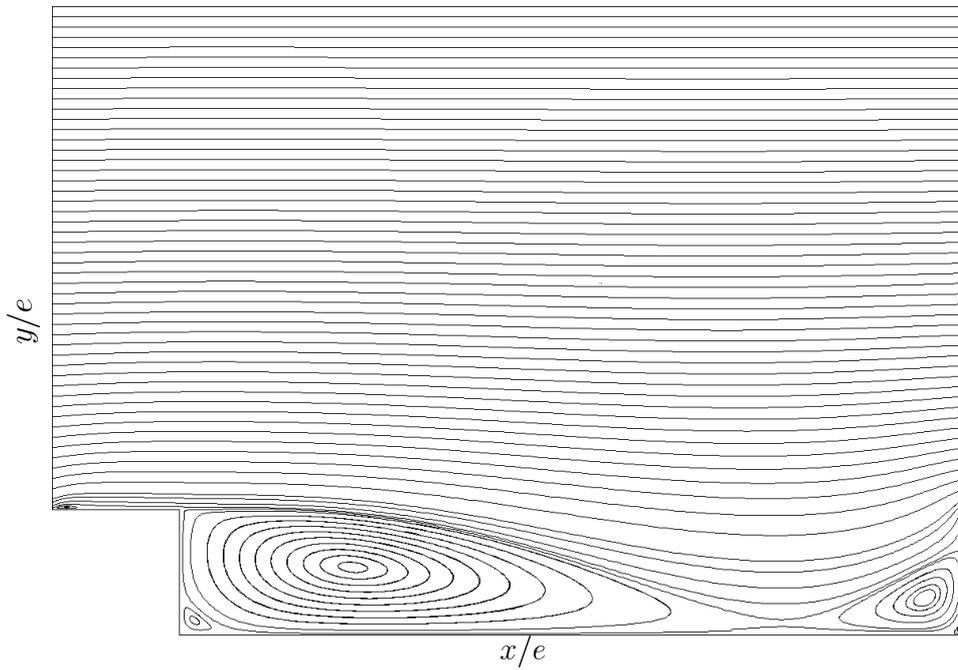


FIG. 5.13 – Cas du canal garni de ribs à $Re_H = 37\ 200$. Lignes de courant données par le modèle $\overline{v^2-f}$.

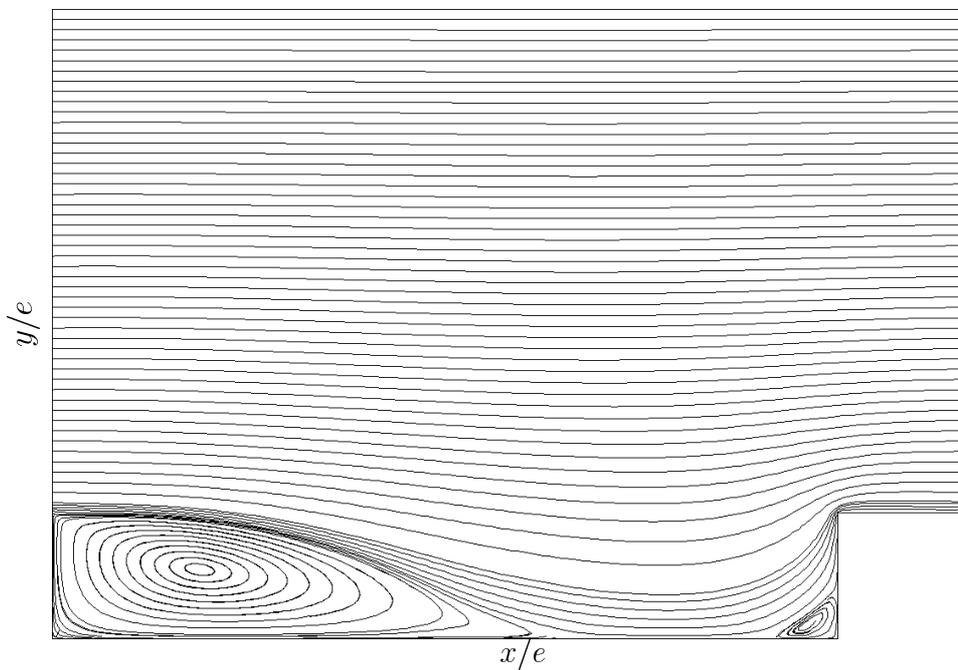


FIG. 5.14 – Cas du canal garni de ribs à $Re_H = 37\ 200$. Lignes de courant données par le modèle $k-\varepsilon$ standard avec fonctions de paroi.

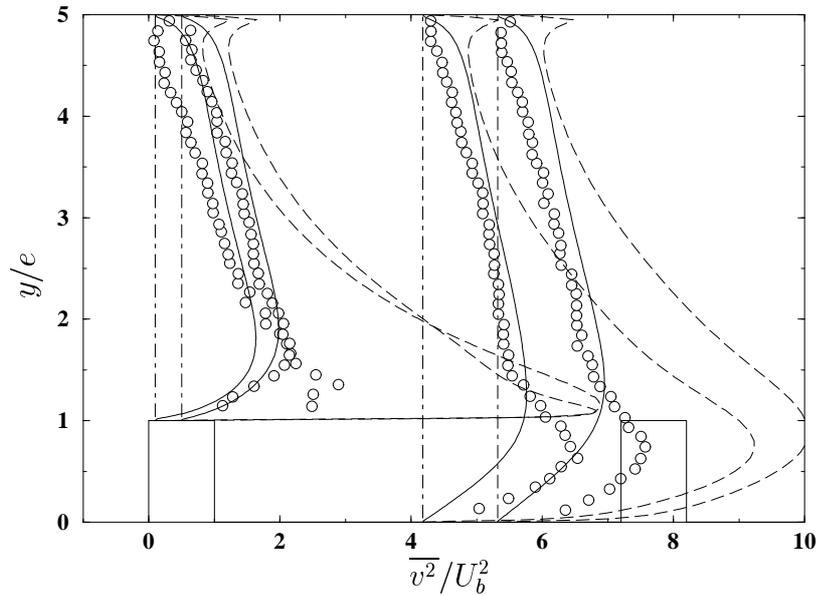


FIG. 5.15 – Cas du canal garni de ribs à $Re_H = 37\,200$. Comparaison du $\overline{v^2}$ du modèle avec la tension de Reynolds $\overline{v^2}$. \circ tension de Reynolds $\overline{v^2}$ de l'expérience de Drain & Martin [33]; --- tension de Reynolds $\overline{v^2}$ reconstruite par l'équation de Boussinesq à partir des résultats du $\overline{v^2}$ - f ; — échelle scalaire $\overline{v^2}$ du $\overline{v^2}$ - f .

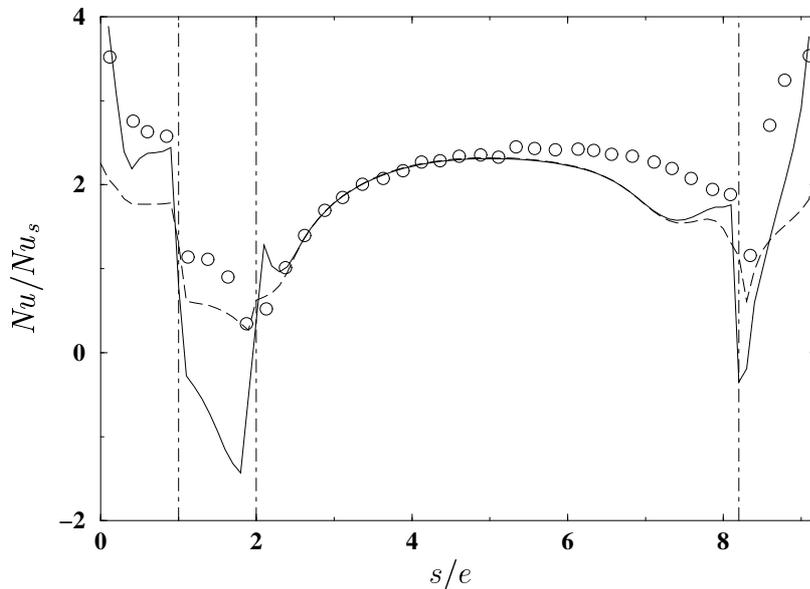


FIG. 5.16 – Cas du canal garni de ribs à $Re_H = 12\,600$. Nombre de Nusselt. L'abscisse curviligne s suit les parois du rib et la paroi inférieure du canal. Son origine est au coin supérieur gauche du rib. \circ expérience de Liou et al. [94]; — résultat du $\overline{v^2}$ - f avec résolution thermique couplée fluide-solide; --- résultat du $\overline{v^2}$ - f avec flux constant imposé sur les faces du rib.

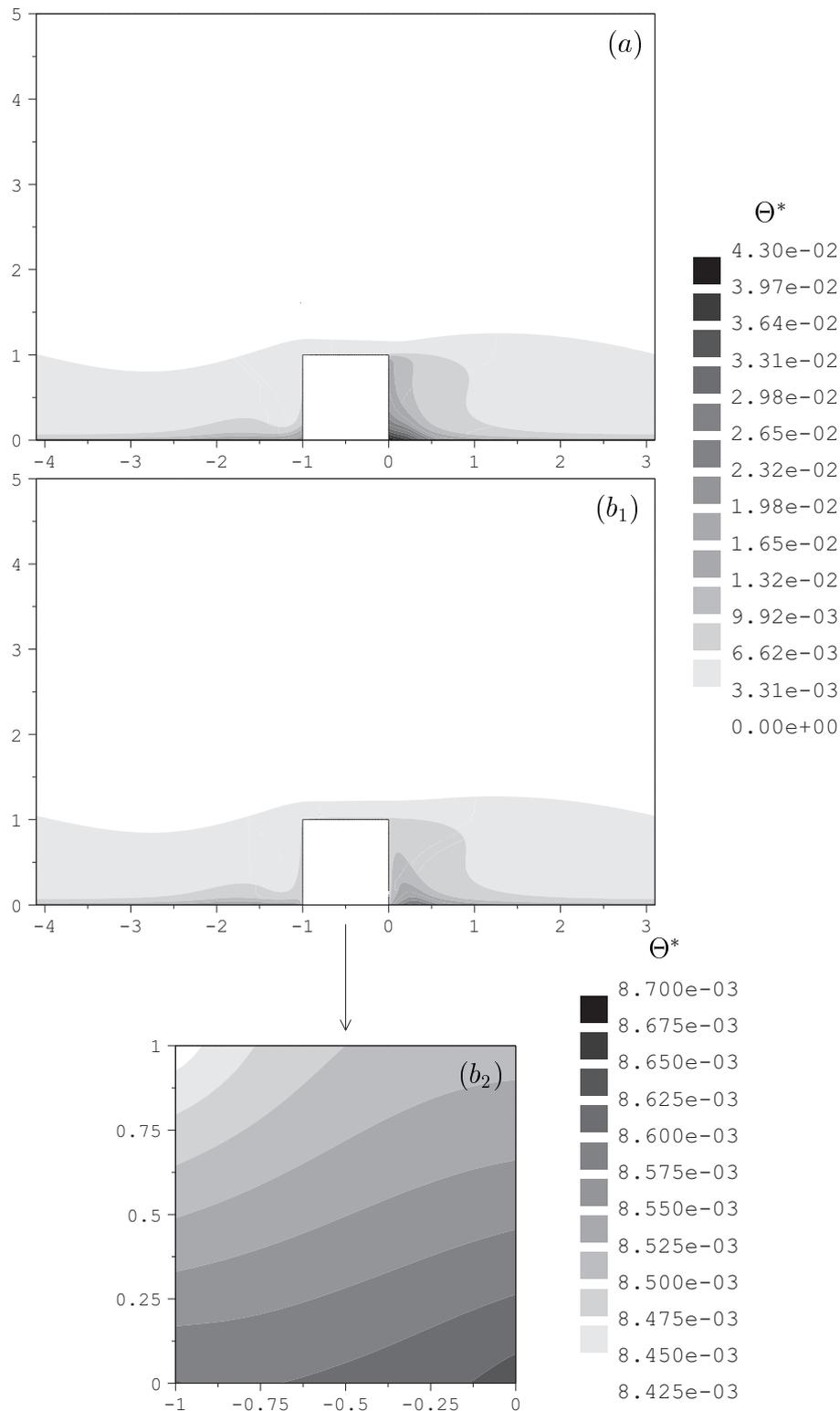


FIG. 5.17 – Cas du canal garni de ribs à $Re_H = 12\,600$. Champ de température $\Theta^* = \lambda(\Theta - \Theta_0)/(\dot{q}_p D_e)$, où Θ_0 est la température sur la paroi adiabatique. (a) Flux constant imposé sur les faces du rib. (b₁) Résolution thermique couplée fluide-solide. (b₂) Champ thermique dans le solide.

Chapitre 6

Conclusion

Le travail effectué a permis de montrer l'intérêt, pour la prise en compte de l'influence des parois sur la turbulence, de l'approche de Durbin. La force de cette approche réside dans la résolution d'une équation différentielle pour le terme de pression ϕ_{ij}^* , terme essentiel des équations de transport des tensions de Reynolds.

La description des mécanismes qui influent sur la turbulence dans la région pariétale a permis de montrer l'importance des effets cinématiques, non-locaux, qui ne peuvent pas être pris en compte par les modèles classiques. Ce sont eux qui sont notamment à l'origine de la dégénérescence de la turbulence vers un état à deux composantes à l'approche de la paroi, par suppression des fluctuations normales à cette dernière. L'effet de blocage, conséquence de l'incompressibilité du fluide, se fait sentir dans les équations de transport des tensions de Reynolds par l'intermédiaire du terme de corrélation vitesse–gradient de pression ϕ_{ij}^* . Dès lors, il est vital de prendre en compte l'amortissement de la redistribution d'énergie due à ce terme, et de reproduire avec exactitude sa contribution dans les bilans asymptotiques des composantes $\overline{v^2}$ et \overline{uv} , dans lesquels il joue un rôle prépondérant.

La construction des modèles bas-Reynolds classiques à partir de modèles haut-Reynolds nécessite l'introduction de corrections très fortes, sous la forme de fonctions d'amortissement ou de termes supplémentaires non-linéaires. De plus, les hypothèses de localité et de quasi-homogénéité utilisées ne sont absolument pas valables dans le cas des écoulements pariétaux, ce qui pénalise fortement l'universalité des modèles : les corrections bas-Reynolds sont le plus souvent uniquement valables pour les écoulements sur lesquels elles ont été calibrées, et ne permettent pas, en général, de reproduire correctement les écoulements pour lesquels l'influence des parois est déterminante.

L'approche de Durbin, quant à elle, reproduisant l'effet non-local par le biais d'une équation de relaxation elliptique sur le terme de pression, a été développée sur une

base beaucoup plus solide. Il a été montré que les hypothèses introduites de manière intuitive sont globalement consistantes avec des données de simulation directe en canal, résultat qui augure d'une certaine universalité du modèle.

Le défaut principal de cette approche, qui est d'amplifier la redistribution dans la zone logarithmique, s'est avéré être dû à l'utilisation d'un modèle isotrope pour la fonction de corrélation vitesse–gradient de pression. Une prise en compte d'une certaine anisotropie, et notamment de l'asymétrie de cette fonction dans la direction normale à la paroi, conduit au développement de nouvelles formulations qui ne présentent pas le même défaut. Il est notamment possible d'obtenir un opérateur elliptique qui amortit la redistribution, ce qui permet de corriger la surestimation de celle-ci due à l'utilisation du modèle Rotta+IP comme terme source de l'équation de relaxation elliptique ; ou encore un opérateur neutre, reproduisant dans la zone logarithmique la redistribution donnée par le terme source, utilisable par exemple avec le modèle SSG.

Le modèle au second ordre de Durbin reste cependant difficile à utiliser pour les applications industrielles courantes, notamment en raison de l'ajout de six équations de relaxation elliptique aux déjà nombreuses équations d'un modèle au second ordre. En revanche, le modèle $\overline{v^2}-f$, version réduite à trois équations de transport et une équation de relaxation elliptique, est suffisamment simple pour être appliqué très largement dans l'industrie. Son implantation dans le code aux éléments finis d'EDF, N3S, a montré qu'il pouvait être utilisé sur des maillages non-structurés, permettant la résolution de problèmes en géométrie quelconque.

L'application du modèle $\overline{v^2}-f$ au cas du canal garni de *ribs* pour intensifier les échanges thermiques entre la paroi et le fluide, cas d'intérêt industriel, a montré que malgré sa simplicité, et notamment l'utilisation de l'équation de Boussinesq, le modèle est capable de prédire la grandeur la plus importante de cet écoulement, le nombre de Nusselt. Ce résultat montre tout l'intérêt de ce modèle pour les applications industrielles : il représente un excellent compromis entre la précision requise et la simplicité indispensable à la résolution, à un coût raisonnable, de problèmes en géométrie complexe.

Du point de vue de la recherche en modélisation de la turbulence, ce travail ouvre des voies intéressantes. Notamment, le bon comportement des nouvelles formulations de l'équation de relaxation elliptique lors des tests *a priori* permet de penser que le modèle modifié apportera une certaine amélioration par rapport au modèle original. Une importante quantité de travail reste à effectuer pour calibrer ces nouvelles formes du modèle, les tester sur des cas simples pour confirmer l'amélioration attendue et vérifier qu'il n'y a pas dégradation de certains résultats.

La modification de l'équation de relaxation elliptique peut également s'appliquer au modèle $\overline{v^2}-f$. Là aussi, des tests seront nécessaires pour fixer de nouvelles valeurs des coefficients du modèle et confirmer l'amélioration des résultats, par exemple la prédiction correcte simultanée du coefficient de frottement et du débit dans un écoulement en canal. Un tel processus peut, à relativement court terme, déboucher sur une nouvelle version du modèle applicable dans des cas industriels.

Une autre perspective consiste à explorer une voie intermédiaire entre le modèle au second ordre, dont l'application aux cas industriels est freinée par le nombre d'équations à résoudre, et le modèle $\overline{v^2}-f$, qui utilise le concept de viscosité turbulente qui limite ses performances. En effet, les succès remportés par le $\overline{v^2}-f$ montrent que l'utilisation d'une équation de transport sur une échelle scalaire $\overline{v^2}$, permettant une évaluation de l'anisotropie, sensible à l'effet de blocage grâce à l'équation de relaxation elliptique sur f , est suffisante pour reproduire correctement l'effet de la paroi sur l'écoulement moyen. Dès lors, on peut penser qu'il suffirait d'une seule équation de relaxation elliptique, dont l'effet serait « partagé » par toutes les composantes du tenseur de Reynolds, pour construire un modèle au second ordre applicable jusqu'à la paroi. Cette approche permettrait de proposer un modèle intermédiaire, proche du $\overline{v^2}-f$ pour la prise en compte de l'effet de blocage, mais possédant les qualités propres à un modèle au second ordre.

Annexe A

Rapport paru dans : *Proceedings of the Summer Program, Center for Turbulence Research, Stanford University, 1998*

Assessment of non-local effect on pressure term in RANS modeling using a DNS database

By R. Manceau¹, M. Wang AND P. Durbin

A DNS database for the channel flow at $Re_\tau = 590$ is used to investigate the validity of the hypotheses used to model the pressure term in the Reynolds stress transport equations by elliptic relaxation. It is shown that the correlation function involving the fluctuating velocity and the Laplacian of the pressure gradient, which is modeled by an exponential function, is actually not isotropic. It is not only elongated in the streamwise direction but also asymmetric in the direction normal to the wall. This feature is the main cause for the slight amplification of the redistribution between the Reynolds stress components in the log layer as predicted by the elliptic relaxation operator. The expected reduction in redistribution is predicted by a new formulation of the model, which can be derived by accounting for the asymmetry in the correlation function, without using any wall echo correction terms. The belief that this reduction is due to the wall echo effect is called into question through the present DNS analysis.

1. Introduction

During the past few decades, turbulence modelers mainly focussed on the pressure term in the Reynolds stress transport equations. In second moment closures, the production is exact and, accordingly, the pressure term is one of the most important terms to be modeled. Indeed, in a channel flow, this term is the main productive term in the equations for the diagonal Reynolds stresses except for the component in the streamwise direction, and balances the production term in the Reynolds shear stress equation (Mansour, Kim & Moin 1988).

Chou (1945) was the first to derive the integral equation of the pressure term from the Poisson equation for the pressure fluctuations and to distinguish between the slow part, rapid part and surface term (even though he did not use this terminology). For the rapid part, which involves the mean velocity gradient, he proposed to consider that the latter is locally a constant in order to be taken outside the integral. Since Chou's pioneering work, this approach has become very popular in the turbulence modeling community and the starting-point of all second moment closure models (e.g. Launder, Reece & Rodi 1975).

Bradshaw, Mansour & Piomelli (1987) assessed the validity of this local approximation for the rapid pressure using a DNS database. They showed that in the channel flow at $Re_\tau = 180$ (Kim, Moin & Moser 1987), this hypothesis is valid only

¹ Laboratoire National d'Hydraulique, Electricité de France, 6 quai Watier 78 401 Chatou, France

for $y^+ \geq 40$. As a result, models based on it cannot be integrated down to the wall without modifications such as the introduction of damping functions.

In order to avoid the *ad hoc* damping functions, which are usually calibrated on experimental or DNS data with little theoretical basis, Durbin (1991) introduced a novel method. He proposed to model directly the two-point correlation in the integral equation of the pressure term, which preserves the non-local effect in the Reynolds stress transport equations. Then, he introduced the so-called elliptic relaxation approach, allowing the derivation of second moment closure models which can be integrated down to the wall without any damping functions.

While this method has led to very encouraging results, some room for improvement remains. One purpose of the present work is to assess the validity of the two-point correlation approximation, which was originally derived on an intuitive basis. Secondly, this work aims to assess the influence of the anisotropy of the two-point correlation on the pressure term in order to support future modifications of the model. Durbin's model assumes an isotropic shape for the correlation function, which may be the main improvable point of the method. These modeling issues will be examined using a channel flow DNS database at $Re_\tau = 590$ (Moser, Kim & Mansour 1998). In particular, the anisotropy of the correlation function will be explored, and the evolution of the length scale across the channel evaluated.

2. The pressure term in a channel

2.1. Integral equation of the pressure term

The pressure term which appears in the Reynolds stress equations is

$$\phi_{ij} = -\frac{1}{\rho} (\overline{u_j p_{,i}} + \overline{u_i p_{,j}}) \quad , \quad (1)$$

where ρ is the density, p is the fluctuating pressure, u_i are the fluctuating velocity components and $.,_i$ denotes derivative with respect to the x_i coordinate. The overline indicates ensemble average. Usually, ϕ_{ij} is split into two terms: the pressure-strain correlation and the pressure diffusion (Launder, Reece & Rodi 1975). However, the original form (1) of ϕ_{ij} will be used for the following reasons: first, Lumley (1975) showed that the decomposition is not unique and that this particular one is not the best one; secondly, in the vicinity of a wall, the asymptotic behavior is not preserved for certain components. For instance, if $i = 1$ and 2 correspond respectively to the streamwise direction and the direction normal to the wall, the component ϕ_{12} behaves as y , whereas the pressure-strain and the pressure diffusion take a non-zero value at the wall. Therefore, in order to model correctly the total pressure term, it is necessary to model both terms of the decomposition such that their sum decreases as y in the vicinity of the wall.

The pressure fluctuation is the solution of the Poisson equation obtained by taking the divergence of the fluctuating part of the Navier-Stokes equations:

$$\nabla^2 p = -2\rho U_{i,j} u_{j,i} + \rho (\overline{u_i u_j} - u_i u_j)_{,ij} \quad , \quad (2)$$

where ∇^2 denotes the Laplacian operator and U_i the i^{th} component of the mean velocity. Since the differentiations are commutative, the gradient of the pressure fluctuation is also the solution of a Poisson equation:

$$\nabla^2 p_{,k} = -2\rho(U_{i,j} u_{j,i})_{,k} + \rho(\overline{u_i u_j} - u_i u_j)_{,ijk} . \quad (3)$$

In the following, the gradient of the pressure fluctuation will be assumed to satisfy the boundary condition $\partial p_{,k} / \partial \mathbf{n} = 0$, where \mathbf{n} is the outgoing unit vector normal to the wall. This condition is not exact, but Kim (1989) uses this type of hypothesis for the pressure itself and showed that this is valid in the channel flow at $Re_\tau = 180$. In the present case, the same hypothesis can be applied to the pressure gradient, considering that its ‘‘Stokes part’’, i.e. the part produced by the inhomogeneous boundary condition, can be neglected.

The general solution of Eqs. (3) is

$$p_{,k}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \frac{\nabla^2 p_{,k}(\mathbf{x}')}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} dV(\mathbf{x}') - \int_{\partial\Omega} p_{,k}(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \right) dS(\mathbf{x}') , \quad (4)$$

where bold letters \mathbf{x} and \mathbf{x}' denote position vectors, dV and dS the elementary volume and surface and $\partial\Omega$ the domain boundary.

Multiplying (4) by the fluctuating velocity and taking ensemble averaging, one can derive an integral equation for $\overline{u_j p_{,i}}$ and hence ϕ_{ij} ,

$$\begin{aligned} \rho \phi_{ij}(\mathbf{x}) = & - \int_{\Omega} \left(\overline{u_j(\mathbf{x}) \nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x}')} + \overline{u_i(\mathbf{x}) \nabla^2 p_{,j}(\mathbf{x}')} \right) \frac{dV(\mathbf{x}')}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} - \\ & \int_{\partial\Omega} \left(\overline{u_j(\mathbf{x}) p_{,i}(\mathbf{x}')} + \overline{u_i(\mathbf{x}) p_{,j}(\mathbf{x}')} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \right) dS(\mathbf{x}') . \end{aligned} \quad (5)$$

This equation will henceforth be referred to as the integral equation of the pressure term. It involves two-point correlations such as $\overline{u_j(\mathbf{x}) \nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x}')}$, which need to be modeled and are the main concern of this work.

In some situations, the surface integral in (4) can be transformed into a volume integral. For instance, in a semi-infinite space, bounded by an infinite plane, as considered by Launder, Reece & Rodi (1975), Eq. (4) can be written as

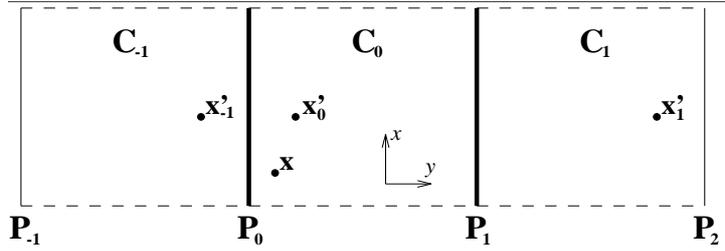
$$p_{,k}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \nabla^2 p_{,k}(\mathbf{x}') \left(\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} + \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|} \right) dV(\mathbf{x}') , \quad (6)$$

where \mathbf{x}'^* is the image term of \mathbf{x}' by symmetry with respect to the plane. The function

$$G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = - \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} - \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|} \quad (7)$$

is then called the Green function of the domain Ω .

In more general geometries, the Green function is unknown. In the particular case of a channel, the Green function is easy to derive only after taking Fourier transforms in x - and z -directions (Kim 1989). This spectral Green function is not useful for the present purpose: however, a form of (4) without surface integral will be needed in the following analysis, especially in §5.1, where the question of the wall echo effect will be investigated. The purpose of the next section is to derive a sufficiently good approximation of (4) which does not involve any surface integral.

FIGURE 1. Sketch of a channel (C_0) and its images.

2.2. Approximation of the Green function in a channel

The simplest solution to eliminate the surface integral in (4) is to neglect it. Chou (1945) used this approximation but emphasized that all the conclusions which can be drawn are thus valid only at locations “not too close to the boundary of the moving fluid” because, in the vicinity of the wall, the weight of the surface integral has the same order of magnitude as the volume integral. This can be easily seen in the case of a semi-infinite domain bounded by a plane. In this case, Eq. (4) can be written as (6), which shows that if the fixed point \mathbf{x} is sufficiently close to the wall, the principal term and the image term are almost equal. If \mathbf{x} is exactly on the wall, the two terms are identical. Furthermore, Bradshaw (1973) noted that the order of magnitude of the image term is still 15% of the total when the correlation length scale is $L = \kappa y$, where κ is the Karman constant. The influence of this term will be assessed in §5.1. At this point, the surface integral cannot be neglected and therefore, in order to allow the following DNS analysis to be valid down to the wall, a less crude approximation than that used by Chou is needed.

Let us consider a channel C_0 bounded by two infinite planes P_0 and P_1 (Fig. 1). In this domain, the problem to solve is

$$\nabla^2 f = g, \quad (8)$$

with $f, \mathbf{n} = 0$ on ∂C_0 . Let us now consider the image channels C_{-1} and C_1 shown in Fig. 1, which are symmetrical to C_0 with respect to P_0 and P_1 , respectively. Extending g by symmetry in C_{-1} and C_1 , solving Eq. (8) in the domain $C_{-1} \cup C_0 \cup C_1$ and using all the symmetries, the solution can be shown to take the form

$$f(\mathbf{x}) = - \int_{C_0} H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0) g(\mathbf{x}'_0) dV(\mathbf{x}'_0) - \int_{\partial C_0} \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0)}{\partial \mathbf{n}'} f(\mathbf{x}'_0) dS(\mathbf{x}'_0), \quad (9)$$

with

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0) = \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|} + \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|} + \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\|}, \quad (10)$$

where \mathbf{x}'_{-1} and \mathbf{x}'_1 are the specular images of \mathbf{x}'_0 in P_0 and P_1 (Fig. 1), respectively. The surface integral in this expression can now be neglected. Indeed, on P_0 , the derivative of $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0)$ can be evaluated:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0) = \frac{\|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\| \cdot \mathbf{n}'}{4\pi \|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|^3} - \frac{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\| \cdot \mathbf{n}'}{4\pi \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|^3} + \frac{\|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\| \cdot \mathbf{n}'}{4\pi \|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\|^3}. \quad (11)$$

Since $\mathbf{x}'_{-1} = \mathbf{x}'_0$, the sum of the two first terms is zero and hence the surface integral only involves the contribution of the image \mathbf{x}'_1 , which is far from the point \mathbf{x} . Likewise, on the other wall P_1 , the surface integral only contains the contribution of the image point on P_{-1} . This is in contrast to Chou's approximation, where the derivative in the neglected surface integral is equal to the second term of (11). It goes to infinity when $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}$, giving to the surface integral the same weight as the volume integral. In the following analysis, the function $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0)$ will be used, considering it as a sufficiently good approximation of the Green function, even in the vicinity of the walls.

3. The elliptic relaxation method

By using the approximate Green function, the integral equation of the pressure term (5) can be written as

$$\rho\phi_{ij}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \left(\overline{u_j(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x}')} + \overline{u_i(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,j}(\mathbf{x}')} \right) H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') . \quad (12)$$

In this equation, two-point correlations between the fluctuating velocity and the Laplacian of the pressure gradient appear. Following Durbin (1991), in order to preserve the non-local effect, they can be modeled as

$$\overline{u_n(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,m}(\mathbf{x}')} = \overline{u_n(\mathbf{x}')\nabla^2 p_{,m}(\mathbf{x}')} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}{L}\right) , \quad (13)$$

where L is the correlation length scale. The validity of this hypothesis will be scrutinized in §5.2 using a DNS database. Here, the rationalization of the elliptic relaxation equation is analyzed in the context of channel flow.

Durbin (1991) used Chou's approximation, which excludes the image terms in $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. The integral equation of the pressure term, combined with the model (13), becomes

$$\rho\phi_{ij}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \left(\overline{u_j(\mathbf{x}')\nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x}')} + \overline{u_i(\mathbf{x}')\nabla^2 p_{,j}(\mathbf{x}')} \right) \underbrace{\frac{\exp\left[-\frac{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}{L}\right]}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}}_{E(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} dV(\mathbf{x}') . \quad (14)$$

The function $E(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ is the free-space Green function associated with the operator $-\nabla^2 + 1/L^2$. Hence, (14) is the solution of the following Yukawa equation*:

$$\phi_{ij} - L^2 \nabla^2 \phi_{ij} = -\frac{L^2}{\rho} \left(\overline{u_j \nabla^2 p_{,i}} + \overline{u_i \nabla^2 p_{,j}} \right) . \quad (15)$$

* In 1935, Yukawa was the first to apply this inversion in physics to solve the equation of interaction potential between particles.

Noting that in quasi-homogeneous situations, the second term on the LHS of this equation vanishes, Durbin proposed to use a quasi-homogeneous model ϕ_{ij}^h instead of the RHS. This leads to the following elliptic relaxation model for ϕ_{ij} :

$$\phi_{ij} - L^2 \nabla^2 \phi_{ij} = \phi_{ij}^h . \quad (16)$$

Any quasi-homogeneous model, such as LRR model or SSG model, can be used for ϕ_{ij}^h , thus allowing the extension of these models down to solid boundaries. Indeed, (16) is valid down to the wall, when appropriate boundary conditions for ϕ_{ij} are provided (Durbin 1993).

However, Eq. (14) does not give rigorously the solution of (15) in a plane channel. Analogous to the Green function for the Laplacian operator, the Green function associated with the Yukawa operator must at least be approximated using the image points with respect to the walls. Thus, a better approximation to the solution of (15) is

$$\begin{aligned} \rho \phi_{ij}(\mathbf{x}) = & - \int_{\Omega} \left(\overline{u_j(\mathbf{x}'_0) \nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x}'_0)} + \overline{u_i(\mathbf{x}'_0) \nabla^2 p_{,j}(\mathbf{x}'_0)} \right) \\ & \left(\frac{\exp \left[-\frac{\|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|}{L} \right]}{4\pi \|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|} + \frac{\exp \left[-\frac{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|}{L} \right]}{4\pi \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|} + \frac{\exp \left[-\frac{\|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\|}{L} \right]}{4\pi \|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\|} \right) dV(\mathbf{x}'_0) . \end{aligned} \quad (17)$$

Now, using the approximation (13) for the two-point correlations, the integral equation of the pressure term (12) does not lead to (17) but to the following equation:

$$\begin{aligned} \rho \phi_{ij}(\mathbf{x}) = & - \int_{\Omega} \left(\overline{u_j(\mathbf{x}'_0) \nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x}'_0)} + \overline{u_i(\mathbf{x}'_0) \nabla^2 p_{,j}(\mathbf{x}'_0)} \right) \\ & \left(\frac{\exp \left[-\frac{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|}{L} \right]}{4\pi \|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|} + \frac{\exp \left[-\frac{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|}{L} \right]}{4\pi \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|} + \frac{\exp \left[-\frac{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|}{L} \right]}{4\pi \|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\|} \right) dV(\mathbf{x}'_0) . \end{aligned} \quad (18)$$

Hence, the modeled pressure term (18) does not rigorously satisfy the Yukawa Eq. (15). However, the main contribution of the image terms to the integral corresponds to point \mathbf{x}'_0 near the walls. For instance, the weight of the first image term is important when $1/4\pi \|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|$ has the same order of magnitude as $1/4\pi \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|$, i.e., very close to the wall, where $\mathbf{x}'_{-1} \simeq \mathbf{x}'_0$. Then, the exponential factors $\exp(-\|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|/L)$ and $\exp(-\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|/L)$ are almost equal as well. Therefore, even considering that the Green function in a channel must be at least approximated by $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, rather than using Chou's approximation, the elliptic relaxation model for the pressure term (16) can be considered as valid, as long as the model for the two-point correlations (13) is valid itself.

4. Focus and description of the DNS assessment

4.1 Issues to examine in the elliptic relaxation method

The elliptic relaxation approach is based on a unique hypothesis, namely the approximation (13) of the two-point correlations. This approximation was originally introduced intuitively by Durbin (1991) in order to preserve the dependence of the pressure term on all the points of the domain, leading to the well known non-local effect in the Reynolds stress equations.

The standard way (Monin & Yaglom 1975) of defining a correlation function f to be used in (12) is by writing the two-point correlations as

$$\overline{u_j(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x}') + u_i(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,j}(\mathbf{x}')} = (\overline{u_j(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x})} + \overline{u_i(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,j}(\mathbf{x})}) f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') . \quad (19)$$

In this expression, the one-point correlation is expressed in \mathbf{x} , i.e., the point where the velocities are evaluated in the two-point correlation. Then, it can be moved outside the integral in (12), which leads to the loss of the non-locality of the pressure term. However, this formulation allows the definition of the following length scale:

$$L(\mathbf{x})^2 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') , \quad (20)$$

which is an integral scale, since it provides the ratio between the integral and the correlation at zero separation:

$$\rho\phi_{ij} = -L^2(\overline{u_j(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x})} + \overline{u_i(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,j}(\mathbf{x})}) . \quad (21)$$

In order to preserve the non-local effect, the correlation function must be defined in the following way:

$$\overline{u_j(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x}') + u_i(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,j}(\mathbf{x}')} = (\overline{u_j(\mathbf{x}')\nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x}') + u_i(\mathbf{x}')\nabla^2 p_{,j}(\mathbf{x}')}) f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') . \quad (22)$$

The only difference between (19) and (22) is the point where the one-point correlation is evaluated. If (22) is used in (12), the single-point correlation cannot be taken outside the integral. But the decomposition of the two-point correlation into the one-point correlation evaluated at \mathbf{x}' and the correlation function, and the modeling of the latter as a function which solely depends on the difference $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$, allows the conversion of the integral to a convolution product. Thus, Eq. (12) can be inverted, leading to (15). The feature which is used here is that $-\nabla^2\delta + \delta/L^2$, where δ is the Dirac function, is equal to the inverse of $\exp(-r/L)/r$ for the convolution product. Hence, the non-local effect is preserved through the Yukawa operator.

The shape of the correlation function defined by (22) has never been assessed before. The first purpose of this work is then to check if the approximation $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|/L)$ is consistent with the DNS data. For instance, the correlation function in (22) is not prevented from being larger than 1. If the root-mean square of the velocity fluctuation u_n varies rapidly in one direction, $\overline{u_n(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,m}(\mathbf{x}')}$

can become larger than $\overline{u_n(\mathbf{x}')\nabla^2 p_m(\mathbf{x}')}$. On the other hand, the correlation between the velocity and the Laplacian of the pressure gradient should decrease very rapidly with increasing separations and hence, the correlation function should remain smaller or only slightly larger than one.

The length scale used in the approximation (13) is not rigorously an integral scale because it does not satisfy (21). Nevertheless, it is the integral of the function $\exp(-r/L)$ from zero to infinity. One may attempt to evaluate this length scale as the integral of the correlation function $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. However, as will be shown in §5.4, this definition is not satisfactory. Thus, another purpose of the present work is to evaluate alternative definitions of the length scale, and compare it with the turbulent length scale $k^3/2\varepsilon$, which is used in elliptic relaxation models.

The ultimate objective of the evaluations of the correlation function and the length scale is to find ways to improve the elliptic relaxation approach. As pointed out by Wizman *et al.* (1996), the elliptic relaxation equation does not act in the right direction in the log layer. For instance, if the IP and Rotta models are used as the source term in (16), since the anisotropy is fairly constant in the log layer, ϕ_{ij} has the same behavior in $1/y$ as ε and P . Then, it can be easily shown that the solution of (16) is

$$\phi_{ij} = \frac{1}{1 - 2C^2\kappa^2}\phi_{ij}^h, \quad (23)$$

if the length scale is $L = C\kappa y$, where κ is the Karman constant. Hence, in the log layer, the redistribution of energy between the components of the Reynolds stress tensor is amplified, while a damping due to the presence of the wall is expected.

Therefore, Wizman *et al.* (1996) introduced other formulations of the elliptic relaxation equation. The first one, the so-called *neutral formulation*, is defined as

$$\phi_{ij} - \nabla^2(L^2\phi_{ij}) = \phi_{ij}^h. \quad (24)$$

It produces neither amplification nor reduction of the redistribution in the log layer, since it leads to $\phi_{ij} = \phi_{ij}^h$. The second one, which yields the best agreement with DNS data, is given by

$$\phi_{ij} - L^2\nabla\left(\frac{1}{L^2}\nabla(L^2\phi_{ij})\right) = \phi_{ij}^h. \quad (25)$$

It exhibits a damping of the redistribution in the log layer.

These empirically derived new formulations require further justifications. What is suspected here is that the approximation of the correlation function f by an exponential function is not appropriate. Indeed, the latter is isotropic, whereas the former may decrease more rapidly when the point \mathbf{x}' is moving towards the wall than when it is moving away from it. Experiments from Sabot (1976) in a pipe show that the contours of the two-point correlations of velocities are tightly packed between the point of zero separation and the wall. It is suspected that the same phenomenon occurs for correlations between velocity and Laplacian of the pressure gradient. Moreover, this feature is closely linked to the variation of the

length scale in the near wall region. When the correlation function is modeled by an isotropic function, the same weight is given to points towards the wall and those away from it. Since the source term decreases in the log layer, it results in an over-prediction of the integral. This phenomenon can be suspected to be the reason for the erroneous behavior of the elliptic relaxation equation in the log layer. This idea will be carefully explored in the following DNS analysis, in order to support modifications of the model such as those proposed by Wizman *et al.* (1996).

In addition, some general improvements of the model can be expected from such reformulations. Because of the erroneous behavior described above, it is difficult to reproduce accurately both the viscous sublayer and log layer. For instance, the coefficients of the V2F model have been tuned as a compromise between the boundary layer and the channel flow, since it is impossible to predict perfectly both flows with the same set of coefficients. Furthermore, this type of compromise limits the influence of the elliptic relaxation equation to a region very close to the wall. Parneix, Laurence & Durbin (1998) showed that in the case of the backstep flow, the turbulent force $-\overline{uv}_{,y}$ in the mean streamwise velocity equation is over-predicted in the backflow region, which acts to slow down the flow, leading to an under-prediction of the intensity of the recirculation. All modifications of the coefficients attempted by them proved ineffective, and they only managed to reduce the error by 50% by including terms involving the gradient of the mean flow in the turbulent transport term. In this case some improvement can be expected too by extending the influence of the elliptic relaxation equation in the backflow region and particularly by reformulating this equation in order to account for the variations of the length scale.

4.2 Channel flow database and post-processing

Since the Laplacian of the pressure gradient, which involves three spatial derivatives, will be calculated, a very accurate DNS database is needed. The database used in this study is the most recent channel flow simulation of Moser, Kim & Mansour (1998) at $Re_\tau = 590$. This flow was computed on a grid of $384 \times 257 \times 384$ points in streamwise (x), wall normal (y) and spanwise (z) directions, respectively. The computational domain is given by $2\pi\delta$, 2δ and $\pi\delta$ in x , y and z , where δ denotes the channel half-width. The simulation code employed a spectral method (Fourier series in x and z , and Chebychev polynomial in y) for spatial derivatives, and a semi-implicit scheme for time integration. A total of 75 fields (restart files) are available for statistical averaging.

In order to assess the shape of the correlation function f defined by (22), the two-point correlations between the fluctuating velocities and the Laplacian of the pressure gradient must be calculated. They are evaluated in the following manner:

- First, the Laplacian of the total pressure gradient is evaluated directly from the velocity field, $\nabla^2 \tilde{p} = -\tilde{u}_{i,j} \tilde{u}_{j,i}$ where $\tilde{\cdot}$ denotes total quantities. The spatial derivatives are calculated using the same Fourier/Chebychev spectral method as for the DNS.
- The one-point and two-point correlations between the gradient of the Laplacian of the total pressure and the velocity components $\overline{\tilde{u}_j(\mathbf{x}') \nabla^2 \tilde{p}_{,i}(\mathbf{x}')}$ and $\overline{\tilde{u}_j(\mathbf{x}) \nabla^2 \tilde{p}_{,i}(\mathbf{x}')}$

are then computed. The gradient is calculated using Fourier spectral derivatives in x and z , and fourth order finite differences in y .

- The corresponding mean quantities involving U_i and $\nabla^2 P_{,i}$ are calculated. They are finally subtracted out from correlations between total quantities in order to obtain the correlations between fluctuating quantities.

The ensemble averages are replaced by averaging in the homogeneous directions and over the 75 restart fields. The computations are very expensive. As a practical matter, calculations are performed at 7 representative y -locations only, for separations in x - y , x - z , y - z planes.

5. Results and discussion

5.1 The wall echo

Since the paper of Launder, Reece & Rodi (1975), it has been widely accepted in the turbulence community that, in a semi-infinite space bounded by a plane at $y = 0$, the image term in the integral equation of ϕ_{ij} represents the so-called wall echo effect, responsible for the reduction of the amplitude of the energy redistribution between components of the Reynolds stress tensor. Consequently, in second moment closure models, extra terms are frequently incorporated to account for this effect (Gibson & Launder 1978). These wall echo terms depend on the distance to the wall, which is often not well defined in complex geometries. The inclusion of wall echo terms often worsen the predictions in engineering applications even though they have proven to be effective in simple flows.

The physical reasoning behind this is that the pressure fluctuations are reflected by the wall, introducing an ‘‘echo’’ contribution which can be considered as instantaneous in an incompressible flow. Considering each point of the domain as a source of pressure fluctuations, the echo can be represented by an image source of fluctuations. The contribution of this echo actually increases the pressure fluctuations (in a closed room, the echo increases the noise). This feature is linked to the homogeneous Neumann boundary condition at the wall. Mathematically, this can be related to the fact that the presence of the wall induces the presence of an image term in the Green function (7). On account of the homogeneous Neumann boundary condition, the image term appears with the same sign as the principal term, whereas if a homogeneous Dirichlet boundary condition was satisfied at the wall, it should have an opposite sign.

Thus, the wall echo effect cannot be responsible for the damping of the energy redistribution. Figure 2 shows a comparison among the three source terms in the integral Eq. (12) of the pressure term, corresponding to the three parts in $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0)$ (cf. (10)), for the components ϕ_{11} and ϕ_{22} . The magnitudes of these source terms have been arbitrarily normalized such that the maximum of the first image term ($n = -1$) is 1. The solid line, representing the principal term ($n = 0$), has been truncated because it approaches infinity at $y^+ = y'^+ = 30$. It is clear that the first image term ($n = -1$), associated with the closer wall located at $y^+ = 0$, is always of the same sign as the principal term. It can also be noticed that this term gives more weight to the region very close to the wall, where it becomes equal to the

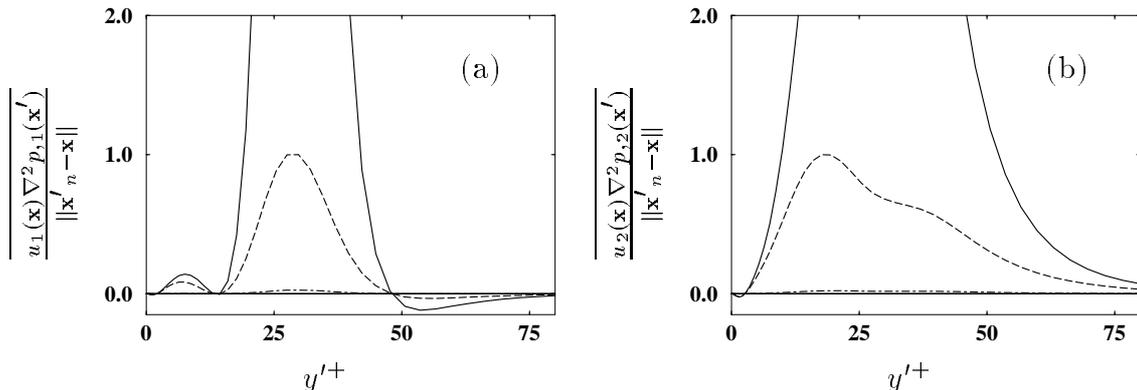


FIGURE 2. Comparisons of the different source terms in the integral Eq. (12) of the pressure term with $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0)$ given by (10) at location $y^+ = 30$. Separations in x - and z -directions are zero. (a) ϕ_{11} ; (b) ϕ_{22} . — $n=0$ (principal term); ---- $n=-1$ (first image term); -·-· $n=1$ (second image term). The vertical coordinate is arbitrarily normalized such that the maximum of $n = -1$ term is 1.

principal term and the two-point correlation changes sign for the component ϕ_{22} , as shown in Fig. 2b. However, this feature is not present in Fig. 2a and, moreover, the contribution of this part of the domain to the integral is rather small. It must be emphasized that even though the $n = -1$ source term appears negligible near the point of zero separation relative to the $n = 0$ term, which goes to infinity, its contribution to the integral is significant. Indeed, the value of the volume integral of $1/r$ between $r = 0$ and $r = 1$ is only 2π . Thus, Figs. 2a and 2b clearly show that the contributions of the image terms to the integral are of the same sign as the contribution of the principal term. Unfortunately, it is not possible here to evaluate quantitatively the relative weight of each term because it involves two-point correlations with separations in the whole 3D-domain, which have not been calculated.

At this point a very interesting conclusion can be drawn. The image terms in the integral Eq. (12) with $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ defined by (10), which account for the wall echo, actually have an amplification effect on the redistribution of turbulent energy between the different component of the Reynolds stress. Thus, it is time to abandon the traditional way of modeling the damping of the redistribution, which consists of introducing Gibson & Launder (1978) type terms involving functions of the geometry. This damping can only be caused by the damping of the two-point correlation itself, which is a consequence of the no-slip boundary conditions and the wall-blocking effect.

This phenomenon is an inhomogeneity effect, which can only be accounted for by non-local models, such as the elliptic relaxation model. However, it has been shown in §4.1 that the behavior of the latter is not satisfactory in the log layer. The following sections will show that this flaw is due to the fact that the model does not account for the asymmetry of the correlation function in the direction normal to the wall, which is a consequence of the variation of the length scale in inhomogeneous regions. By reformulating the elliptic relaxation equation, the damping of

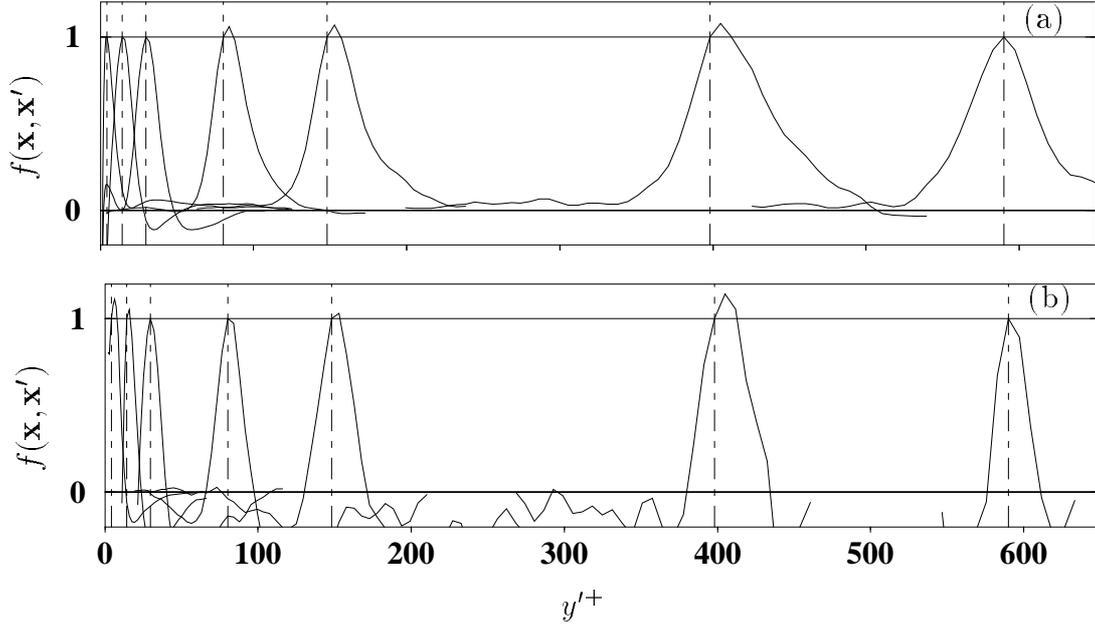


FIGURE 3. Correlation function defined by (26) calculated from the DNS data at different y locations: $y^+ = 4$; $y^+ = 14$; $y^+ = 30$; $y^+ = 80$; $y^+ = 150$; $y^+ = 400$; $y^+ = 590$. Separations in x - and z -directions are zero. (a) $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \overline{u_1(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,1}(\mathbf{x}')}/\overline{u_1(\mathbf{x}')\nabla^2 p_{,1}(\mathbf{x}')}$; (b) $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \overline{u_2(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,2}(\mathbf{x}')}/\overline{u_2(\mathbf{x}')\nabla^2 p_{,2}(\mathbf{x}')}$.

the redistribution in the log layer can be reproduced, without introducing any “wall echo” correction term (§6.2).

5.2 Asymmetry of the correlation function in y -direction

The main purpose of this study is to investigate through DNS data the shape of the correlation function defined by (22), which is modeled by an exponential function in the elliptic relaxation method. First, it must be emphasized that this model function is unique, i.e., it does not depend on the component of ϕ_{ij} . This feature is not supported by any theoretical result, but is necessary to warrant the frame independence of the model. On the other hand, using DNS data, a correlation function $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ can be calculated for each component of ϕ_{ij} :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\overline{u_\alpha(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,\beta}(\mathbf{x}') + u_\beta(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,\alpha}(\mathbf{x}')}}{\overline{u_\alpha(\mathbf{x}')\nabla^2 p_{,\beta}(\mathbf{x}') + u_\beta(\mathbf{x}')\nabla^2 p_{,\alpha}(\mathbf{x}')}}, \quad (26)$$

without summation over Greek indices. It is obviously impossible to derive a model of f which matches the DNS results for all the components. Hence, the following analysis should be interpreted in a qualitative rather than quantitative sense.

Figure 3 shows the correlation function $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ corresponding to components ϕ_{11} (Fig. 3a) and ϕ_{22} (Fig. 3b) for 7 different y locations, at zero x - and z -separation. Each curve has been truncated for clarity, since the ratio (26) becomes rather “noisy” for large separations. Several observations can be made from the figure:

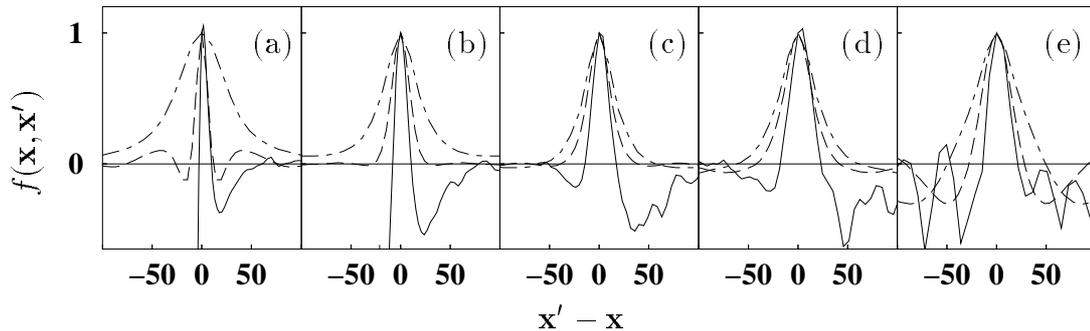


FIGURE 4. Comparison of shapes of the correlation function corresponding to ϕ_{22} for separations in the 3 principal directions at different locations. (a) $y^+ = 14$, (b) $y^+ = 30$, (c) $y^+ = 80$, (d) $y^+ = 150$, (e) $y^+ = 590$. Separations: \cdots , x -direction, ($\Delta y = \Delta z = 0$); — , y -direction, ($\Delta x = \Delta z = 0$); $\text{-}\cdot\text{-}$, z -direction, ($\Delta x = \Delta y = 0$).

- The correlation functions corresponding to ϕ_{11} and ϕ_{22} are quite different. In particular, the correlation length scale appears to be significantly larger at every location for the 11 component than for the 22 component.
- The correlation function becomes negative at certain separations, particularly for the 22 component.
- The correlation length scale varies with location. It increases rapidly when the fixed point \mathbf{x} moves away from the wall. Then, it seems to reach a maximum level and decreases slightly as the center of the channel is approached. This behavior seems to be qualitatively the same for both components.
- These functions have asymmetrical shapes, particularly in the log layer. As pointed out in §4.1, the correlation function defined by (26) is not restricted to values less than or equal to 1. It can be observed in Fig. 3b that this is indeed the case. For instance, the correlation function at $y^+ = 400$ reaches a maximum value of approximately 1.15 at $y'^+ \simeq 405$.

The main conclusion which can be drawn from the figures is that the correlation function is very asymmetric. This feature is linked to the rapid variation of the length scale, which increases with distance from the wall. Modeling the correlation function by an exponential function leads to too much weight being placed in the region between the point and the wall. Therefore, as will be described below, the over-estimation of the pressure term in the log layer can be corrected by introducing some asymmetry in the model for $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

5.3 Anisotropy of the correlation function

Figure 4 shows the correlation function corresponding to ϕ_{22} , evaluated from (26) with $\alpha = \beta = 2$, for separations in the principal directions. Note that for separations in y -direction the correlation function goes to $-\infty$ when the point y' approaches the wall, as can be seen in Figs. 4a and 4b. This is because in the ratio (26), the one-point correlation involves $u_2(y')$, which behaves as y'^2 in the vicinity of the wall, whereas the two-point correlation only contains $u_2(y)$ which is constant with respect to y' . Accordingly, the ratio behaves as y'^{-2} near the wall.

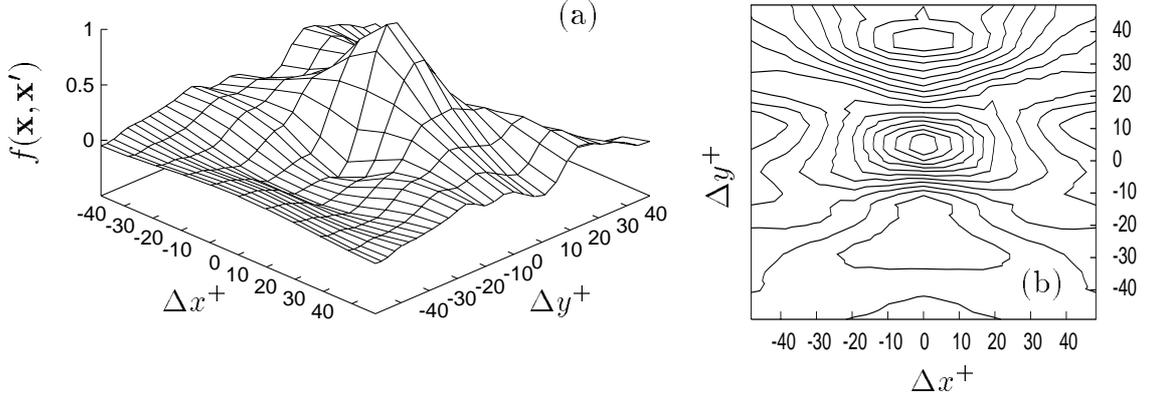


FIGURE 5. Correlation function corresponding to ϕ_{22} at $y^+ = 80$ for separations in the x - y plane ($\Delta z = 0$). (a) $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, (b) Iso-correlation contours. Contour levels from -0.5 to 1 are separated by 0.1 .

All the Figs. 4a-e show that the velocity u_2 and the y -derivative of the Laplacian of the pressure are correlated over a longer distance in the streamwise direction than in other two principal directions. This feature is consistent with the streamwise elongation of the turbulent structures observed in the experiments. This anisotropy is very important near the wall (Fig. 4a) and becomes less pronounced away from it (Figs. 4b-e). Note that at the center of the channel, the correlation function is still anisotropic.

The anisotropy of the correlation function at location $y^+ = 80$, corresponding to Fig. 4c, can also be observed in Fig. 5. In 5a, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ is plotted as a function of separation in the x - y plane ($\Delta z = 0$). Figure 5b shows the contour levels of this surface. One can observe that near the point of zero separation, the highest contour, which corresponds to $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 1$, is almost round. The shape of the contours becomes more elongated in the x -direction as the level decreases.

The asymmetry of the correlation function in y -direction, emphasized in §5.2, appears in Fig. 5b as well. When looking only at the spacing between consecutive contours, the function may seem somewhat symmetric. But it must be noted that the contours are not centered at the point of zero separation. Actually, the highest contour level plotted, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 1$, contains this point. This asymmetry is clearly observed as well in the regions of negative contour values. First, they are not symmetrical with respect to zero, since they are approximately centered at $\Delta y^+ = -25$ and $\Delta y^+ = 35$. Secondly, the extremum of the region corresponding to positive separations is much lower than the other one.

The above observations demonstrate that the correlation function is not only asymmetric in the y -direction but also anisotropic, especially in the very near-wall region ($y^+ < 30$). Consequently, it calls into question the use of the exponential function, which does not distinguish between streamwise, wall-normal and spanwise directions. However, this anisotropy cannot be considered as being responsible for the defects noted in §4.1, since in the case of channel flow, the non-local effect obviously does not act in the homogeneous directions. Nevertheless, this points out

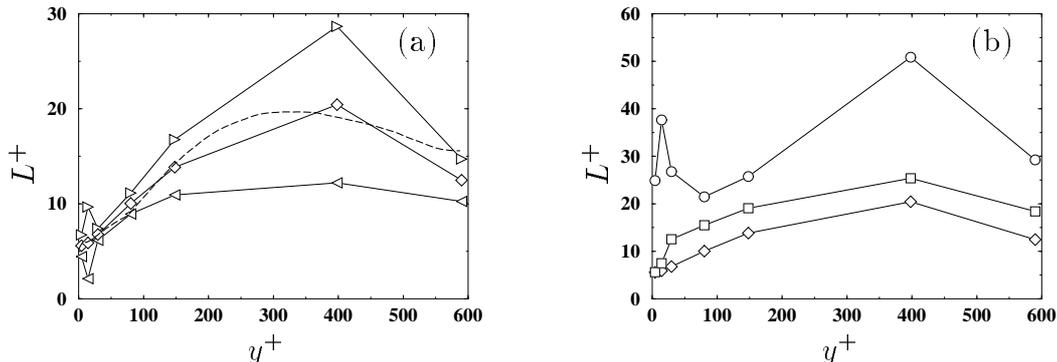


FIGURE 6. Length scales based on curves in Fig. 4. (a) Comparison of the different length scales in y -direction: ◁ Left length scale; ◇ Central length scale; ▷ Right length scale; - - - $L = C_L \max(k^{3/2}\epsilon^{-1}, C_\eta \nu^{3/4}\epsilon^{-1/4})$ with $C_L = 0.045$; $C_\eta = 80.0$. (b) Comparison of the length scale in the 3 directions: ◇ Central length scale in y -direction; ○ Length scale in x -direction; ◻ Length scale in z -direction.

a feature of the correlation function which can become important in more complex flows.

5.4 The correlation length scale

The length scale L entering the model of the two-point correlations (13) is not easy to determine in DNS data. As emphasized in §4.1, it does not correspond rigorously to the integral scale (20).

It is noted that L is the integral of the function $\exp(-r/L)$ from zero to infinity. This property allows one to evaluate a length scale in each direction, but it is unfortunately not satisfactory. Since the x -direction is homogeneous, the integral over x of quantities involving x -derivatives is zero. Hence, the evaluation of the length scale in x -direction of the correlation function associated to ϕ_{11} , i.e., the function defined by (26) with $\alpha = \beta = 1$, gives exactly zero. This is due to the fact that it does not give the right weights to the different regions. Indeed, considering isotropic turbulence and ignoring the image terms, it can be seen that the 3-D integral (20) reduces to the 1-D integral $\int_0^\infty r f(\mathbf{x}, r) dr$, which increases the relative weight of the large separations.

The method which will be used in the following is not an integral method. It can be noted that the function $\exp(-r/L)$ takes the value $1/e$ for $r = L$. Thus, a length scale can be defined by the separation where the correlation function takes this value. Although this method is very simple, it provides a measure of the width of the function in each direction. The drawback is that it only characterizes the shape of the function at small separations and, in particular, it does not account for the negative excursions.

Nevertheless, this method allows the evaluation of the qualitative behavior of the length scale across the channel and distinguishes between the length scales evaluated at the left and right of the zero separation point, characterizing the asymmetry of the function. Figure 6 shows the different length scales which can be evaluated from the correlation functions depicted in Fig. 4. Figure 6a compares the different length

scales defined in the y -direction: the left (right) length scale corresponds to the value of negative (positive) separation at which the correlation function is equal to $1/\epsilon$, and the “central” length scale is the mean of the left and right length scales. It can be observed that, except for the peculiar behavior at $y^+ = 14$, the asymmetry is weak close to the wall and becomes more pronounced away from it. This trend is reversed when the center of the channel is approached.

The growth of the central length scale with y is nearly linear up to $y^+ = 200$. In Fig. 6a, the length scale used in the elliptic relaxation model is also plotted. It can be seen that the global shape is very satisfactory, although the coefficient C_L has been reduced by a factor of 4. This value of C_L cannot be considered as the value which must be used in the model, since it only corresponds to the component ϕ_{22} .

Figure 6b shows the evolution across the channel of the length scale in the 3 principal directions. Although their amplitudes are different, their behaviors appear quite similar, except for $y^+ < 100$, where a spike appears in the streamwise length scale.

These results indicate that the length scale used in the model, which is the standard turbulent length scale bounded by the Kolmogorov length scale, represents quite satisfactorily the variations of the correlation length in the channel. The coefficient C_L is likely over-estimated, but the results presented here are mainly qualitative and therefore, the coefficient tuned by computer optimization must be preferred. Overall, these results justify the way the length scale is modeled in the elliptic relaxation method. The use of the Kolmogorov length scale as a lower bound, which was originally introduced only to avoid singularities in the model, has proved important to improving the predictions of the model. This is due to the behavior of the correlation length described above, which does not go to zero and varies linearly in the vicinity of the wall.

6. Proposed modification to the model

6.1 Correction to the model of the correlation function

The results presented in the previous section show that the model of the correlation function can be improved. For the present study, whose main purpose is to find ways to correct the wrong behavior in the log layer as detailed in §4.1, the most noteworthy feature of the correlation function is its asymmetry in the y -direction. Indeed, Fig. 7 shows that, when the original correlation function model is used, the two-point correlation obtained by multiplying the model function by the one-point correlation from the DNS data (cf. (26)), is larger toward the wall than away from it. This is very different from the two-point correlation computed directly from the DNS fields, which is quite symmetrical. Consequently, the integral of the two-point correlation is over-estimated, leading to the incorrect amplification of the pressure term pointed out in §4.1.

This work does not attempt to find the best way to modify the model. Rather, it presents a direction in which an improvement of the model can be sought. An example of modification is presented in Fig. 7. The asymmetrical correlation function shown in 7b is obtained by introducing a dependence on the gradient of the

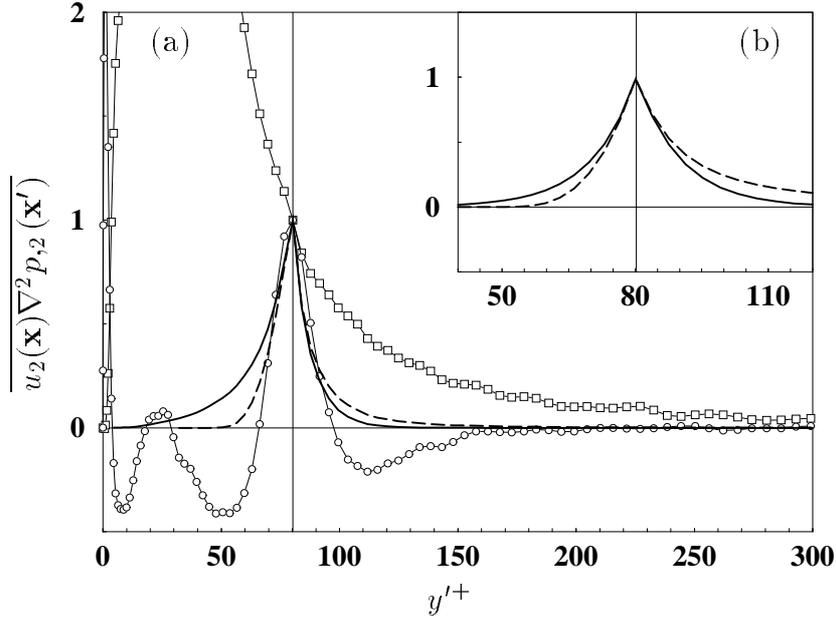


FIGURE 7. *A priori* test of the two-point correlation obtained using two different correlation functions. (a) One- and two-point correlations. All quantities are normalized by the value of the two-point correlation at zero separation. \square One-point correlation from DNS ($\mathbf{x} = \mathbf{x}'$); \circ Two-point correlation from DNS; — Two-point correlation obtained using the symmetrical exponential correlation function shown in (b) and the one-point correlation from DNS; ---- Two-point correlation obtained using the asymmetrical exponential correlation function shown in (b) and the one-point correlation from DNS. (b) Model of the correlation function. — Symmetrical correlation function: $f(y, y') = \exp(-|y' - y|/L)$; ---- Asymmetrical correlation function: $f(y, y') = \exp(-|y' - y|/(L + (y' - y)dL/dy))$.

length scale: $f(y, y') = \exp(-|y' - y|/(L + (y' - y)dL/dy))$. The resulting two-point correlation, shown in 7a, is much closer to the DNS value than the one obtained using the original model. In particular, the new function corrects the erroneous shape observed between the point and the wall. The next section will detail the consequence of this new model on the form of the elliptic relaxation equation.

6.2 Reformulation of the elliptic relaxation equation

The simple modification of the correlation function model proposed above can easily lead to a new form of the elliptic relaxation model. The correlation function is henceforth modeled by

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\frac{r}{L + r\mathbf{u} \cdot \nabla L}\right), \quad (27)$$

where r and \mathbf{u} denote respectively $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$ and $(\mathbf{x}' - \mathbf{x})/\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$. Considering the new term $r\mathbf{u} \cdot \nabla L$ as a small correction, a Taylor expansion of (27) leads to the following expression:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\frac{r}{L}\right) + \frac{r^2}{L^2} \exp\left(-\frac{r}{L}\right) \mathbf{u} \cdot \nabla L. \quad (28)$$

Using (28), the integral equation of the pressure term leads to two terms ϕ_{ij}^a and ϕ_{ij}^b . The first term is the same as the original one and satisfies

$$\phi_{ij}^a - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^a = -\frac{L^2}{\rho} g_{ij} , \quad (29)$$

where g_{ij} denotes the one-point correlation $\overline{u_j \nabla^2 p_{,i}} + \overline{u_i \nabla^2 p_{,j}}$. The second term

$$\phi_{ij}^b = 8 \frac{L^3}{\rho} \nabla L \cdot \nabla g_{ij} \quad (30)$$

is a correction term. Following Durbin (1991), the RHS of (29) can be replaced by any quasi-homogeneous model, which corresponds to modeling g_{ij} by $\rho \phi_{ij}^h / L^2$. There are two possible ways to take into account the correction term in the model. First, it can be considered as an explicit correction as

$$\phi_{ij}^a - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^a = \phi_{ij}^h ; \quad (31)$$

$$\phi_{ij}^b = 8L^3 \nabla L \cdot \nabla \frac{\phi_{ij}^a}{L^2} . \quad (32)$$

Here, (31) gives exactly the same solution as the original model, while (32) provides an explicit correction. The second possibility is to introduce the correction directly into the elliptic relaxation equation in the following manner:

$$\phi_{ij} - L^2 \nabla^2 \phi_{ij} - 8L^3 \nabla L \cdot \nabla \frac{\phi_{ij}}{L^2} = \phi_{ij}^h . \quad (33)$$

The same analysis as in §4.1 can be conducted in the log layer, which yields the following results:

(a) with the explicit formulation (31) and (32): $\phi_{ij} = \frac{1 - 24C^2 \kappa^2}{1 - 2C^2 \kappa^2} \phi_{ij}^h ;$

(b) with the implicit formulation (33): $\phi_{ij} = \frac{1}{1 + 22C^2 \kappa^2} \phi_{ij}^h .$

Both new formulations give a reduction of the redistribution, in contrast to the original one, which gave an amplification, as pointed out in §4.1. Note that the reductions are identical up to the third order in the small parameter $C\kappa$.

Thus, the simple modification of the model for the correlation function proposed above overcomes the deficiencies of the original model in the log layer. The so-called ‘‘wall echo effect’’, called into question in §5.1, can be obtained only by accounting for the asymmetry of the correlation function in the direction normal to the wall, i.e., by introducing a dependence on the gradient of the length scale in the model. This can be compared to the correction applied by Launder & Tselepidakis (1991), who sought to avoid the use of wall echo terms by introducing an ‘‘effective velocity gradient’’ in their pressure term model, defined as

$$\nabla U_i^{eff} = \nabla U_i + c^{eff} L (\nabla L \cdot \nabla) \nabla U_i \quad (34)$$

(see Wizman *et al.* (1996) for more details). This approach accounts for the inhomogeneity of the flow in the near-wall region, which is very similar to the present work.

7. Conclusions

A DNS database for a channel flow at $Re_\tau = 590$ has been used to assess the validity of the model assumptions in the elliptic relaxation method. Several conclusions can be drawn:

- The method, which is based on the approximation of the correlation function (26) by an exponential function, is consistent with DNS data, although some refinements are necessary. In particular, the length scale used in the model, defined by the standard turbulent length scale bounded by the Kolmogorov length scale, reproduces rather surprisingly the overall shape of that obtained from DNS data.
- The shape of the correlation function depends on the component of the two-point correlation tensor used to evaluate it. Therefore, one can not expect an accurate reproduction of all the two-point correlations. Only a global accounting of the non-local effect is possible.
- An analysis of the image terms entering the approximate Green function of the channel shows that they actually lead to an amplification, rather than reduction, of the redistribution between the components of the Reynolds stress, in contrast to the common belief. The reduction can only be due to the damping of the source term in the integral equation, especially for the diagonal component normal to the wall. Accordingly, this is not a wall echo effect, but a wall blocking effect.
- The correlation function computed from DNS data is strongly asymmetric in the direction normal to the wall, particularly in the log layer. Modeling it by a simple exponential function gives too much weight to the region between the point and the wall. Since the one-point correlation increases rapidly toward the wall, it yields an over-estimation of the pressure term. This is the reason for the observed erroneous amplification of the redistribution in the log layer.
- The correlation function is anisotropic. In particular, very close to the wall, the iso-correlation contours are strongly elongated in the streamwise direction. This feature has no influence on the channel flow, and its effect on complex flows cannot be determined in the present study.
- A simple modification to the correlation function model, accounting for the observed asymmetry in the direction normal to the wall, allows the derivation of a new formulation of the elliptic relaxation equation which does not possess the same defect as the original version. This result shows that the reduction of the redistribution in the log layer can be reproduced by introducing inhomogeneity effects and avoiding the use of any wall echo correction terms.

Based on the physical insight gained through this study, effort will continue to be directed toward the improvement of the elliptic relaxation method. Different formulations of the model will be tested in simple flows, in order to assess the improvement of the predictions. The new model will be calibrated on the channel flow and the boundary layer flow to allow its application in more complex configurations.

Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge William Cabot, Javier Jimenez, and Robert

Moser for assistance with the DNS database and useful discussions.

REFERENCES

- BRADSHAW, P. 1973 The Strategy of Calculation Methods for Complex Turbulent Flows. *Imperial College, Dept. of Aero. Report.* **73-05**, 1-56.
- BRADSHAW, P., MANSOUR, N. N. & PIOMELLI, U. 1987 On Local Approximations of the Pressure-Strain Term in Turbulence Models. *Proc. Summer Program*, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ., 159-164.
- CHOU, P. Y. 1945 On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Qrtly. of Appl. Math.* **3**, 38-54.
- DURBIN, P. A. 1991 Near-wall turbulence closure modeling without "damping functions". *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* **3**, 1-13.
- DURBIN, P. A. 1993 A Reynolds stress model for near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* **249**, 465-498.
- GIBSON, M. M. & LAUNDER, B. E. 1978 Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.* **86**, 3.
- KIM, J. 1989 On the structure of pressure fluctuations in simulated turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **205**, 421-451.
- KIM, J., MOIN, P. & MOSER, R. 1987 Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **177**, 133-166.
- LAUNDER, B. E., REECE, G. J. & RODI, W. 1975 Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.* **68-3**, 537-566.
- LAUNDER, B. E. & TSELEPIDAKIS, D. P. 1991 Progress and paradoxes in modelling near-wall turbulence. *8th Symp. Turb. Shear Flows.* **29-1**, 1-6.
- LUMLEY, J. L. 1975 Pressure-strain correlation. *Phys. Fluids.* **18**(6), 750-750.
- MANSOUR, N. N., KIM, J. & MOIN, P. 1988 Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **194**, 15-44.
- MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. 1975 *Statistical Fluid Mechanics*. MIT Press, English version of the original Russian version (1965).
- MOSER, R., KIM, J. & MANSOUR, N. N. 1998 Manuscript in preparation.
- PARNEIX, S., LAURENCE, D. & DURBIN, P. A. 1998 A procedure for using DNS databases. *J. Fluid Eng.* **120**, 40-47.
- SABOT, J. 1976 *Etude de la cohérence spatiale et temporelle de la turbulence établie en conduite circulaire*. PhD thesis, Université de Lyon.
- WIZMAN, V., LAURENCE, D., KANNICHE, M., DURBIN, P. & DEMUREN, A. 1996 Modeling near-wall effects in second-moment closures by elliptic relaxation. *Int. J. Heat and Fluid Flow.* **17**, 255-266.

Annexe B

Article paru dans : *Proceedings of the first
Symposium on Turbulence and Shear Flow
Phenomena, Santa Barbara, 1999*

ASSESSMENT OF INHOMOGENEITY EFFECTS ON THE PRESSURE TERM USING DNS DATABASE: IMPLICATIONS FOR RANS MODELS

Rémi Manceau¹, Meng Wang² and Dominique Laurence¹

¹Laboratoire National d'Hydraulique, Electricité de France
6, quai Watier, 78 401 Chatou, France

²Center for Turbulence Research, Stanford University
Stanford, CA 94305-3030, USA

ABSTRACT

The assumptions underlying the elliptic relaxation model for the pressure term in the Reynolds stress transport equations are examined through the analysis of a channel flow DNS database. The model is shown to be consistent with the data, in particular with regard to the evaluation of the length scale. Some features not accounted by the model, such as the asymmetry in the inhomogeneous direction of the two-point correlation function, are found to be responsible for the observed spurious amplification of the return to isotropy in the log layer. The expected reduction is obtained in the proposed new formulations of the elliptic relaxation equation. The common belief that this reduction is due to the wall echo effect is shown to be erroneous.

INTRODUCTION

One of the most important and difficult tasks for turbulence modelers is to model the pressure term in the Reynolds stress transport equations, since it is the most significant unclosed term. Following the pioneering work of Chou (1945), this term is commonly split into rapid, slow and surface parts. The latter is usually neglected or represented by the so-called *wall echo* terms, while the rapid part is modeled by introducing a fourth order tensor, considering that the length scale of the variations of the velocity gradient is large in comparison with that of the two-point correlations.

This approach, which leads to the loss of the non-local nature of the pressure term, was found by Bradshaw *et al.* (1987) to be valid only for $y^+ \geq 40$ in a channel flow at $Re_\tau = 180$. Therefore, the influence of the wall on turbulence cannot be reproduced without introducing correction terms to this type of models. In order to avoid such *ad hoc* modifications, Durbin (1991) proposed to model the two-point correlations in the integral equation for the pressure term by an exponential function. This novel method leads to the so-called *elliptic relaxation equation*, which reproduces the non-local effect and enables the derivation of

second moment closure models integrable down to solid boundaries.

While the elliptic relaxation model has led to very encouraging results, some issues remain open and room for improvement exists. The present work aims to assess the validity of some model assumptions through the analysis of a DNS database, which has never been done before. Particular attention will be focused on the shape of the correlation function as well as the length scale used in the model. New formulations, which take into account the variation of the length scale and the anisotropy of the correlation function, will be proposed, and their behavior in the log layer evaluated.

PRESENTATION OF THE PROBLEM

The elliptic relaxation approach

The pressure term entering the Reynolds stress transport equations is

$$\rho \phi_{ij} = -(\overline{u_j p_i} + \overline{u_i p_j}) \quad (1)$$

The gradient of the pressure fluctuation, as well as the pressure fluctuation itself, satisfy the Poisson equation

$$\nabla^2 p_{,k} = -\rho (2U_{i,j} u_{j,i} + u_{i,j} u_{j,i} - \overline{u_{i,j} u_{j,i}})_{,k} \quad (2)$$

Eq. (2) is assumed to satisfy the boundary condition $p_{,k\mathbf{n}} = 0$, where \mathbf{n} denotes the unit vector normal to the wall. This assumption is equivalent to requiring that the “Stokes part” of the pressure gradient, namely the part produced by the inhomogeneous boundary condition, be negligible (Kim, 1989). The general solution of Eq. (2) is

$$p_{,k}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \nabla^2 p_{,k}(\mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (3)$$

where G_{Ω} is the Green function of the domain, i.e. the solution of Eq. (2) in which the RHS is replaced by the Dirac function $\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$. Eq. (3) does not contain any surface term because the Green function satisfies the same homogeneous Neumann boundary condition as for $p_{,k}$.

The integral equation of the pressure term is a conse-

quence of Eq. (3):

$$\rho\phi_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (4)$$

where $\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\overline{u_j(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,i}(\mathbf{x}') - u_i(\mathbf{x})\nabla^2 p_{,j}(\mathbf{x}')}$.

Durbin (1991) proposed to model this two-point correlation using the following definition of the correlation function $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$:

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (5)$$

and to approximate the correlation function by

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-r/L) \quad (6)$$

where $r = \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$. Note that the correlation function cannot depend on the component (i, j) in order to preserve the tensorial properties of the pressure term. In a *free space*, the Green function is simply $G_{\mathbb{R}^3}(r) = -1/4\pi r$. Using Eqs. (5) and (6) in Eq. (4) then yields a convolution product between $-\Psi_{ij}$ and $E_{\mathbb{R}^3}(r) = \exp(-r/L)/4\pi r$, which is the Green function associated with the Yukawa operator $-\nabla^2 + 1/L^2$. Hence, the modeled pressure term satisfies the elliptic relaxation or Yukawa equation:

$$\phi_{ij} - L^2 \nabla^2 \phi_{ij} = \phi_{ij}^h \quad (7)$$

In Eq. (7), the original RHS, $-\rho^{-1}L^2\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, has been replaced by a quasi-homogeneous model ϕ_{ij}^h , such as IP or SSG model, noting that in homogeneous situations ϕ_{ij} must relax to ϕ_{ij}^h . This equation can easily be generalized in the case of a channel flow (Manceau *et al.*, 1998, 1999).

Issues to examine

The elliptic relaxation approach is mainly based on the modeling by an exponential function of the correlation function $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ defined in Eq. (5). This approximation was introduced intuitively by Durbin (1991) in order to preserve the non-local effect on the pressure term. In the present study, the two-point correlation $\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ will be evaluated from the DNS database of a channel flow at $Re_{\tau} = 590$ (Moser *et al.*, 1999), to assess the shape of the correlation function and the validity of Durbin's approximation. In addition, the length scale involved in Eqs. (6) and (7) will be evaluated, in order to validate the use of the turbulent length scale $k^3/2\varepsilon$ in the main part of the flow and the Kolmogorov length scale in the near-wall region.

The ultimate objective of the present DNS analysis is to find ways to improve the behavior of the model. As pointed out by Wizman *et al.* (1996), the elliptic relaxation equation does not act in the right direction in the log layer. Indeed, the function ϕ_{ij}^h , like ε , behaves in this region as $1/y$. If the length scale used in the model is $L = C\kappa y$, the solution of Eq. (7) is

$$\phi_{ij} = (1 - 2C^2\kappa^2)^{-1} \phi_{ij}^h \quad (8)$$

which results in an amplification of the return to isotropy, instead of the expected reduction.

Wizman *et al.* (1996) proposed to modify the elliptic relaxation equation, in order to correct this behavior. For

instance, they introduced the so-called *neutral formulation*, replacing in Eq. (7) the term $L^2\nabla^2\phi_{ij}$ by $\nabla^2(L^2\phi_{ij})$. This formulation exhibits neither amplification nor reduction in the log layer. However, it suffers from a lack of justification.

The present work attempts to provide a more solid basis to develop other new formulations. The central idea is that the correlation function cannot be approximated by an isotropic exponential function. Indeed, there is no basis to assume that the two-point correlations between the velocity and the Laplacian of the pressure gradient should have this feature, given that the contours of the two-point correlations between velocity components are packed between the point of zero separation and the wall (Sabot, 1976).

Furthermore, the erroneous model behavior in the log layer leads to difficulties in predicting accurately both the viscous sublayer and log layer, and hence compromises are needed to calibrate the coefficients. This limits the influence of the elliptic relaxation to a region very close to the wall. Some improvements can be expected by extending this influence to a larger region.

RESULTS AND DISCUSSION

The wall echo effect

In a semi-infinite space, bounded by a plane, the Green function is $G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -1/4\pi r - 1/4\pi r^*$, where $r^* = \|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|$, \mathbf{x}'^* being the image point of \mathbf{x}' in the wall. It has been widely accepted that this image term, representing the wall echo effect, is responsible for the reduction of the pressure term. This concept has led to the inclusion of Gibson & Launder type wall echo terms.

However, since this term appears in the Green function with the same sign as the principal term, it actually *increases* the pressure fluctuation and hence the pressure term. Therefore, *the wall echo cannot be responsible for the damping of the energy redistribution.*

In a channel, the exact Green function is known only after taking Fourier transforms in homogeneous directions, which is not relevant in the context of this work. Nevertheless, it can be approximated (Manceau *et al.*, 1998, 1999) by $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0) = -1/4\pi r_{-1} - 1/4\pi r_0 - 1/4\pi r_1$, with $r_n = \|\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}\|$, where \mathbf{x}'_{-1} and \mathbf{x}'_1 are the image points of \mathbf{x}'_0 with respect to each wall.

When $G_{\Omega} \simeq H$ is used, Eq. (4) becomes

$$\rho\phi_{ij}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \frac{\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0)}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{-1}} + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} \right) dV(\mathbf{x}'_0) \quad (9)$$

Fig. 1 shows the three terms in the integrand of Eq. (9) in a channel at $y^+ = 30$. The image term arising from the far wall located at $y^+ = 1180$ is negligible, but the $n = -1$ term, which arises from the near wall at $y^+ = 0$ and has the same sign as the principal term, makes a significant, positive contribution to the integral (even though the $n = 0$ term goes to infinity at zero separation, the volume integral of $1/r$ between $r = 0$ and 1 is only 2π).

Thus, the traditional way of modeling the damping of

the return to isotropy through additional wall echo terms should be abandoned. It will be shown that this effect can be taken into account by a proper reformulation of the elliptic relaxation equation.

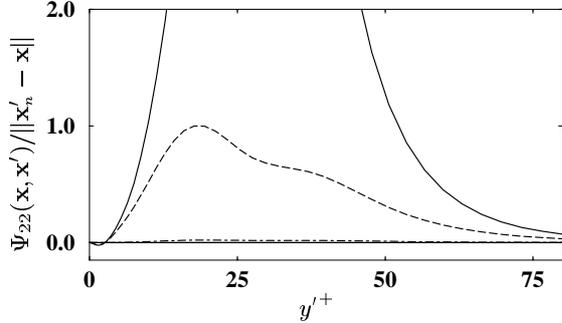


Figure 1: Comparison of the terms in the integrand of Eq. (9) ($i = j = 2$) at $y^+ = 30$: — principal term ($n = 0$), --- image term due to the wall at $y'^+ = 0$ ($n = -1$), -.- image term due to the wall at $y'^+ = 1180$ ($n = 1$). The normalization is such that the maximum of $n = -1$ term is 1.

Asymmetry in y -direction

The correlation function defined by Eq. (5) is modeled by an isotropic exponential function in the elliptic relaxation method. Using DNS data, a correlation function $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ can be calculated for each component of ϕ_{ij} from

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') / \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \quad (10)$$

without summation over Greek indices. It is thus impossible to derive a model of f which matches the DNS results for all the components. Hence, the following analysis should be interpreted in a qualitative rather than quantitative sense.

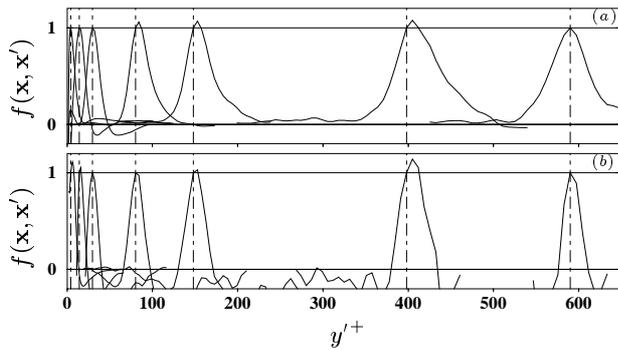


Figure 2: Correlation function calculated from the DNS data at different locations: $y^+ = 4$; $y^+ = 14$; $y^+ = 30$; $y^+ = 80$; $y^+ = 150$; $y^+ = 400$; $y^+ = 590$. f is evaluated from Eq. (10) with (a) $\alpha = \beta = 1$; (b) $\alpha = \beta = 2$. Separations in x - and z -directions are zero.

Fig. 2 shows the correlation functions corresponding to ϕ_{11} and ϕ_{22} at different locations. Several observations can be made:

- The correlation length scale is larger at every location for the 11 component than for the 22 component. Hence, only a global accounting of the non-local effect is possible, which does not reproduce exactly the data.

- The correlation functions exhibit negative excursions. This calls into question the use of an exponential function to model them. However, this model will prove to be valid in the subsequent analysis.
- The correlation functions have clearly asymmetrical shapes, particularly in the log layer.

The last feature is the most important one. Indeed, when an isotropic correlation function is used, points between the fixed position and the wall are over-weighted. In the log layer, since the amplitude of Ψ_{ij} decreases rapidly with distance to the wall, this results in the over-estimation of the amplitude of the pressure term described earlier. This appears to be the main improvable point of the model.

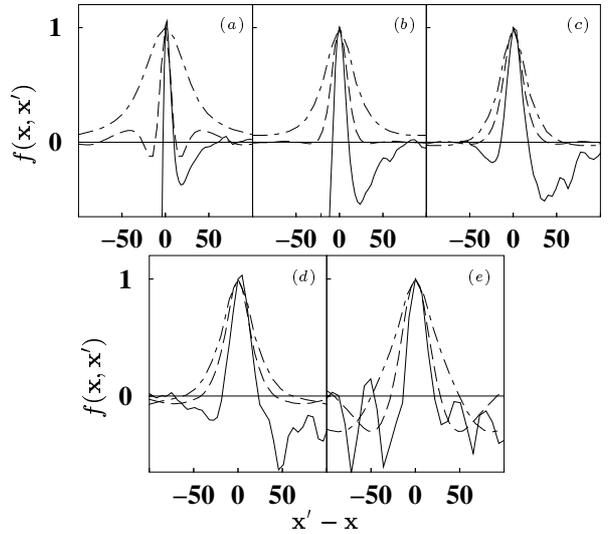


Figure 3: Shape of the correlation function defined by Eq. (10) with $\alpha = \beta = 2$, evaluated from the DNS, for separation in the 3 principal directions at different y locations. (a) $y^+ = 14$, (b) $y^+ = 30$, (c) $y^+ = 80$, (d) $y^+ = 150$, (e) $y^+ = 590$. Separations: --- x -direction, ($\Delta y = \Delta z = 0$); — y -direction, ($\Delta x = \Delta z = 0$); -.- z -direction, ($\Delta x = \Delta y = 0$).

Anisotropy

Figs. 3a-e compare the correlation function corresponding to ϕ_{22} for separations in the 3 principal directions at five y locations. It is observed that the distance of correlation is larger in the streamwise direction than in the other two directions. This feature is consistent with the streamwise elongation of turbulent structures observed in experiments. This anisotropy is most significant near the wall (Fig. 3a), and becomes less pronounced away from it (Figs. 3b-d), yet it still appears even in the center of the channel (Fig. 3e).

The above observation calls into question the use of the model given by (6), which does not distinguish among streamwise, spanwise and wall-normal directions. Although the anisotropy cannot be considered responsible for the model defects noted previously, since the non-local character has no effect in homogeneous directions, this feature may become important in more complex flows.

Length scales

The definition of the length scale used in the model (6) is not obvious. Indeed, the standard definition of the correlation function f to be used in Eq. (4) is

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x})f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (11)$$

where the one-point correlation is expressed in \mathbf{x} , the point where the velocities are evaluated. Ψ_{ij} can then be taken outside the integral in Eq. (4). This formulation leads to the definition of

$$L_{\text{int}}^2(\mathbf{x}) = \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \right| \quad (12)$$

which is an integral scale, since the ratio between the integral and the correlation at zero separation can be written as

$$\rho\phi_{ij}(\mathbf{x}) = \pm L_{\text{int}}^2(\mathbf{x})\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (13)$$

However, this formulation leads to the loss of the non-local effect. In order to preserve it, the correlation function must be defined by Eq. (5). With this definition, the one-point correlation cannot be taken outside the integral. The length scale L is then no longer an integral scale and thus cannot be evaluated by Eq. (13).

Nevertheless, L is the integral from zero to infinity of $\exp(-r/L)$. Therefore, one may attempt to define a length scale in each direction by integrating $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ along a line. But this method leads to a paradox in the homogeneous directions. For instance, the integral along the x -direction of the correlation function defined by Eq. (10) with $\alpha = \beta = 1$ gives exactly zero. This is due to the fact that $\int_0^{\infty} f(\mathbf{x}, r) dr$ is very different from the correct definition of the integral scale, Eq. (12), which reduces to $\int_0^{\infty} r f(\mathbf{x}, r) dr$ for isotropic turbulence in free space. Note also that, as a practical matter, $\int_0^{\infty} r f(\mathbf{x}, r) dr$ cannot be used to evaluate L either because the r factor in the integrand tends to amplify the numerical noise at large separation where the true value of f is small.

In the following, a very simple definition of the length scale will be used. It is noted that $\exp(-r/L)$ takes the value $1/e$ for $r = L$. Hence, one can define L as the half-width of the correlation function between the two points at which $f = 1/e$. Notwithstanding its simplicity, this method enables the evaluation of the qualitative behavior of L across the channel with directional dependence.

Fig. 4 shows a comparison of the different length scale definitions. These results are rather surprising and very encouraging. First, the correlation length scale L is very close to the integral length scale L_{int} , except in the vicinity of the wall. This shows that small separations contribute most to the integral and that larger separations, which show a more complicated behavior including negative excursions in Fig. 2, can then be neglected. This result justifies the use of a simple exponential function to model the correlation function. Furthermore, Fig. 4 shows that in the main part of the flow, the correlation length scale L can, in a standard way, be evaluated by the turbulent length scale $L_T = C_L k^{3/2} \varepsilon^{-1}$.

Secondly, in the near-wall region ($y^+ \leq 60$), the corre-

lation length scale L approaches the value of 6, whereas the integral scale L_{int} decreases rapidly toward the wall. As shown in Fig. 4, in this region, L behaves like the Kolmogorov length scale $L_K = C_{\eta} C_L \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$.

Finally, it can be seen that the point where L and L_{int} diverge is approximately where the turbulent length scale L_T becomes smaller than the Kolmogorov length scale L_K . This justifies the use of the formulation $L = \max(L_K, L_T)$ in Durbin's model.

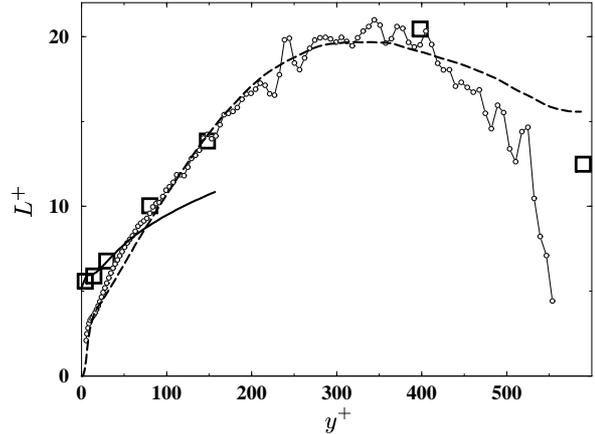


Figure 4: Comparison of the different length scales evaluated from the DNS: \square Length scale L defined as the half-width of the correlation function f shown in Fig. 2b; \circ Integral scale L_{int} given by Eq. (13) with $i = j = 2$; $---$ Turbulent length scale used in the model $L_T = C_L k^{3/2} \varepsilon^{-1}$ ($C_L = 0.045$); $---$ Kolmogorov length scale used near the wall in the model $L_K = C_{\eta} C_L \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$ ($C_{\eta} = 80$).

NEW FORMULATIONS

Space transformation

As emphasized in the preceding sections, the elliptic relaxation equation does not behave correctly in the log layer. New formulations of this equation need to be derived, based on the results of the previous section.

The first problem to be noted is the rapid variation of the length scale L across the channel. Indeed, the model is derived from Eq. (4) using Eqs. (5) and (6), which yields, in a free space,

$$\rho\phi_{ij}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \frac{\exp(-r/L)}{4\pi r} dV(\mathbf{x}') \quad (14)$$

This equation can be inverted to give Eq. (7) only if it is a convolution product, i.e., if L is a constant, or if L can be considered locally as a constant over a distance corresponding to the correlation length scale, which is L itself. In the log layer, dL/dy is about $\kappa = 0.41$, depending on the coefficient used in the model. Therefore, L is not locally a constant and Eq. (7) is not rigorously the inverse of Eq. (14).

In order to take into account the variation of L , a coordinate transformation $\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ can be introduced, such that in the transformed space, the length scale is a constant, and the boundaries of the domain are preserved:

$\alpha(\Omega) = \Omega$. In a channel, this transformation is simply given by $d\alpha_2/L\alpha = dy/L(y)$, where $L\alpha$ is a constant. Fig. 5 shows how it transforms the shape of the correlation function. The correlation length scale, which corresponds to the half-width of the correlation function, is then a constant.

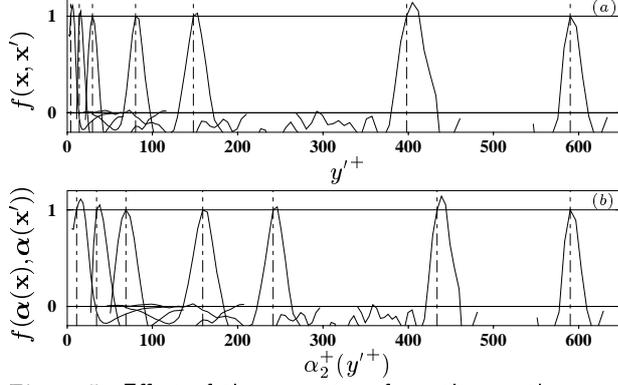


Figure 5: Effect of the space transformation on the correlation function: (a) Original correlation function (same as Fig. 2b); (b) Correlation function after transformation of y^+ -axis. See Fig. 2 for additional caption.

If one defines functions $\xi_i = p_i \circ \alpha^{-1}$, $w_i = u_i \circ \alpha^{-1}$, $\zeta_{ij} = \phi_{ij} \circ \alpha^{-1}$, and $g_i = \partial^2 \xi_i / \partial x_k \partial x_k$, the same inversion as that leading to Eq. (3) gives

$$\xi_k(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} g_k(\mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (15)$$

where $G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ is the same Green function as in Eq. (3), since the domain is preserved by the transformation α . The same method leading to Eq. (14) can be used here to show that, in a free space:

$$\rho \zeta_{ij}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \Theta_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \frac{\exp(-r/L\alpha)}{4\pi r} dV(\mathbf{x}') \quad (16)$$

where $\Theta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\overline{w_j(\mathbf{x})g_i(\mathbf{x}')} - \overline{w_i(\mathbf{x})g_j(\mathbf{x}')}$. The coordinate transformation α is chosen such that $L\alpha$ is a constant, so that Eq. (16) is now a convolution product. Therefore, ζ_{ij} satisfies the Yukawa equation:

$$\zeta_{ij}(\mathbf{x}) - L\alpha^2 \frac{\partial^2 \zeta_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_k} = -\rho^{-1} L\alpha^2 \Theta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (17)$$

The equation satisfied by ϕ_{ij} , derived from Eq. (17), involves the Jacobian matrix of the inverse transformation, $\mathbf{A} = \nabla \alpha^{-1}$. This enables the introduction of a matrix of length scales, by defining $A_{ij} = L_{ij}/L\alpha$. For instance, one can define $L_{ij} = L \overline{u_i u_j} / k$, which gives

$$\phi_{ij} - L_{kl} L_{ml} \frac{\partial^2 \phi_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} - L_{ml} \frac{\partial L_{kl}}{\partial x_m} \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_k} = \phi_{ij}^h \quad (18)$$

or simply $L_{ij} = \delta_{ij} L$, which gives

$$\phi_{ij} - L \nabla \cdot (L \nabla \phi_{ij}) = \phi_{ij}^h \quad (19)$$

The first formulation distinguishes among the different directions, as was found necessary in the preceding analysis, but introduces many new terms. The second one is

much simpler but the directional information is lost. Both formulations take into account the gradient of the length scale, which can be considered as a correction to the original model. However, the log layer analysis now leads to:

$$\phi_{ij} = (1 - \beta C^2 \kappa^2)^{-1} \phi_{ij}^h \quad (20)$$

with $\beta = \overline{u_1 u_2}^2 / k^2 + \overline{u_2 u_2}^2 / k^2 \simeq 0.15$ for the first formulation and $\beta = 1$ for the second one. It can be noted that these formulations still result in an amplification of the return to isotropy, although it is less pronounced.

This problem can be traced to the shape of the correlation function shown in Fig. 5b. It is seen that the space transformation does not remove all the asymmetry in the y -direction (note that, in this figure, the transformation of the correlations is used, instead of the correlations of the transformation). In the next section, a new correlation function which takes into account this asymmetry will be proposed.

New correlation function

In order to account for the asymmetry of the correlation function, the gradient of the length scale can be introduced by letting $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-r/(L + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla L))$. With this correlation function, shown in Fig. 6b, the prediction of the two-point correlation is improved, particularly between the fixed point \mathbf{x} and the wall (cf. Fig. 6a), where the original correlation function causes an over-estimation.

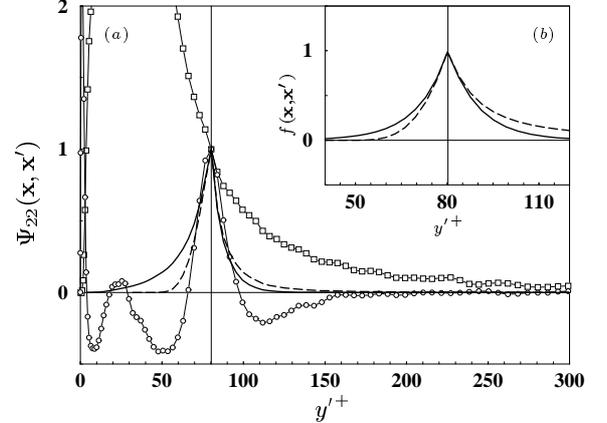


Figure 6: *A priori* test of the two-point correlation obtained at $y^+ = 80$ using two different correlation functions. (a) $\square \Psi_{22}(\mathbf{x}', \mathbf{x}')_{DNS}$; $\circ \Psi_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{DNS}$; $\text{—} \Psi_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{22}(\mathbf{x}', \mathbf{x}')_{DNS} \exp(-r/L)$; $\text{---} \Psi_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{22}(\mathbf{x}', \mathbf{x}')_{DNS} \exp(-r/(L + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla L))$. (b) $\text{—} \exp(-r/L)$; $\text{---} \exp(-r/(L + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla L))$.

Using a Taylor series expansion of the correlation function, it can be shown that the elliptic relaxation equation becomes

$$(1 + 16 (\nabla L)^2) \phi_{ij} - L^2 \nabla^2 \phi_{ij} - 8L \nabla L \cdot \nabla \phi_{ij} = \phi_{ij}^h \quad (21)$$

The log layer analysis then yields

$$\phi_{ij} = (1 + 22 C^2 \kappa^2)^{-1} \phi_{ij}^h \quad (22)$$

This new formulation exhibits now a reduction of the redistribution.

Additional correction terms can be derived, if second derivatives of the length scale are introduced into the correlation function. It can be shown that, at the first order, two extra terms appear, and the equation becomes

$$(1 - 4L\nabla^2 L + 20(\nabla L)^2)\phi_{ij} - L^2\nabla^2\phi_{ij} - 8L\nabla L \cdot \nabla\phi_{ij} = \phi_{ij}^h \quad (23)$$

which gives, in the log layer, $\phi_{ij} = (1 + 26 C^2 \kappa^2)^{-1} \phi_{ij}^h$.

Thus, a simple modification of the model for the correlation function overcomes the deficiencies of the original model in the log layer, without introducing any “wall echo terms”.

CONCLUSIONS

A DNS database for a channel flow at $Re_\tau = 590$ has been used to assess the validity of the elliptic relaxation model and to understand how to improve its performance. Several conclusions can be drawn:

- The main approximation, which consists of modeling the correlation function by an exponential function, is consistent with the data. In particular, the similarity of the integral length scale L_{int} and the correlation length scale L shows that only the shape of the correlation function around zero separation is important to be modeled.
- The length scale introduced by Durbin, which is the turbulent length scale $C_L k^{3/2} \varepsilon^{-1}$ bounded near the wall by the Kolmogorov length scale $C_\eta C_L \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$, reproduces surprisingly well the evolution of the correlation length scale across the channel.
- The shape of the correlation function depends on the component of the two-point correlation tensor used to evaluate it. Only a global accounting of the non-local effect can then be expected.
- The image terms in the integral equation of the pressure term actually lead to an amplification of the return to isotropy. Hence, these terms cannot be considered responsible for the reduction of the redistribution.
- The spurious amplification of the redistribution in the log layer by the elliptic relaxation equation is due to the fact that the model does not take into account the strongly asymmetric shape of the correlation function. Simple modifications to the correlation function model lead to new formulations of the elliptic relaxation equation which do not present the same problem.
- The correlation function is anisotropic, elongated in the streamwise direction. Even though this feature has no effect in the case of a channel flow, it can affect more complex flows. The present analysis shows that it is possible to introduce directional information into the model, using a more complicated but tensorially correct formulation of the elliptic relaxation equation.

The physical insight gained through this study will enable further investigations to improve the elliptic relaxation method. The new formulations can be expected to give improved solutions, particularly in complex flow con-

figurations. Their performance will be assessed through a number of test cases in future investigations.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors gratefully acknowledge Paul Durbin, William Cabot, Javier Jimenez and Robert Moser for assistance with the DNS database and valuable discussions. The first author acknowledges the hospitality of the Center for Turbulence Research during the 1998 summer research program.

REFERENCES

- Bradshaw, P., Mansour, N. N., and Piomelli, U., 1987, “On Local Approximations of the Pressure-Strain Term in Turbulence Models,” *Proceedings of the 1987 Summer Program*, Center for Turbulence Research, Stanford University/NASA Ames Research Center, pp. 159–164
- Chou, P. Y., 1945, “On Velocity Correlations and the Solutions of the Equations of Turbulent Fluctuation,” *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 3, pp. 38–54
- Durbin, P. A., 1991, “Near-Wall Turbulence Closure Modeling Without ‘Damping Functions’,” *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 3, pp. 1–13
- Kim, J., 1989, “On the Structure of Pressure Fluctuations in Simulated Turbulent Channel Flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 205, pp. 421–451
- Manceau, R., Wang, M., and Durbin, P., 1998, “Assessment of Non-Local Effect on Pressure Term in RANS Modeling Using a DNS Database,” *Proceedings of the 1998 Summer Program*, Center for Turbulence Research, Stanford University/NASA Ames Research Center, pp. 303–322
- Manceau, R., Wang, M., and Laurence, D., 1999, “Inhomogeneity and Anisotropy Effects on Pressure Term in RANS Modelling,” in preparation
- Moser, R. D., Kim, J., and Mansour, N. N., 1999, “DNS of Turbulent Channel Flow up to $Re_\tau = 590$,” *Phys. Fluids*, in press
- Sabot, J., 1976, “Étude de la cohérence spatiale et temporelle de la turbulence établie en conduite circulaire,” Ph. D. Thesis, Lyon University, France
- Wizman, V., Laurence, D., Kanneiche, M., Durbin, P., and Demuren, A., 1996, “Modeling Near-Wall Effects in Second-Moment Closures by Elliptic Relaxation,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 17, pp. 255–266

Annexe C

Article soumis à : *Journal of Fluid Mechanics*

Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in RANS modelling

By **RÉMI MANCEAU**^{1†}, **MENG WANG**²
AND **DOMINIQUE LAURENCE**^{1,3}

¹Laboratoire National d'Hydraulique, Électricité de France, 78 401 Chatou, France

²Center for Turbulence Research, BLDG. 500, Stanford University, Stanford, CA 94305-3030, USA

³Department of Mechanical Engineering, UMIST, George Begg Building, Sackville Street, Manchester, M60 1QD, UK

(Received ?? and in revised form ??)

A channel flow DNS database at $Re_\tau = 590$ is used to assess the validity of modelling the redistribution term in the Reynolds stress transport equations by elliptic relaxation. The model assumptions are found to be globally consistent with the data. However, the correlation function between the fluctuating velocity and the Laplacian of the pressure gradient, which enters the integral equation of the redistribution term, is shown to be anisotropic. It is elongated in the streamwise direction and strongly asymmetric in the direction normal to the wall, in contrast to the isotropic, exponential model representation used in the original elliptic relaxation model. This discrepancy is the main cause for the slight amplification of the energy redistribution in the log layer as predicted by the elliptic relaxation equation. New formulations of the model are proposed in order to correct this spurious behaviour, by accounting for the rapid variations of the length scale and the asymmetrical shape of the correlation function. These formulations do not rely on the use of wall echo correction terms to damp the redistribution. The belief that the damping is due to the so called “wall echo” effect is called into question through the present DNS analysis.

1. Introduction

In second moment closures, one of the most important and difficult tasks is to model the pressure gradient–velocity correlation in the Reynolds stress transport equations. Indeed, since the production does not need any modelling at this closure level, particular attention must be focused on this correlation term and on the dissipation. In a channel flow (e.g. Mansour, Kim & Moin 1988) the pressure gradient–velocity correlation, whose effect is mainly to redistribute the energy among the Reynolds stresses (hence called the “redistribution term”), is the only source term in the budgets of the wall-normal and spanwise Reynolds stresses; it balances the production in the shear stress budget.

Since the pioneering works of Chou (1945) and Rotta (1951), the local approach, which algebraically relates the unclosed redistribution term to the Reynolds stress anisotropy, mean strain, and mean vorticity tensors, has been popular in the turbulence modelling community. All standard models are based on this approach. The redistribution term is

† Present address: Laboratoire d'Études Aérodynamiques, UMR CNRS 6609, SP2MI, Téléport 2, Bd Pierre et Marie Curie, BP 30179, 86962 Futuroscope, Poitiers, France

written in an integral form and split into three parts, the rapid, slow and surface parts. The slow part, which does not involve any mean flow quantity, is modelled in terms of the Reynolds stress anisotropy. The rapid part is expressed in terms of products between mean velocity gradients and a fourth-order tensor, based on the assumption that the mean velocity gradient is locally constant. This quasi-homogeneous approach has been the starting point of almost all second moment closure models. In most of them, linear ones in particular, (e.g. Rotta 1951; Naot, Shavit & Wolfshtein 1973; Launder, Reece & Rodi 1975) and even fully nonlinear ones (e.g. Fu, Launder & Tselepidakis 1987), the surface part is neglected or modelled by wall echo terms, as suggested by Gibson & Launder (1978). In others, the influence of the solid boundary is accounted for through variable coefficients, leading to quasi-linear models, such as that of Speziale, Sarkar & Gatski (1991). In the recent model of Craft & Launder (1996), the nonlinear formulation directly includes wall induced effects.

However, the validity of the quasi-homogeneous approximation used for the rapid part is questionable. It assumes that the mean velocity gradient varies sufficiently slowly to allow it to be taken outside the integral, which is not the case in strongly inhomogeneous turbulence. Bradshaw, Mansour & Piomelli (1987) used the channel flow DNS of Mansour *et al.* (1988) to show that this hypothesis is correct down to $y^+ = 40$, but totally invalid below this value. Another weakness of the quasi-homogeneous approach is the loss of the non-local character of the redistribution term. The integral equation for the latter, which involves two-point correlations between velocities and Laplacian of the pressure gradient, shows that it actually depends on the mean flow and the turbulence state at all points of the domain. Kim (1989) showed that in a channel, except in the very near-wall region, the redistribution term takes contributions from all the domain, including the opposite wall. Furthermore, a number of theoretical studies (e.g. Hunt & Graham 1978) as well as direct numerical simulations (Perot & Moin 1993) showed that the structures of the flow, and the associated length scales, are strongly affected by the presence of a solid boundary even in the absence of mean shear, because of the blocking effect which is non-local. In particular, the two-point correlations of the wall-normal velocity are, as shown by Hunt *et al.* (1989), influenced near the wall by the image eddies. These non-local effects make the redistribution term difficult, if not impossible, to model in terms of local variables.

Furthermore, the quasi-homogeneous models cannot in general be integrated down to solid boundaries without introducing corrections, such as damping functions (there are exceptions, such as the Craft & Launder 1996 model). Damping functions are not universal, since they are derived by fitting experimental or DNS results with little theoretical justification.

In order to avoid such problems, Durbin (1991;1993) introduced a novel approach. He proposed to model directly the two-point correlation in the integral equation of the redistribution term, using an isotropic, exponential function. A convolution product is obtained, which can be inverted to give the so-called *elliptic relaxation* approach. The redistribution term is no longer given by an algebraic relation, but rather by a differential equation. The non-local character is preserved through the elliptic operator $(1 - L^2 \nabla^2)$, and the model can be integrated down to the wall. A notable feature of this approach is that the source term of the elliptic relaxation equation can be given by any quasi-homogeneous model. Hence, it enables the derivation of models valid down to solid boundaries, from the quasi-homogeneous models cited above, which have been tested over a wide range of different flows. Even though some intuitive assumptions have been made, Durbin's model is based on a theoretical approach, leading to the hope that it is somewhat universal, unlike damping functions.

The elliptic relaxation model has led to very encouraging results, especially as applied

to the $\overline{v^2}$ - f (or $k - \varepsilon - \overline{v^2}$) model, which is a version of the full Reynolds stress model reduced to three transport equations. Successful predictions include, but are not limited to, flows with adverse pressure gradient and around bluff bodies (Durbin 1995), three dimensional boundary layers (Parneix, Durbin & Behnia 1998), aerodynamics (Lien, Durbin & Parneix 1997), and heat transfer (Behnia, Parneix & Durbin 1998; Manceau, Parneix & Laurence 2000).

Despite the remarkable success, rooms for improving the elliptic relaxation model exist. Many of the underlying model assumptions, introduced intuitively, have not been validated by either experiments or DNS. The objective of the present study is to evaluate these assumptions through the analysis of a channel flow DNS database, and to find ways to improve the theoretical basis and performance of the model. The main issues to be examined include the validity of the two-point correlation approximation employed by Durbin (1991), the validity of the length scale used in the elliptic operator, and the unsatisfactory behaviour of the model in the logarithmic layer. A full explanation of these issues is given in § 2 and § 3. In § 4, the results of the DNS analysis are discussed. It is found that the elliptic relaxation model is globally consistent with the simulation data, and that the correlation length scale is adequately modelled by the turbulent length scale bounded near the wall by the Kolmogorov length scale. However, the correlation function between the fluctuating velocity and the Laplacian of the pressure gradient is strongly anisotropic and inhomogeneous. Its approximation by an isotropic, exponential function is responsible for the spurious amplification of the energy redistribution in the log layer, as predicted by the model. It is further discovered that the so called “wall echo” effect increases the redistribution of energy, contrary to the general belief. The physical insights gained through the DNS study are used, in § 5, to develop new formulations of the model that rectify the erroneous logarithmic-layer behaviour. This is achieved by taking into account the influence of strong inhomogeneity and anisotropy on the redistribution term, using a spatially variable length scale and an asymmetric model of the correlation function. Unlike some previous *ad hoc* formulations, the new formulations emphasize a systematic, scientific approach to turbulence modelling, guided by the DNS data. Finally, § 6 summarizes the major findings and accomplishments of this work.

2. Theoretical background

2.1. Integral equation of the redistribution term

The pressure gradient–velocity correlation entering the Reynolds stress transport equations is

$$\rho\phi_{ij}^* = -\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} - \overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}}, \quad (2.1)$$

where ρ is the density, p is the fluctuating pressure and u_i are the fluctuating velocity components. The overline indicates ensemble average. Traditionally, this term is split into pressure–strain correlation and pressure diffusion. However, since this splitting is non-unique (Lumley 1975) and inconsistent with the Navier–Stokes equations in the limit of two-dimensional turbulence (Speziale 1985), it appears more appropriate to model the pressure gradient–velocity correlation as a whole. Since the pressure diffusion is negligible in the main part of the flow, ϕ_{ij}^* can be regarded as the energy redistribution between the components of the Reynolds stress, except in the near-wall region, where it balances the difference between dissipation and molecular diffusion.

The gradient of the pressure fluctuation is the solution of the Poisson equation obtained

from the divergence of the fluctuating part of the Navier–Stokes equations,

$$\nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_k} = -\rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left(2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right). \quad (2.2)$$

Following Kim (1989), it will be assumed that the contribution from the inhomogeneous boundary condition, or the “Stokes part”, is negligible. Accordingly, $\partial p/\partial x_k$ approximately satisfies a homogeneous Neumann boundary condition.

Using the Green function G_Ω of the domain, the solution of (2.2) takes the form

$$\frac{\partial p}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \int_\Omega \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_k}(\mathbf{x}') G_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'), \quad (2.3)$$

where \mathbf{x} and \mathbf{x}' denote position vectors, and dV the elementary volume. The integral equation of the redistribution term can be derived from (2.1) and (2.3):

$$\rho \phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = \int_\Omega \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') G_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'), \quad (2.4)$$

where $\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ denotes the two-point correlation between the velocity and the Laplacian of the pressure gradient:

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\overline{u_i(\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_j}(\mathbf{x}')} - \overline{u_j(\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}')}. \quad (2.5)$$

2.2. The elliptic relaxation equation

In (2.4), the two-point correlations between the velocity and the Laplacian of the pressure gradient need to be modelled. Durbin (1991) defined a correlation function

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (2.6)$$

and modelled it by

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\frac{r}{L}\right), \quad (2.7)$$

where $r = \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$ and L is the correlation length scale. This approximation is the corner-stone of the elliptic relaxation model and the validity of (2.7) is the main concern of this paper.

In a free space, using the model (2.7), the redistribution term can be written as

$$\rho \phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = - \int_\Omega \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \underbrace{\frac{\exp\left(-\frac{r}{L}\right)}{4\pi r}}_{E(r)} dV(\mathbf{x}'). \quad (2.8)$$

In this form, ϕ_{ij}^* appears as a convolution product between Ψ_{ij} and $E(r)$, which is the free-space Green function associated with the operator $-\nabla^2 + 1/L^2$. Due to (2.6), the one-point correlation in the integrand is expressed as a function of \mathbf{x}' . If it were expressed as a function of \mathbf{x} , the one-point correlation could have been taken outside the integral in (2.8), and the non-local effect would have been lost or entirely recast into $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, which would then be more difficult to model. The convolution integral (2.8) can be inverted, yielding the elliptic relaxation equation:

$$\phi_{ij}^* - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^* = -\frac{L^2}{\rho} \left(\overline{u_i \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u_j \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_i}} \right). \quad (2.9)$$

In homogeneous situations, the second term on the left hand side of this equation van-

ishes. Therefore, Durbin (1991) proposed to replace the right hand side by any quasi-homogeneous model ϕ_{ij}^h , which leads to the model

$$\phi_{ij}^* - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^* = \phi_{ij}^h. \quad (2.10)$$

This method provides a simple way of extending quasi-homogeneous models down to solid boundaries, when appropriate boundary conditions for ϕ_{ij}^* are applied (Durbin 1993).

3. Presentation of the DNS assessment

3.1. Issues to examine

The elliptic relaxation approach is mainly based on the assumption that the correlation function $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, defined by (2.6), can be modelled by an exponential function. This approximation was introduced by Durbin (1991) on an intuitive basis, in order to preserve the non-local effect on the redistribution term. However, its validity has never been checked before, and the shape of $\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ needs to be investigated. The DNS database of the channel flow at $Re_\tau = 590$ (Moser, Kim & Mansour, 1999) will be used for this purpose.

Another aim of this work is to evaluate the correlation length scale involved in the model (2.7) for the correlation function $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. If the turbulent length scale were used in the whole flow, since it goes to zero at solid boundaries, the elliptic operator $L^2 \nabla^2$ would vanish at the wall, introducing a singularity in the differential equation. Therefore, Durbin (1991) proposed using the standard turbulent length scale in the main part of the flow, and the Kolmogorov length scale in the vicinity of the wall, i.e.,

$$L = C_L \max \left(C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}; \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \right). \quad (3.1)$$

It is of interest to evaluate precisely the correlation length scale from the DNS data, in order to assess the validity of (3.1).

The ultimate objective of this work is to find ways to improve the model. As pointed out by Wizman *et al.* (1996), the elliptic operator does not behave entirely correctly in the logarithmic layer. Suppose, for instance, that the Isotropisation of Production model (Naot, Shavit & Wolfshtein 1973; Launder, Reece & Rodi 1975), denoted henceforth as IP model, and the Rotta (1951) model are used as the rapid and slow parts of the source term ϕ_{ij}^h in (2.10). The redistribution term is then given by

$$\phi_{ij}^* - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^* = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right), \quad (3.2)$$

where $P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \partial U_j / \partial x_k - \overline{u_j u_k} \partial U_i / \partial x_k$ and $P = \frac{1}{2} P_{ii}$. In the logarithmic layer, the Reynolds stresses are constant, and the production and the dissipation behave as y^{-1} . Thus, the right hand side in (3.2) behaves as y^{-1} , and the redistribution term is then given by $\phi_{ij}^* \approx 1.51 \phi_{ij}^h$. This result shows that the elliptic operator leads to an amplification of the redistribution. Note that the same amplification occurs with any model for ϕ_{ij}^h .

The overestimation of the energy redistribution by the Rotta & IP model in the logarithmic layer has led a number of modellers to introduce wall echo type terms, following Gibson & Launder (1978). It would be desirable for the elliptic relaxation equation to compensate for this shortcoming. Some models, such as the Speziale, Sarkar & Gatski (1991) model, or Craft & Launder (1996) model, correctly reproduce the redistribution in the logarithmic layer. In this case, it would be preferable that the elliptic relaxation model be *neutral*, producing neither amplification nor reduction of the redistribution.

Based on the above considerations, Wizman *et al.* (1996) proposed two new formulations of the elliptic relaxation equation. First, they introduced a neutral formulation by taking L^2 in (2.10) inside the Laplacian operator:

$$\phi_{ij}^* - \nabla^2 (L^2 \phi_{ij}^*) = \phi_{ij}^h. \quad (3.3)$$

Secondly, for models that overestimate the redistribution, they proposed

$$\phi_{ij}^* - L^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{L^2} \nabla (L^2 \phi_{ij}^*) \right) = \phi_{ij}^h, \quad (3.4)$$

which exhibits the expected damping. Laurence & Durbin (1994) and Durbin & Laurence (1996) suggested two other neutral formulations, given by

$$\phi_{ij}^* - \nabla \cdot (L^2 \nabla \phi_{ij}^*) = \phi_{ij}^h, \quad (3.5)$$

and

$$\phi_{ij}^* - L \nabla^2 (L \phi_{ij}^*) = \phi_{ij}^h. \quad (3.6)$$

These new formulations have been derived empirically and suffer from a lack of justifications, as emphasized by the authors themselves. This work aims, through a DNS analysis, to provide a more solid basis for deriving such modifications to the model. The central idea is that the correlation function $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ cannot be represented by a simple exponential function, contrary to what was assumed by Durbin (1991). Indeed, the presence of the wall induces a blocking effect, leading to not only an elongation of the turbulent structures, but also an asymmetry in the direction normal to the wall. Fluctuating quantities are correlated over a shorter distance in the direction toward the wall than away from it. There is plenty of experimental evidence (Hanjalić & Launder 1972; Sabot 1976) of this feature in two-point correlations between components of the fluctuating velocity, and one can reasonably deduce that the two-point correlations between the fluctuating velocity and the Laplacian of the pressure gradient behave in a similar manner. The use of the symmetrical correlation function (2.7) leads to overweighting the region between the point and the wall, which may be the reason for the spurious behaviour of the elliptic relaxation equation in the logarithmic layer. This issue will be explored in the present DNS analysis, in order to understand how modifications to the elliptic relaxation model, such as those proposed by Wizman *et al.* (1996), Laurence & Durbin (1994) and Durbin & Laurence (1996), can be derived.

3.2. Channel flow database and post-processing

The correlation function $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ involves the Laplacian of the pressure gradient, which contains three spatial derivatives. Therefore, a very accurate DNS database is needed. The channel flow simulation at $Re_\tau = 590$ performed by Moser *et al.* (1999) was chosen because of its numerical accuracy, the large number of available statistical samples, and the relatively high Reynolds number. This flow was computed on a grid of $384 \times 257 \times 384$ points in streamwise (x), wall-normal (y) and spanwise (z) directions, respectively. The computational domain is $2\pi h$, $2h$ and πh in x , y and z , where h denotes the channel half-width. The simulation code is based on a spectral method for spatial derivatives (Fourier series in x and z , and Chebychev polynomials in y), and a semi-implicit scheme for time integration. For statistical averaging, a total of 75 fields (restart files) are available, in addition to the spatial averaging in x - and z -directions.

The two-point correlations between the fluctuating velocities and the Laplacian of the pressure gradient are needed for evaluating the correlation function $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. First, the

Laplacian of the total pressure is evaluated from the velocity field,

$$\nabla^2 \tilde{p} = -\rho \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}, \quad (3.7)$$

where the tilde denotes total quantities, using the same Fourier/Chebyshev spectral method as for the DNS. The gradient of this quantity is calculated using Fourier spectral derivatives in x and z , and fourth order finite differences in y . The one-point and two-point correlations between this gradient and the total velocity components are then calculated, and corresponding mean quantities are finally subtracted out in order to obtain correlations between fluctuating quantities. The post-processing computations are very time consuming, since they involve calculations of two-point correlations and averaging over 75 restart files and x - z planes. As a practical matter, calculations are performed at 7 representative y -locations only, for separations restricted to x - y , x - z and y - z planes.

4. Results and discussion

4.1. The wall echo

The wall echo concept originates from the form of the integral equation of the redistribution term in a semi-infinite space bounded by an infinite plane ($\Omega = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$). In this domain, it can easily be shown that the Green function is

$$G_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r^*}, \quad (4.1)$$

where $r^* = \|\mathbf{x}'^* - \mathbf{x}\|$, \mathbf{x}'^* being the image of \mathbf{x}' in the plane $y = 0$. The image term is due to the homogeneous Neumann boundary condition. Thus, at each point of the domain, the pressure fluctuation is the sum of the fluctuations generated by the velocity field and its reflection in the wall, which is called wall echo by analogy with acoustics. This echo is instantaneous, since the fluid is considered as incompressible.

Since the paper of Launder, Reece & Rodi (1975), it has been widely accepted in the turbulence community that this wall echo is responsible for the reduction of the amplitude of the energy redistribution between components of the Reynolds stress. In second moment closures, wall echo terms are frequently incorporated to account for this phenomenon, as proposed by Gibson & Launder (1978). These terms have proven to be effective for simple flows but are often not well defined in complex geometries.

The conclusion that wall echo reduces redistribution is, however, incorrect. Since the image term in the Green function appears with the same sign as the principal term, it actually induces an *amplification* of the redistribution.

In the case of a channel ($\Omega = \mathbf{R} \times [0, 1] \times \mathbf{R}$), the Green function is easily derived after taking Fourier transform in homogeneous directions. However, working in the spectral space is not relevant in the present study. In order to examine the problem of the wall echo effect in a channel, an approximate Green function is needed.

It can be shown (cf. appendix A) that the simplest approximation to the Green function which is valid down to the wall and accommodates the boundary conditions is $G_\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \approx H(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, with

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0) = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|} - \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|} - \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\|}, \quad (4.2)$$

where \mathbf{x}'_{-1} and \mathbf{x}'_1 are the images of \mathbf{x}'_0 in the walls located at $y = 0$ and $y = 1$, respectively.

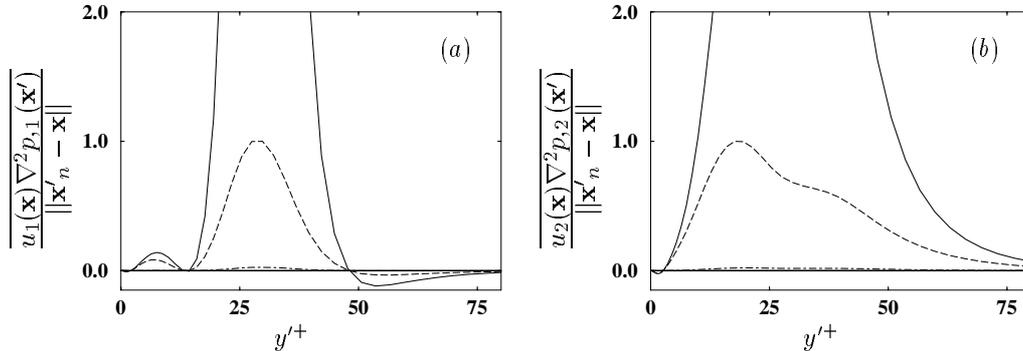


FIGURE 1. Comparison of the three terms in the integrand of (4.3) at $y^+ = 30$ for separations in y -direction. (a) Integrand of ϕ_{11}^* ; (b) Integrand of ϕ_{22}^* . — principal term ($n = 0$); --- image term due to the wall at $y^+ = 0$ ($n = -1$); -.- image term due to the wall at $y^+ = 1180$ ($n = 1$). The vertical coordinate is arbitrarily normalized such that the maximum of $n = -1$ term is 1.

With this approximation, the redistribution term (2.4) can be written as

$$\rho\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0) \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|} + \frac{1}{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|} + \frac{1}{\|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\|} \right) dV(\mathbf{x}'_0). \quad (4.3)$$

The three terms in the integrand, calculated from the DNS database, are shown in figure 1, for the components ϕ_{11}^* and ϕ_{22}^* . The solid line, representing the principal term, has been truncated because it goes to infinity at $y' = y = 0$. It can be seen that the image term arising from the far wall at $y^+ = 1180$ is negligible, but not the term due to the near wall at $y^+ = 0$. The exact weight of each term has not been evaluated, since it involves integral of two-point correlations over separations in all directions, which have not been calculated. Nevertheless, following Bradshaw (1973), the amplitude of each term can be roughly estimated: the two-point correlation can be approximated by a constant inside a sphere of radius L , and zero outside of it. If L/y and $y/2h$ are both small, (4.3) yields

$$\rho\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = -\frac{L^2}{2} \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \left(\frac{L}{3y} + 1 + \frac{L}{6h} \right). \quad (4.4)$$

This result shows that, if the length scale is $L = \kappa y$, the ratio of the image term ($n = -1$) to the principal term is approximately 14 %. For the second image term ($n = 1$), the ratio is $0.07y/h$, which is approximately 0.4 % at $y^+ = 30$. Thus, the first image term cannot be neglected, as long as the length scale is of the order of κy . Note that, contrary to Bradshaw (1973), who concluded that the presence of the wall changes the redistribution term by ± 0.14 , we can affirm that the sign is positive, i.e., the wall echo actually *increases* the redistribution. Indeed, it can be seen in figure 1 that the contribution of the image terms to the integral is of the same sign as that of the principal term. The weight of the negative excursions of the first image term is far too small to change the sign of the total contribution of this term.

Thus, an interesting and important conclusion can be drawn. The actual wall echo leads to an amplification of the redistribution, contrary to the common belief. The Gibson & Launder (1978) type terms, which have been found useful in reproducing the strong anisotropy near walls, have the correct damping effect, but for the wrong reason. This damping cannot be traced to the wall echo effect, i.e., the appearance of an image term in the Green function. Rather, it is caused by the damping of the two-point correlation

itself, due to the modification of the turbulence by the wall, as a consequence of the non-local nature of the redistribution term in the strongly inhomogeneous boundary layer. The success of Gibson & Launder (1978) type terms lies in the introduction of non-local effects through the explicit reference to the wall-distance, and we believe the more recent attempts to replace these terms by highly nonlinear models is not the best route to follow. Non-local models, such as the elliptic relaxation model, appears more suitable for accounting for the influence of the wall on the turbulence.

4.2. Asymmetry in y -direction

In this section the shape of the correlation function defined by (2.6) is evaluated. One problem that arises is that this function should depend on the component (i, j) . Indeed, a different correlation function can be evaluated for each component of ϕ_{ij}^* by

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\overline{u_\alpha(\mathbf{x})\nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_\beta}(\mathbf{x}') + u_\beta(\mathbf{x})\nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}(\mathbf{x}')}}{\overline{u_\alpha(\mathbf{x}')\nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_\beta}(\mathbf{x}') + u_\beta(\mathbf{x}')\nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}(\mathbf{x}')}}, \quad (4.5)$$

without summation over Greek indices. Thus, it is impossible to derive a model for f which matches all the DNS results.

In fact, the most general relation between two-point correlation and one-point correlation tensors, if they are assumed to be linearly connected, is

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = f_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\Psi_{kl}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'). \quad (4.6)$$

In this relation, the fourth order tensor f_{ijkl} involves 81 coefficients, but their number can be dramatically reduced by using symmetry properties, as shown by Naot, Shavit & Wolfshtein (1973). However, this type of relation remains too complicated for the purpose of accounting for the non-local effect. Therefore, a simple scalar correlation function is used, keeping in mind that it can only represent approximately the non-local effect. The following results must be interpreted in this sense.

The correlation functions evaluated from (4.5) are shown in figure 2. The correlation functions in figures 2(a) and 2(b) correspond respectively to ϕ_{11}^* and ϕ_{22}^* . Some features which can be seen in this figures are rather favourable to the elliptic relaxation model: first, the correlation functions exhibit sharp peaks, which is consistent with the use of an exponential function to model it; secondly, the correlation lengths for both components 11 and 22 evolve in a similar way when the fixed location moves away from the wall.

However, some other features do not agree with the simple model assumptions. First, the peaks in figure 2(a) are much broader than these in figure 2(b), indicating that the correlation length scale is not the same for all the components. Secondly, the correlation function exhibits negative excursions, at locations close to the wall for the 11 component, and everywhere in the channel for the 22 component. These features, which are very similar to those observed in the two-point velocity correlations in boundary layer experiments (Grant 1958; Favre, Gaviglio & Dumas 1957; 1958), call into question the modelling of the correlation function by a simple exponential function. Nevertheless, as emphasized previously, the model does not intend to represent exactly the two-point correlations, but only to globally account for the non-local effect. Moreover, it will be shown in the following sections that the correlation length scale, evaluated as the half-width of the peak of the correlation function, is very similar to the integral scale. This indicates that the negative excursions do not contribute significantly to the integral, and thus do not strongly influence the redistribution term.

The main feature which arises from these figures is that the correlation functions do

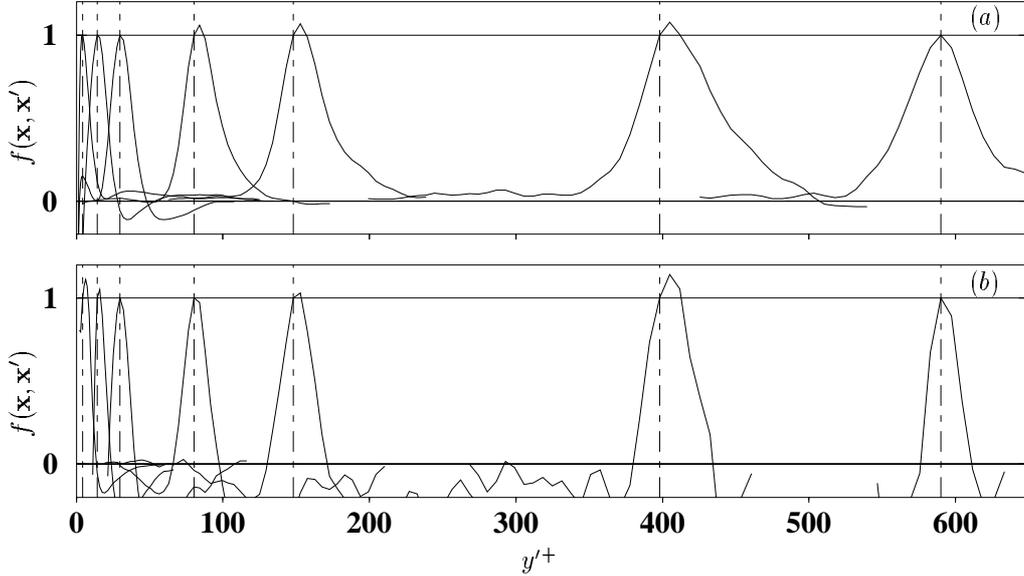


FIGURE 2. Shape of the correlation function calculated from the DNS database at 7 different y -locations: $y^+ = 4$; $y^+ = 14$; $y^+ = 30$; $y^+ = 80$; $y^+ = 150$; $y^+ = 400$; $y^+ = 590$. Separations in the x - and z -directions are zero. $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ is evaluated from (4.5) with: (a) $\alpha = \beta = 1$; (b) $\alpha = \beta = 2$. For clarity, curves have been truncated at large separations.

not have symmetrical shapes. It can also be seen that the maxima of the peaks do not generally occur at zero separation. As it is defined, the correlation function is not restricted to be smaller than one. Values greater than one can occur if the amplitude (rms value) of the fluctuating velocity varies rapidly with distance to the wall.

The main implication of this asymmetrical shape is that the points \mathbf{x}' located between the fixed point \mathbf{x} and the wall contribute less to the integral than points \mathbf{x}' toward the core of the flow. Hence, modelling the correlation function by a symmetrical exponential function leads to overweighting the points toward the wall, thus increasing the value of the integral (a formal proof of this can be found in Appendix B). This problem is illustrated by figure 3, for the 22 component. The correlation functions calculated from the DNS using (4.5), as well as from two models, are shown in figure 3(a). The first one is the original model, i.e., a simple exponential function, whereas the second takes into account the gradient of the length scale in order to reproduce the previously noted asymmetry. In figure 3(b), two-point correlations obtained by multiplying the one-point correlation from the DNS by the modelled correlation function are shown. It can be seen that, with the original model, points toward the wall are overweighted, whereas with the corrected model, the two-point correlations are much better reproduced in this region.

The overweighting of the two-point correlation for separations in the direction of the wall is thought to be at the origin of the erroneous amplification of the redistribution in the logarithmic layer noted in § 3.1. As shown in figure 3(b), introducing a dependence on the gradient of the length scale in the model to account for the asymmetry of the correlation function corrects this deficiency. It will be shown, in § 5.2, that a new formulation of the elliptic relaxation function can be derived from this extended model and, in § 5.3, that this formulation overcomes the shortcomings of the original one.

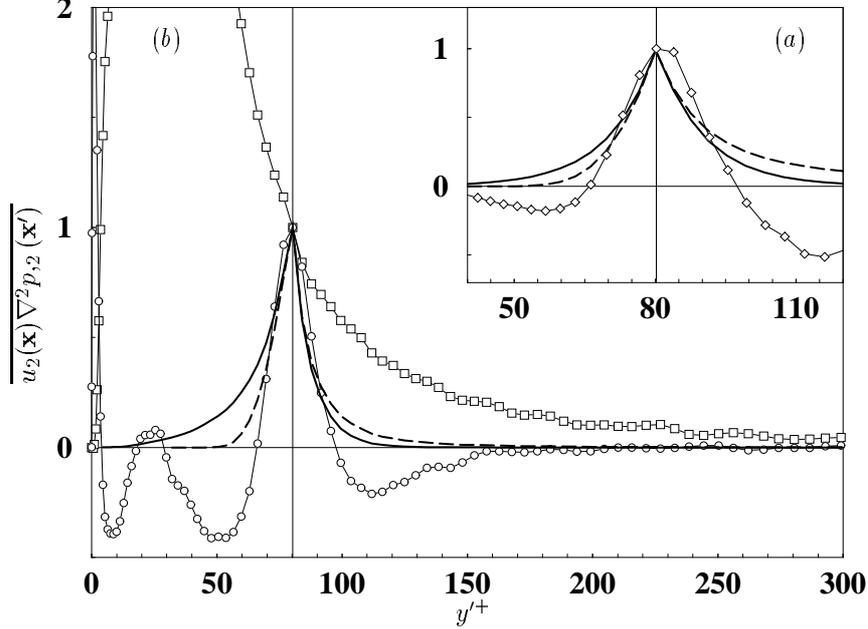


FIGURE 3. Two-point correlation $\Psi_{22}^{\text{DNS}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ at $y^+ = 80$ obtained using two different correlation functions. (a) Correlation function: \diamond $f^{\text{DNS}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$; — original model $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-r/L)$; --- asymmetrical model $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-r/(L + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla L))$. (b) \square One-point correlation $\Psi_{22}^{\text{DNS}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$; \circ Two-point correlation $\Psi_{22}^{\text{DNS}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') (= \Psi_{22}^{\text{DNS}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f^{\text{DNS}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'))$; — Two-point correlation given by the original model $\Psi_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{22}^{\text{DNS}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$; --- Two-point correlation given by the asymmetrical model $\Psi_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{22}^{\text{DNS}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.

4.3. Anisotropy

The asymmetry in the direction normal to the wall, which has been emphasized in the previous section, is not the only anisotropy. The purpose of this section is to point out that the correlation function does not possess the same shape for separations in the three principal directions. This anisotropy is visible in figures 4 and 5, for correlation functions corresponding to ϕ_{11}^* and ϕ_{22}^* , respectively. At locations very close to the wall (figures 4a,b and 5a,b), the correlation function is strongly elongated in the streamwise direction, in particular for the 22-component (figure 5a,b). This is mainly due to the fact that, in the y -direction, the correlation length scale is constrained by the presence of the wall (wall-blocking effect). In figures 4 and 5, it can be noted that f goes to infinity at the wall. For instance, for the 22-component, f behaves as y'^{-2} when \mathbf{x}' approaches the wall. This is a consequence of its definition (4.5): the two-point correlation only contains $u_2(y)$, which is constant with respect to y' , whereas the one-point correlation involves $u_2(y')$, which behaves as y'^2 .

Away from the wall, the correlation function becomes increasingly isotropic (figures 4c-f and 5c-f). In the center of the channel, it is completely isotropic for the 11-component (figure 4g), but still slightly elongated in the streamwise direction for the 22-component (figure 5g). These features are also conspicuous in figures 6–11. In the figures (a), (b) and (c), the shapes of the correlation functions are shown for separations in x - y , x - z and y - z planes, respectively. The iso-correlation contours in these planes are shown in the figures (d). The elongation of the correlation function, which is consistent with the well-known elongation of turbulent structures near the wall, clearly appears in figures 6

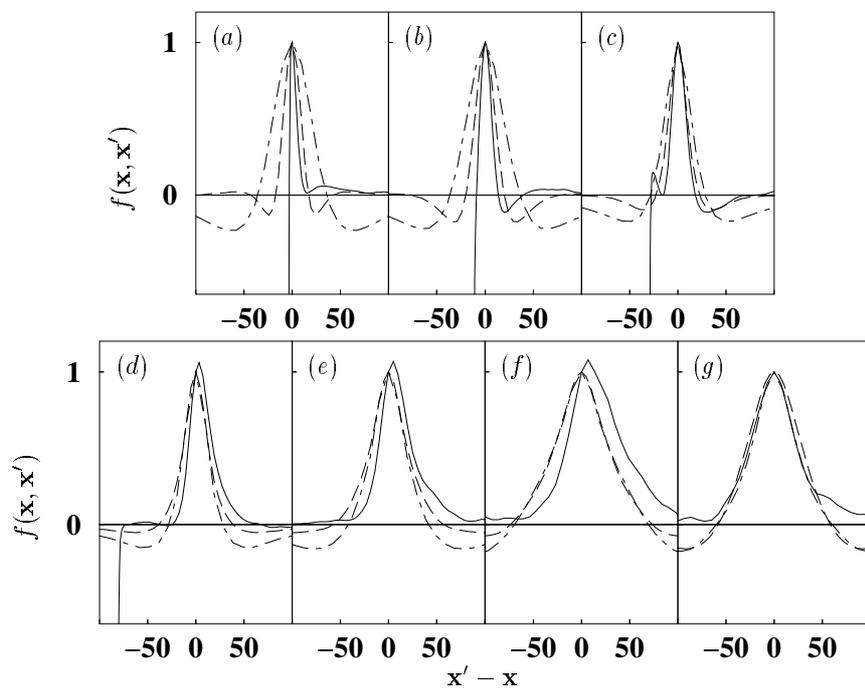


FIGURE 4. Shape of the correlation function defined by (4.5) with $\alpha = \beta = 1$, evaluated from the DNS data, in the 3 principal directions, at 7 different y -locations. (a) $y^+ = 4$; (b) $y^+ = 14$; (c) $y^+ = 30$; (d) $y^+ = 80$; (e) $y^+ = 150$; (f) $y^+ = 400$; (g) $y^+ = 590$. Separations: ---- x -direction ($\Delta y = \Delta z = 0$); — y -direction ($\Delta x = \Delta z = 0$); -.- z -direction ($\Delta x = \Delta y = 0$).

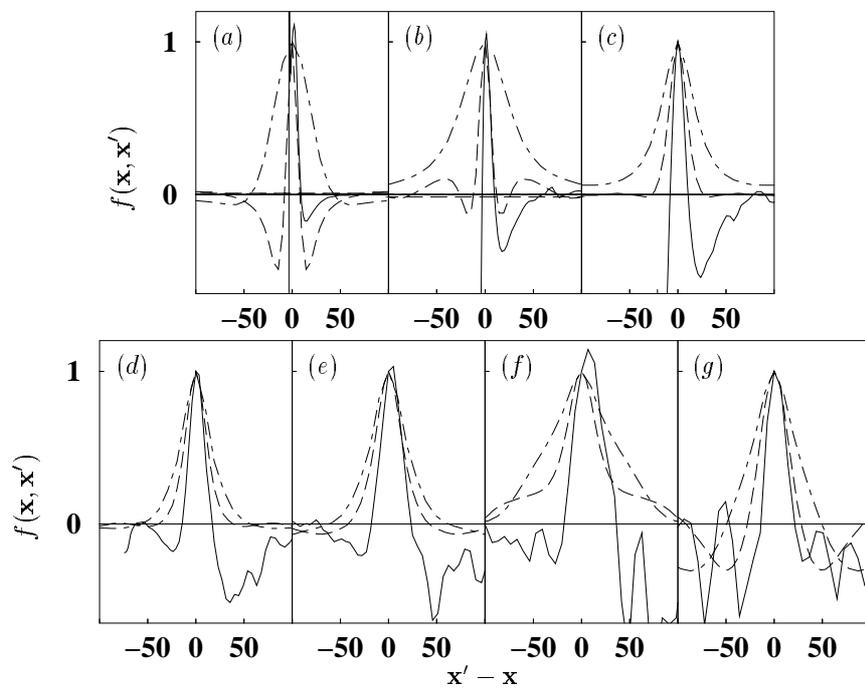


FIGURE 5. Same as figure 4 for $\alpha = \beta = 2$.

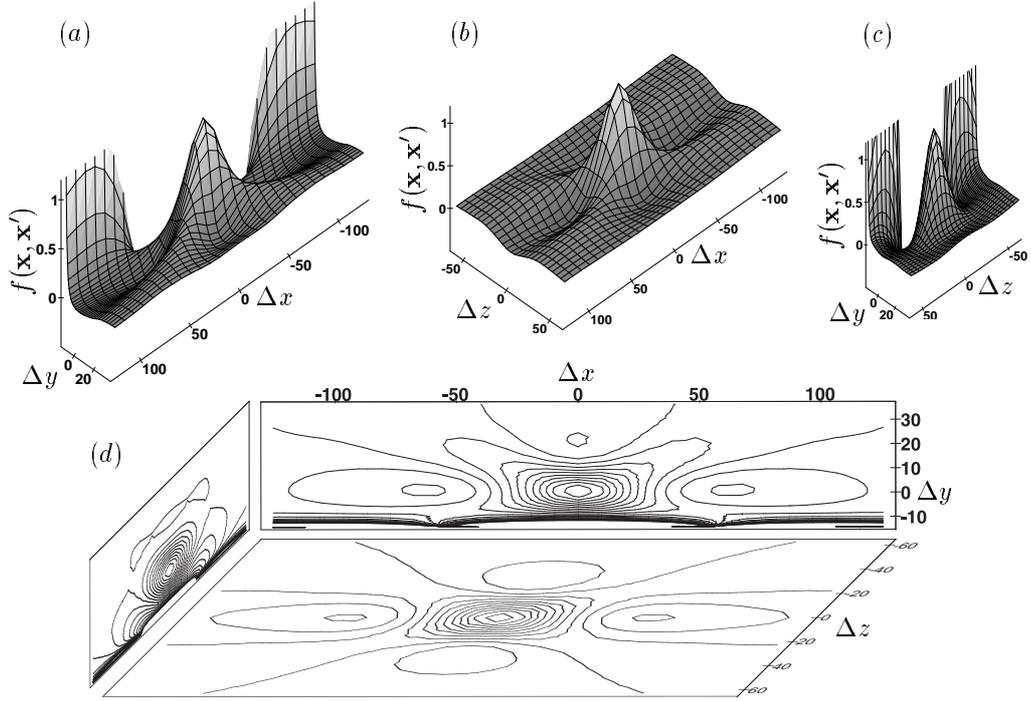


FIGURE 6. Shape of the correlation function defined by (4.5) with $\alpha = \beta = 1$ at $y^+ = 14$. (a) Separation in x - y plane; (b) Separation in x - z plane; (c) Separation in y - z plane; (d) Iso-correlation contours in these three planes (21 contours from 1 to -1 are plotted).

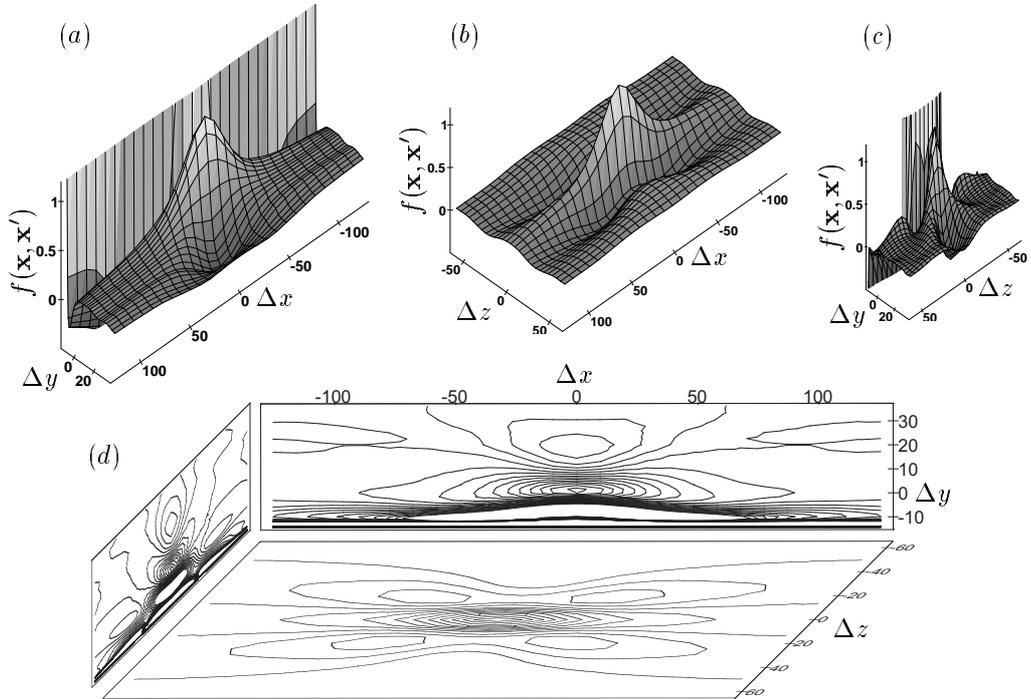
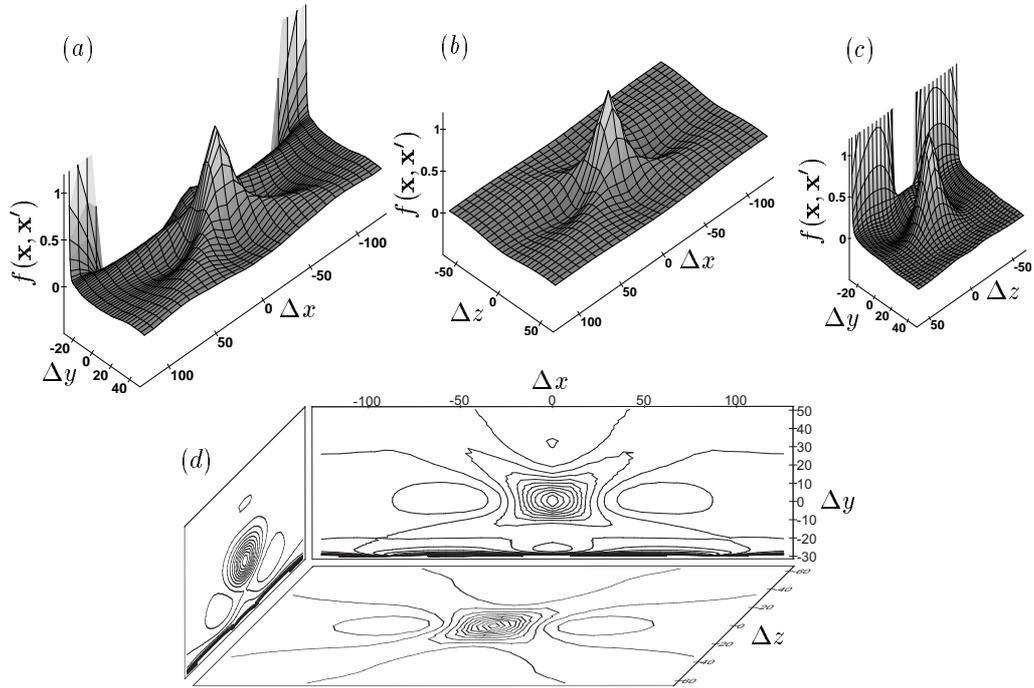
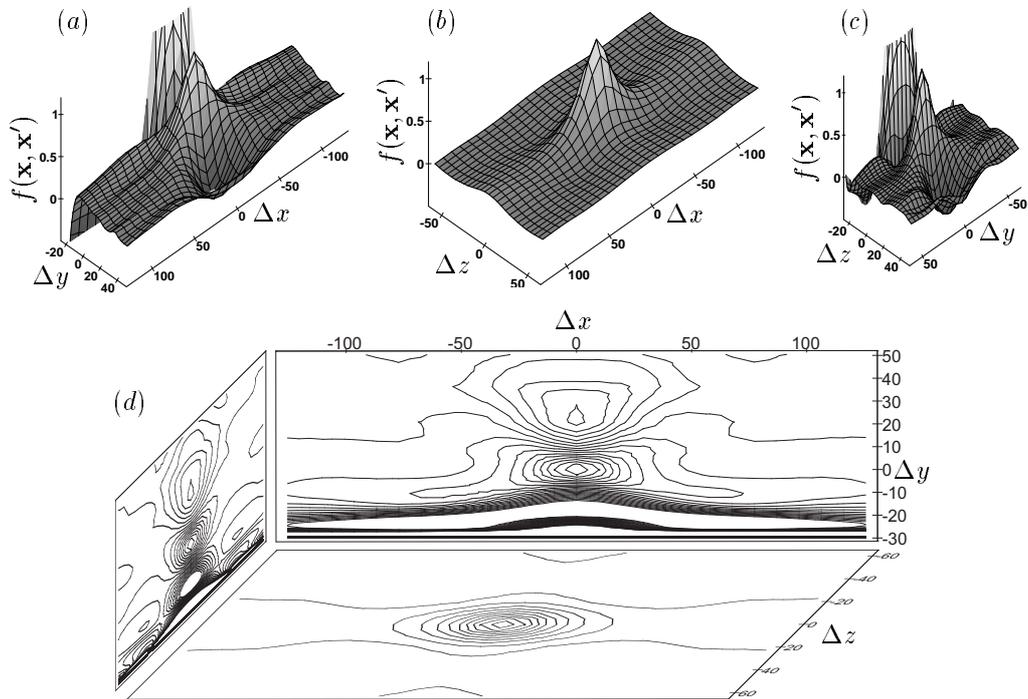


FIGURE 7. Same as figure 6 with $\alpha = \beta = 2$ at $y^+ = 14$.

FIGURE 8. Same as figure 6 with $\alpha = \beta = 1$ at $y^+ = 30$.FIGURE 9. Same as figure 6 with $\alpha = \beta = 2$ at $y^+ = 30$.

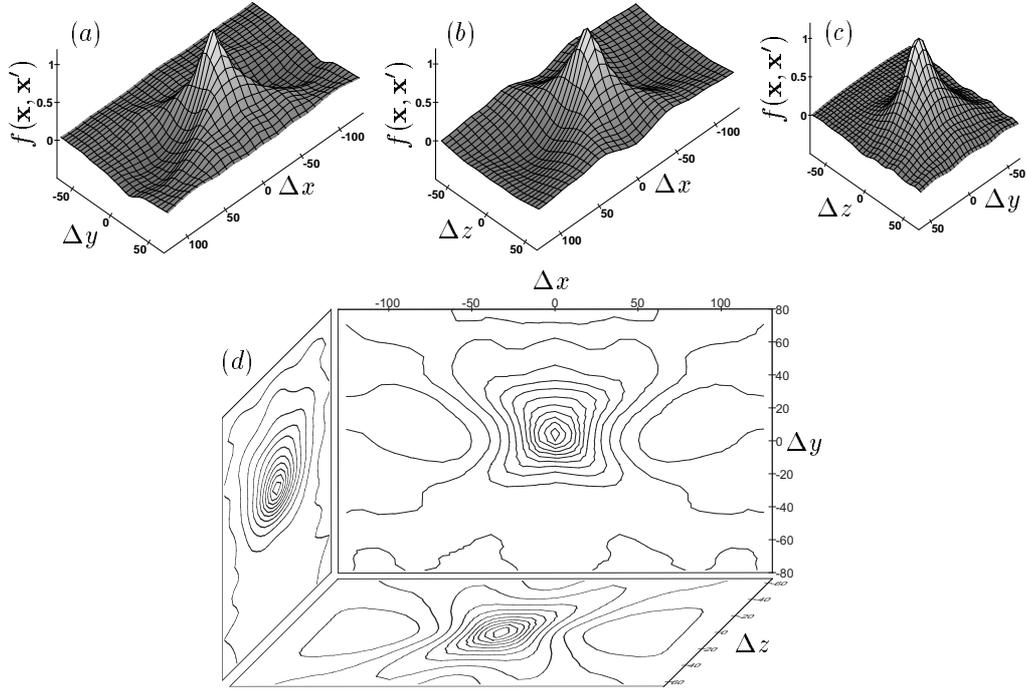


FIGURE 10. Same as figure 6 with $\alpha = \beta = 1$ at $y^+ = 150$.

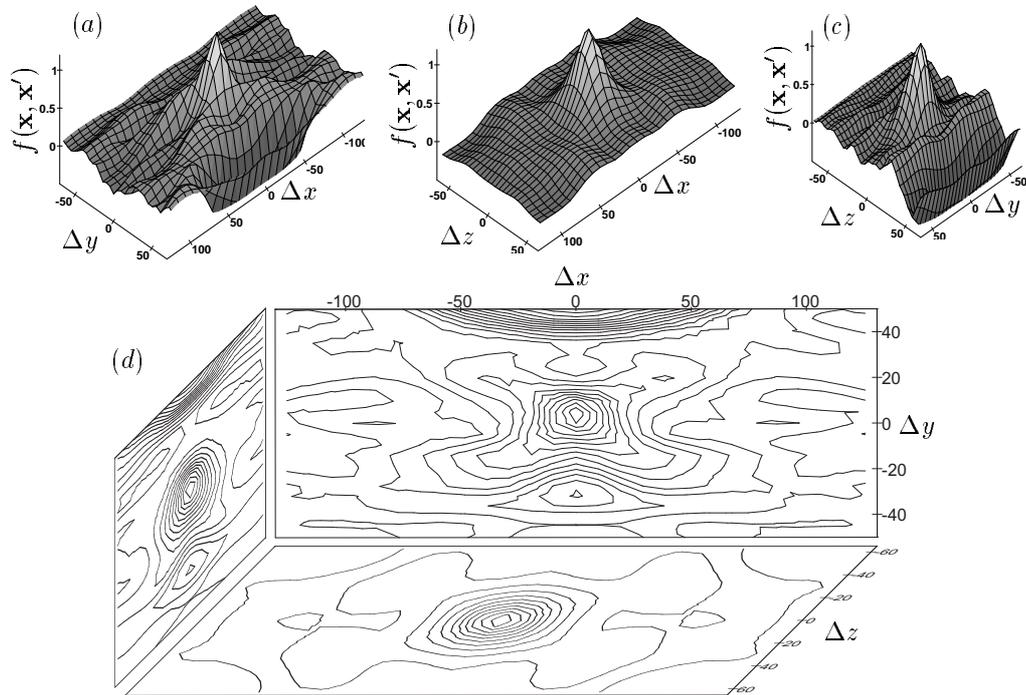


FIGURE 11. Same as figure 6 with $\alpha = \beta = 2$ at $y^+ = 150$.

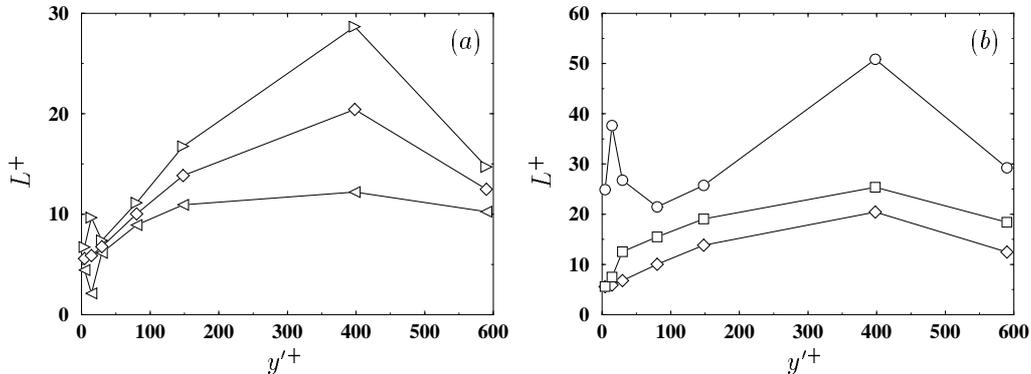


FIGURE 12. Length scales characterizing the correlation function corresponding to ϕ_{22}^* evaluated from the curves in figure 5. (a) Comparison of the length scales in y -direction: \triangleleft Left length scale L_{-e_2} ; \triangleright Right length scale L_{e_2} ; \diamond Central length scale $L = \frac{1}{2}(L_{-e_2} + L_{e_2})$. (b) Comparison of the central length scales in the principal directions: \circ x -direction; \diamond y -direction; \square z -direction.

and 7, in particular for the 22-component. It gradually decreases when the fixed point \mathbf{x} moves away from the wall (figures 8 and 9). Further away from the wall (figures 10 and 11), the elongation in streamwise direction is almost totally removed, but the asymmetry in y -direction, emphasized in § 4.2, is visible.

The model does not account for the elongation in streamwise direction, since it uses a function of r , which does not distinguish different directions. This shortcoming cannot be responsible for the spurious amplification of the redistribution in the logarithmic layer, pointed out in § 3.1, since in the case of a channel flow, the non-local effect does not act in the homogeneous directions x and z . Nevertheless, in more complex flows, this feature of the correlation function can become significant. In § 5.1, a new formulation of the elliptic relaxation equation will be proposed, allowing the introduction of different length scales in each directions, thus taking into account the anisotropy of the turbulent structures.

4.4. Length scales

It is noted that the function $\exp(-r/L)$ takes the value $1/e$ for $r = L$. Hence, the correlation length scale can be defined by the separation at which the correlation function takes this value. Notwithstanding its simplicity, this method provides an evaluation of a length scale $L_{\mathbf{m}}$, defined implicitly by

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x} + L_{\mathbf{m}}\mathbf{m}) = \frac{1}{e}, \quad (4.7)$$

in each direction \mathbf{m} , including the inhomogeneous direction. The drawback is that this definition only enables the characterization of the shape of the function at moderate separations and cannot account for more complex features, such as negative excursions.

Figure 12 shows the different length scales evaluated with this method from the correlation functions corresponding to ϕ_{22}^* , depicted in figure 5. In figure 12(a), three length scales in the y -direction are compared: the left length scale, defined by (4.7) with $\mathbf{m} = -\mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ and \mathbf{e}_3 being the basis vectors in streamwise, wall-normal and spanwise directions, respectively); the right length scale, defined by (4.7) with $\mathbf{m} = \mathbf{e}_2$, and the central length scale, which is the algebraic mean of the two previous ones, i.e., the half-width of the correlation function. It can be noted that the asymmetry, already emphasized in § 4.2, is rather strong in the main part of the flow. Except for the peculiar

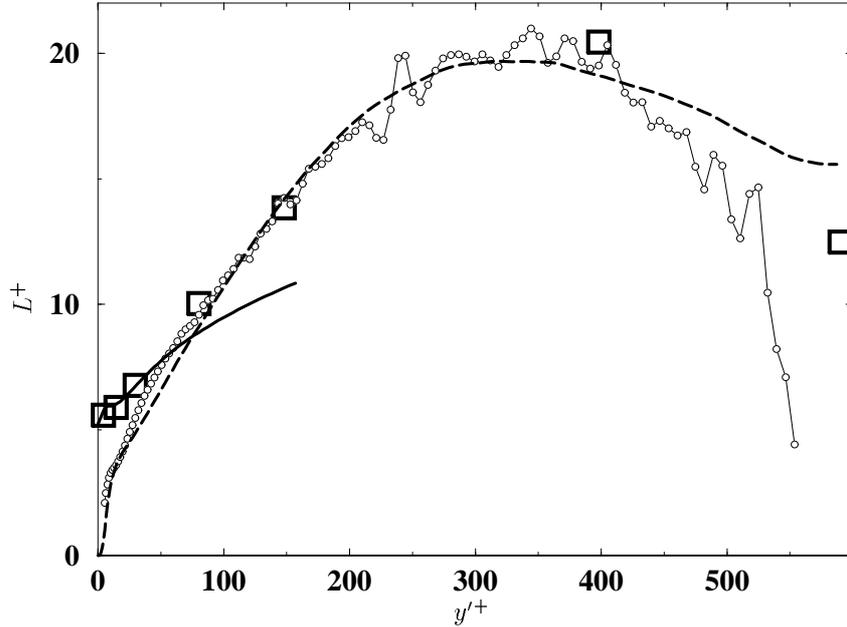


FIGURE 13. Comparison of the different length scale definitions for the ϕ_{22}^* component, evaluated from the DNS data: \square Correlation length scale L (central length scale in figure 12*a*), defined as the half-width of the correlation function; \circ — \circ Integral length scale L_{int} defined by (4.10) with $i = j = 2$; ---- Turbulent length scale used in the model $L_T = C_L k^{3/2} \varepsilon^{-1}$ ($C_L = 0.045$); — Kolmogorov length scale used near the wall in the model $L_K = C_\eta C_L \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$ ($C_\eta = 80$).

behaviour at $y^+ = 14$, the asymmetry increases continuously with distance from the wall until it reaches a maximum, and then decreases in the vicinity of the centre. Note that the correlation function should be symmetrical at the centre if the data were perfectly statistically converged (the data have not been artificially symmetrized).

In figure 12(*b*), the central length scale in the y -direction, already plotted in figure 12(*a*), is compared to the length scales in the x - and z -directions. This comparison provides a quantitative evaluation of the anisotropy of the correlation function, seen in figures 4–11, and shows that the anisotropy of ϕ_{22}^* is very important everywhere in the domain. The three length scales show qualitatively the same variation across the channel, except below $y^+ = 50$, where the streamwise length scale exhibits a sharp spike, corresponding to the strong elongation of the iso-correlation contours emphasized in § 4.3.

Figure 13 shows a comparison between the correlation length scale, defined as the half-width of the correlation function (the *central* length scale in figures 12*a,b*), and the integral length scale L_{int} . In order to define the latter, let us introduce the standard correlation function \mathcal{F} (cf., for instance, Monin & Yaglom 1975) to be used in the integral equation (2.4):

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (4.8)$$

where, contrary to (2.6), the one-point correlation is expressed in \mathbf{x} . The one-point correlation can then be taken outside the integral, which gives

$$\rho \phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \int_{\Omega} \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'). \quad (4.9)$$

This formulation suggests the definition of the integral length scale

$$L_{int}^2(\mathbf{x}) = \left| \int_{\Omega} \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \right| = \left| \frac{\rho \phi_{ij}^*(\mathbf{x})}{\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \right|, \quad (4.10)$$

plotted in figure 13. Also plotted are the length scales used in Durbin's model (3.1), namely the Kolmogorov length scale L_K , which is active in the vicinity of the wall, and the turbulent length scale L_T .

The first important feature to be noted is that the correlation length scale is very close to the integral length scale in the main part of the flow, which leads to a very important conclusion: the most significant contribution of the correlation function to the integral (4.10) is given by its values at moderate separations. Integral properties of the correlation function are thus mainly due to the shape near the peak. The complex features of the correlation function demonstrated in figures 2 and 4–11, in particular the negative excursions, appear to have no significant influence. The redistribution term ϕ_{ij}^* , which is given by the integral of the two-point correlation, can be expected to depend only on the shape of the correlation function at moderate separations. Therefore, the use of a simple model function, such as the exponential function (2.7), seems to be totally justified by figure 13. However, as mentioned in § 4.2, the asymmetry in the y -direction is missed by the model (2.7), which leads, as shown in Appendix B, to the erroneous amplification of the redistribution in the logarithmic layer noted in § 3.1. The model must be modified, as shown in figure 3, to account for this asymmetry, as well as for the anisotropy emphasized in § 4.3. This issue will be discussed in the following sections.

In the vicinity of the wall, the correlation length scale L and the integral length scale L_{int} do not have similar behaviours: L approaches a value of 6, whereas L_{int} decreases rapidly toward the wall. This behaviour justifies the use of a lower bound in the model (3.1). The two length scales L_T and L_K , used in this model, are also plotted in figure 13. The turbulent length scale L_T provides a very satisfactory representation of the integral length scale throughout the flow, except near the centre of the channel. It should be noted that in this region, both ϕ_{ij}^* and Ψ_{ij} are small, and the evaluated integral scale is contaminated by numerical errors. Hence, the strong decrease of L_{int} beyond $y^+ = 500$ is probably not physical. The curve has been truncated at $y^+ \approx 550$ to improve the clarity of the figure. Since in the main part of the flow, the integral length scale L_{int} and the correlation length scale L are very close to each other, the model L_T represents very satisfactorily the correlation length scale down to $y^+ \approx 100$. Below this point, figure 13 shows that the Kolmogorov length scale L_K must be used. The point where L_T becomes smaller than L_K when moving toward the wall is approximately located where L and L_{int} diverge. The location of this point depends on the coefficient C_η ; in figure 13, the original coefficient $C_\eta = 80$, chosen to give the experimental value of the correlation length scale at the wall (Durbin & Laurence 1996), has been used. In order to compare the shape of the modelled length scale against the data, the coefficient C_L has been set to 0.045 in this figure. The fact that the length-scale shapes are very similar is an *a posteriori* justification for the use of the formulation $L = \max(L_K, L_T)$ in Durbin's model.

The above results have addressed some important issues about the elliptic relaxation method. In particular, they justify the use of a model for the correlation function which does not account for the negative excursions. They also confirm the necessity of bounding the length scale near the wall by the Kolmogorov length scale. However, it was shown in § 4.2 and 4.3 that modelling the correlation function by a simple isotropic exponential function is too crude an approximation. This is at the origin of the spurious behaviour in the logarithmic layer. In the following sections, reformulations of the model will be proposed and their behaviour analyzed.

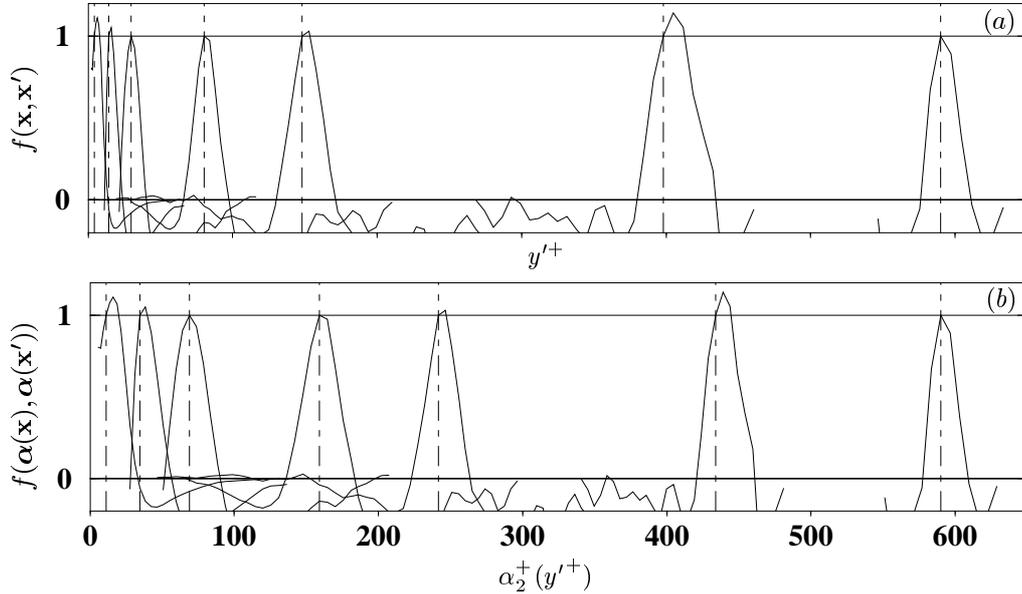


FIGURE 14. Effect of the space transformation on the correlation function: (a) Correlation function in the original space Ω (same as figure 2b); (b) Correlation function after transformation of y^+ -axis. See figure 2 for additional caption.

5. Reformulation of the model

5.1. Correction of the inversion error

The elliptic relaxation equation is derived from the integral equation of the redistribution term (2.4), which is transformed into (2.8) by using the model (2.7). Equation (2.8) can be inverted to give the elliptic relaxation equation if the integral is a convolution product, i.e., if the function denoted $E(r)$ truly depends only on r , or at most on the separation $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$. This is, however, not the case, since the length scale depends on the location. This inversion is valid only if the length scale can be considered locally constant, which implies that $\|\nabla L\|$ is much smaller than unity. Since the coefficient C_L is chosen such that $\|\nabla L\| = \kappa = 0.41$ in the logarithmic region, the length scale cannot be considered as a constant. If (2.9) is meant to be equivalent to (2.8), an *inversion error* is introduced.

In order to avoid this inversion error, it is necessary to treat the variation of L . A coordinate transformation $\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ can be introduced, such that in the transformed space the length scale is roughly a constant, and the boundaries of the domain are preserved: $\boldsymbol{\alpha}(\Omega) = \Omega$. In a channel, it is simply given implicitly by $d\alpha_2/L_\alpha = dy/L(y)$, i.e., by the integral

$$\alpha_2(y) = \int_0^y \frac{L_\alpha}{L(y')} dy', \quad (5.1)$$

where L_α is a constant, chosen such that the domain is globally preserved:

$$L_\alpha = 2h \left(\int_0^{2h} \frac{dy'}{L(y')} \right)^{-1}. \quad (5.2)$$

Other directions can either be kept unchanged ($\alpha_1(\mathbf{x}) = x$ and $\alpha_3(\mathbf{x}) = z$) or be transformed according to the previously noted anisotropy. An example of such a transformation in a 2-dimensional domain is given in appendix C.

Figure 14 shows how the shape of the correlation function corresponding to ϕ_{22}^* is modified by α . It can be seen that, after the transformation, the correlation length scale is constant across the channel. It can also be seen that the transformation almost completely removes the asymmetry in the y -direction. Note that, in this figure, the transformation of the correlation is plotted, instead of the correlation between transformed quantities (the space transformation and the evaluation of the two-point correlations are not commutable). This approximation is used only in this figure to illustrate the effect of α on the length scale, *but not in the subsequent analysis*.

Let us define the functions: $\xi_i = \partial p / \partial x_i \circ \alpha^{-1}$, $w_i = u_i \circ \alpha^{-1}$ and $\zeta_{ij} = \phi_{ij}^* \circ \alpha^{-1}$, where \circ denotes the function composition: $f \circ g(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$. Note that these functions are defined on the same domain Ω as the original quantities $\partial p / \partial x_i$, u_i and ϕ_{ij}^* , since α maps Ω to itself. Additionally, let g_i be the Laplacian of ξ_i , i.e.,

$$g_i = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (5.3)$$

The same method as in § 2 can be applied to derive a new form of the elliptic relaxation equation. First, one can assume that a homogeneous Neumann boundary condition can be applied to ξ_k , so that it satisfies the following integral equation (see appendix C for details in a 1-dimensional case):

$$\xi_k(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} g_k(\mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'). \quad (5.4)$$

In this expression, G_{Ω} is the same as in (2.3), since the Green function only depends on the domain. ζ_{ij} then satisfies

$$\rho \zeta_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Theta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'), \quad (5.5)$$

where $\Theta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\overline{w_j(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}') - w_i(\mathbf{x}) g_j(\mathbf{x}')}$.

In a free space, (5.5) reduces to

$$\rho \zeta_{ij}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \Theta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{dV(\mathbf{x}')}{4\pi r}. \quad (5.6)$$

The two-point correlations can then be modelled by

$$\Theta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Theta_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \exp\left(-\frac{r}{L_{\alpha}}\right), \quad (5.7)$$

leading to

$$\rho \zeta_{ij}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \Theta_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \frac{\exp\left(-\frac{r}{L_{\alpha}}\right)}{4\pi r} dV(\mathbf{x}'). \quad (5.8)$$

Equation (5.8) is similar to (2.8), the main difference being that the length scale L_{α} is now truly a constant. Thus, (5.8) is a convolution integral, which can be inverted without introducing an inversion error:

$$\zeta_{ij}(\mathbf{x}) - L_{\alpha}^2 \frac{\partial^2 \zeta_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}(\mathbf{x}) = -\frac{L_{\alpha}^2}{\rho} \Theta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}). \quad (5.9)$$

Introducing the Jacobian matrix of the inverse transformation, $A = \nabla \alpha^{-1}$, the equation

satisfied by ϕ_{ij}^* is

$$\phi_{ij}^* - L_\alpha^2 A_{kl} A_{ml} \frac{\partial^2 \phi_{ij}^*}{\partial x_k \partial x_m} - L_\alpha^2 A_{ml} \frac{\partial A_{kl}}{\partial x_m} \frac{\partial \phi_{ij}^*}{\partial x_k} = \phi_{ij}^h. \quad (5.10)$$

In this equation, as in § 2.2, the right hand side has been replaced by a quasi-homogeneous model, noting that in homogeneous situations, (5.10) reduces to

$$\phi_{ij}^* = \phi_{ij}^h. \quad (5.11)$$

Now, a matrix of length scales can be introduced by defining $A_{ij} = L_{ij}/L_\alpha$, which yields a new form of the elliptic relaxation equation:

$$\phi_{ij}^* - L_{kl} L_{ml} \frac{\partial^2 \phi_{ij}^*}{\partial x_k \partial x_m} - L_{ml} \frac{\partial L_{kl}}{\partial x_m} \frac{\partial \phi_{ij}^*}{\partial x_k} = \phi_{ij}^h. \quad (5.12)$$

This new formulation is more complicated than the original one, but allows for length scale anisotropy, which has been found to be very significant in § 4. As will be shown in § 5.3, it does not exhibit the same spurious behaviour in the logarithmic layer.

The remaining issue is the modelling of L_{ij} . The most natural choice is

$$L_{ij} = \frac{3 \overline{u_i u_j}}{2k} L, \quad (5.13)$$

where L is given by the original model (3.1). Another possibility is simply

$$L_{ij} = L \delta_{ij}, \quad (5.14)$$

which neglects the anisotropy but reduces significantly the complexity of (5.12), which becomes

$$\phi_{ij}^* - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^* - L \nabla L \cdot \nabla \phi_{ij}^* = \phi_{ij}^h. \quad (5.15)$$

This formulation only differs from the original one by the presence of the third term on the left hand side. This term accounts for the variations of the length scale. Note that (5.15) can be rewritten as

$$\phi_{ij}^* - L \nabla \cdot (L \nabla \phi_{ij}^*) = \phi_{ij}^h. \quad (5.16)$$

This formulation is close to those proposed by Wizman *et al.* (1996), Laurence & Durbin (1994) and Durbin & Laurence (1996), but it will be demonstrated in § 5.3 that it still exhibits an amplification of the redistribution in the logarithmic layer.

5.2. Correction to the model of the correlation function

In § 4.2, it has been pointed out that the correlation function is strongly asymmetric in the direction normal to the wall. Figure 3 shows that using the original model for the correlation function, the two-point correlation between the fixed point \mathbf{x} and the wall is overestimated. This shortcoming can be corrected by taking into account the gradient of the length scale, thus giving an asymmetric shape to the model for the correlation function:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(\frac{-r}{L + \beta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla L}\right), \quad (5.17)$$

which has been plotted for $\beta = 1$ in figure 3.

Considering the term $\beta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla L$ as a small correction, a Taylor series expansion of (5.17) leads to the expression

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sim \exp\left(-\frac{r}{L}\right) \left(1 + \beta \frac{r}{L^2} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla L\right). \quad (5.18)$$

If (5.18) is combined with (2.6) and (2.4), using the free-space Green function, one obtains

$$\begin{aligned} \rho\phi_{ij}^*(\mathbf{x}) = & \underbrace{- \int_{\Omega} \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \frac{\exp\left(-\frac{r}{L}\right)}{4\pi r} dV(\mathbf{x}')}_{\rho\phi_{ij}^{*a}} \\ & - \underbrace{\int_{\Omega} \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \beta \frac{r}{L^2} \frac{\exp\left(-\frac{r}{L}\right)}{4\pi r} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla L dV(\mathbf{x}')}_{\rho\phi_{ij}^{*b}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

In this equation, the first term, ϕ_{ij}^{*a} , is exactly the redistribution term given by the original model, and satisfies

$$\phi_{ij}^{*a} - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^{*a} = -\frac{L^2}{\rho} g_{ij}, \quad (5.20)$$

where $g_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. The second term ϕ_{ij}^{*b} can be considered as a correction term. Using a Taylor series expansion of $g_{ij}(\mathbf{x}')$ in the vicinity of the fixed point \mathbf{x} , one obtains

$$\rho\phi_{ij}^{*b}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla g_{ij} \beta \frac{r}{L^2} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \nabla L \frac{\exp\left(-\frac{r}{L}\right)}{4\pi r} dV(\mathbf{x}'), \quad (5.21)$$

which gives exactly, in a free space,

$$\rho\phi_{ij}^{*b} = -8\beta L^3 \nabla L \cdot \nabla g_{ij}. \quad (5.22)$$

Following Durbin (1991), the right hand side of (5.20) can be replaced by any quasi-homogeneous model ϕ_{ij}^h , which corresponds to modelling g_{ij} by $-\rho\phi_{ij}^h/L^2$. There are then two possible ways to take into account the correction term in the model. First, in (5.22), g_{ij} can be approximated by $-\rho\phi_{ij}^{*a}/L^2$, which leads to

$$\phi_{ij}^{*a} - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^{*a} = \phi_{ij}^h; \quad (5.23)$$

$$\rho\phi_{ij}^{*b} = 8\beta L \nabla L \cdot \nabla \phi_{ij}^{*a} - 16\beta (\nabla L)^2 \phi_{ij}^{*a}. \quad (5.24)$$

Thus, (5.23) gives exactly the same solution as the original model, while (5.24) provides an explicit correction ($\phi_{ij}^* = \phi_{ij}^{*a} + \phi_{ij}^{*b}$). The second possibility is to take into account the correction implicitly:

$$(1 + 16\beta (\nabla L)^2) \phi_{ij}^* - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^* - 8\beta L \nabla L \cdot \nabla \phi_{ij}^* = \phi_{ij}^h. \quad (5.25)$$

This implicit formulation is probably preferable for stability reasons. In (5.25), the same term $L \nabla L \cdot \nabla \phi_{ij}^*$ as in (5.15) appears, but with the coefficient 8β . This shows that the space transformation introduced in § 5.1 also corrects the asymmetry in the y -direction, as can be seen in figure 14.

It is worth pointing out that the same type of correction has been used by Launder & Tselepidakis (1991), in order to take into account the inhomogeneity of the flow near a wall, and thus avoid the use of wall echo correction terms. Usually, the rapid part of the redistribution term is evaluated as the tensorial product between a fourth order tensor and the gradient of the mean velocity. Launder & Tselepidakis (1991) proposed to replace

| Equation | Model | γ | Γ |
|----------|----------------------------------|---|----------|
| (2.10) | D1 (Durbin 1991) | -2 | 1.51 |
| (3.3) | W1 (Wizman <i>et al.</i> 1996) | 0 | 1 |
| (3.5) | L1 (Laurence & Durbin 1994) | 0 | 1 |
| (3.6) | D2 (Durbin & Laurence 1996) | 0 | 1 |
| (3.4) | W2 (Wizman <i>et al.</i> 1996) | 2 | 0.75 |
| (5.15) | M1 (this paper) | -1 | 1.2 |
| (5.12) | M2 (this paper) | $-\frac{9}{4}(\overline{u_1 u_2^2}/k^2 + \overline{u_2 u_1^2}/k^2)$ | 1.06 |
| (5.25) | M3 (this paper) | $2(12\beta - 1)$ | 0-1.51 |
| (5.29) | GS (Gibson & Launder 1978) | NA | 0.67 |
| (5.30) | GR (Gibson & Launder 1978) | NA | 0.40 |
| (5.26) | LT (Launder & Tselepidakis 1991) | NA | 0.53 |

TABLE 1. Logarithmic layer analysis of the different formulations of the elliptic relaxation equation

the latter by an effective velocity gradient given by

$$\left. \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right|_{\text{eff}} = \frac{\partial U_l}{\partial x_m} + c_I l_n \frac{\partial l_n}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_l}{\partial x_k \partial x_m}, \quad (5.26)$$

where $c_I = 0.3$, and $l_n = (k/\varepsilon)(\overline{u_p u_q} n_p n_q)^{1/2}$ is a scalar length scale in the direction of outward normal to the wall. Thus, in (5.15), (5.25) and (5.26), by three different reasonings, the same type of correction, of the form $L \nabla L \cdot \nabla A$, where A denotes either ϕ_{ij}^* or $\partial U_l / \partial x_m$, has been introduced in order to reduce the energy redistribution between the components of the Reynolds stress in the logarithmic layer. The effect of the corrections proposed in the present paper is investigated in the next section.

5.3. Redistribution reduction in the logarithmic layer

In § 3.1, it has been shown that, irrespective of the quasi-homogeneous model, the original formulation gives an amplification of the redistribution in the logarithmic layer. In fact, no matter what formulation of the elliptic relaxation equation is considered, the same analysis leads to an expression of the form

$$\phi_{ij}^* = \Gamma \phi_{ij}^h, \quad (5.27)$$

where

$$\Gamma = \frac{1}{1 + \gamma C_L^2 C_\mu^{-3/2} \kappa^2}, \quad (5.28)$$

thus relating the redistribution term given by the elliptic relaxation model to its underlying quasi-homogeneous model. This analysis is based on the logarithmic layer assumptions: $\phi_{ij}^h = A^h / y$, $k = u_\tau^2 / C_\mu^{1/2}$ and $\varepsilon = u_\tau^3 / \kappa y$, where A^h is a constant and u_τ denotes the friction velocity. In (5.27), ϕ_{ij}^* is not the exact solution of the differential equation, but only a particular solution in the logarithmic layer (no boundary conditions are considered). The amplification factor Γ characterizes the effect of the elliptic relaxation equation in this region.

The coefficient γ in (5.28) depends on the formulation of the elliptic relaxation equa-

tion. It is given in table 1, along with an estimation of the amplification factor Γ . The length scale L used in the calculations is given by (3.1) for all the formulations. No alternative definition of L is needed in the new formulations M1, M2 and M3, since they explicitly involve the gradient of L to account for inhomogeneity. The coefficient C_L is chosen such that the length scale is $L = \kappa y$ in the logarithmic layer: $C_L = C_\mu^{3/4}$. In the case of the fully anisotropic model M2, the anisotropies $a_{ij} = \overline{u_i u_j} / k - \frac{2}{3} \delta_{ij}$ in the logarithmic layer are required, since they enter the anisotropic length scale (5.13). The following logarithmic layer values have been used: $a_{12} = -0.30$; $a_{22} = -0.42$. In the case of model M3, γ , and hence Γ , are functions of the coefficient β . As β varies from 0 (original model D1) to ∞ , Γ varies from 1.51 to 0. Note that the explicit version of M3, given by (5.23) and (5.24), has the same behaviour as M3 to the first order.

It can be seen in the table that the new models M1, M2 and M3, which are derived from theoretical considerations, unlike the *ad hoc* models W1, L1, D2 and W2, have various behaviours. The first one, M1, which attempts to limit the inversion error (§ 5.1) but does not account for the anisotropy of the length scale, induces an amplification of the redistribution. The factor Γ_{M1} is lower than Γ_{D1} , since the term $-L \nabla L \cdot \nabla \phi_{ij}^*$, which distinguishes M1 from D1, moves in the right direction. However, it is not sufficiently large to remove all the amplification due to the term $L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^*$. When the length scale anisotropy is taken into account (M2), the amplification factor falls to $\Gamma_{M2} = 1.06$. Thus, model M2 can be referred to as a *quasi-neutral* model. In model M3, β can be chosen to give any amplification factor between 0 and 1.51. The presence of the coefficient β enables adjustment of the weights of the terms $-L \nabla L \cdot \nabla \phi_{ij}^*$ and $(\nabla L)^2 \phi_{ij}^*$. By choosing $\beta = \frac{1}{12}$, the model becomes neutral ($\Gamma = 1$).

The amplification factors for the 22-components of the slow and rapid parts of the Gibson & Launder (1978) model are shown in table 1 for comparison. The slow part of the wall echo terms is given by

$$\phi_{ij}^{wS} = C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i} n_k n_j - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j} n_k n_i \right) f \left(\frac{L_T}{n_i r_i} \right), \quad (5.29)$$

where $C'_1 = 0.5$. The rapid part is

$$\phi_{ij}^{wR} = C'_2 \left(\phi_{km} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{jk} n_k n_i \right) f \left(\frac{L_T}{n_i r_i} \right), \quad (5.30)$$

where $C'_2 = 0.3$. The amplification factor for the formulation (5.26) proposed by Launder & Tselepidakis (1991), used with the linear IP model, is also shown.

This simple analysis of the logarithmic layer shows that modifications of the elliptic relaxation equation can overcome the deficiencies of the original model. The formulation to be chosen depends on the quasi-homogeneous model used as the source term. The most natural choice is to use a model which predicts correctly the redistribution in the logarithmic layer, such as the Speziale, Sarkar & Gatski (1991) model (see, e.g., Demuren & Sarkar 1993; Hadžić 1999; Manceau 1999), together with a neutral formulation of the elliptic relaxation equation, M2 or M3 with $\beta = \frac{1}{12}$. Less elaborate models, such as the Rotta & IP model, which overestimates the redistribution in the logarithmic layer, should be used with a formulation like the M3 model, with a coefficient β larger than $\frac{1}{12}$, without any wall echo correction terms.

Since these new formulations of the elliptic relaxation equation have amplification factors close to those previously proposed by Wizman *et al.* (1996), Laurence & Durbin (1994) and Durbin & Laurence (1996), they are expected to give similar results in practi-

cal applications. It was noted, in § 3.1, that the formulations W1, L1, D2 and W2 suffer from a lack of justification, and accordingly, the new formulations should be preferred.

Further *a priori* tests and actual computations using the new formulation M3 have been performed recently. The results, discussed in detail elsewhere (Manceau & Hanjalić 2000), demonstrate that an overall benefit is obtained by using the modified form of the elliptic relaxation equation in a channel flow. The *a priori* tests show that when the Rotta & IP model is used as the source term of the elliptic relaxation equation, the M3 model, with the coefficient β chosen to obtain a reduction of the redistribution in the logarithmic layer, corrects the overestimation due to the Rotta & IP model as expected. The results are comparable to those obtained from the redistribution-reducing model W2. If the SSG model (Speziale *et al.* 1991), which correctly predicts the redistribution in the logarithmic layer, is used as the source term, the M3 model gives results similar to those from the neutral W1 model. Both models are shown to be preferable to the original (D1) model.

Consequently, the optimal combinations of the SSG model (as source term) with the neutral elliptic relaxation formulations W1 and M3, respectively, are implemented in a Reynolds stress model and tested in full computations of a channel flow (Manceau & Hanjalić 2000). The results given by the two forms W1 and M3 are nearly indistinguishable. The use of these neutral formulations improves, in the buffer and logarithmic layers, the prediction of the mean velocity profile, which is underpredicted by the original elliptic relaxation model. Moreover, the anisotropy, and in particular the peak of $\overline{u^2}$, are better captured by these models.

Manceau & Hanjalić (2000) further show that, in the framework of the $\overline{v^2}$ - f model (Durbin 1991), the two neutral models (W1 and M3 with $\beta = \frac{1}{12}$) as well as a redistribution-reducing model (M3 with $\beta = \frac{1}{6}$) are capable of correcting the overestimation of the mean velocity by the original formulation, without adversely affecting the prediction of the turbulent kinetic energy.

6. Conclusions

The elliptic relaxation method is a promising way to model correctly the redistribution term down to solid boundaries. It can be expected to be somewhat universal, since it is based on theoretical grounds. However, some of the modelling assumptions can be called into question, and the behaviour of the original model is not entirely satisfactory in the logarithmic layer. The DNS database of a channel flow at $Re_\tau = 590$ (Moser *et al.* 1999) has been analyzed in order to understand the reasons for this spurious behaviour and to examine a number of open issues. Several conclusions can be drawn:

- The use of an exponential form to model the correlation function between the velocity and the Laplacian of the pressure gradient is consistent with the data. In particular, the coincidence of the integral scale and the half width of the correlation function for moderate separations shows that the correlation function shape for large separations does not have a significant influence on the redistribution term.
- The presence of a solid boundary induces a strong anisotropy of the turbulent structures, and in particular a significant asymmetry in the wall-normal direction. This feature is not accounted for by the simple isotropic correlation function used in Durbin's model. This weakness is at the origin of the erroneous amplification of the redistribution of energy between the components of the Reynolds stress observed in the logarithmic layer.
- The modelling of the correlation length scale by the turbulent length scale bounded near the wall by the Kolmogorov length scale is well corroborated by the DNS data.
- The wall echo effect, which corresponds to the appearance of image terms in the

Green function, increases the redistribution of energy, contrary to the common belief. Accordingly, it cannot be considered responsible for the observed damping in the logarithmic layer.

This study shows that the elliptic relaxation model, first derived intuitively by Durbin (1991), is based on assumptions relatively consistent with the DNS database. Even though the model is too simple to represent exactly the two-point correlations involved in the integral equation of the redistribution term, it reproduces the important non-local effect which cannot be accounted for by any algebraic model.

Based on the physical insights gained through the present DNS analysis, modifications of the model have been proposed in order to account for the inhomogeneity and anisotropy effects. The first modification is based on the observation that the length scale in the elliptic relaxation equation cannot be considered locally as constant. A new formulation of this equation, which accounts for this feature, includes the effect of the anisotropy of turbulence through a rather complicated tensorial expression. In the second modification, an asymmetric correlation function is introduced, by using the gradient of the length scale to identify the direction of inhomogeneity. This results in a second new formulation of the elliptic relaxation equation, involving fewer terms than the first one.

Both new formulations do not exhibit the same amplification of the redistribution in the logarithmic layer as the original one. The first one can be referred to as *quasi-neutral* since its amplification factor is only $\Gamma = 1.06$, compared to $\Gamma = 1.51$ for the original formulation. The second formulation can be neutral or exhibit a reduction, depending on the coefficient β which controls the sensitivity of the correlation function to the length scale gradient. Thus, either one of the formulations can be chosen, depending on the quasi-homogeneous model used as the source term and whether or not its behaviour in the logarithmic layer needs correction. The new formulations are similar to those proposed by Wizman *et al.* (1996), Laurence & Durbin (1994) and Durbin & Laurence (1996), but have the advantage of being based on rigorous theoretical grounds.

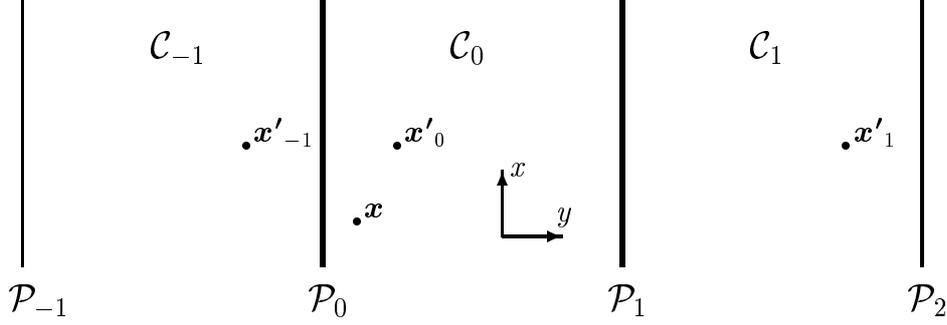
Further studies, including *a priori* tests and computations in a channel flow using new formulations, have been conducted (Manceau & Hanjalić 2000). It has been shown that modifying the elliptic operator according to (5.25) indeed improves, in the logarithmic region, the mean velocity profile and the turbulent quantities predicted by Durbin's Reynolds stress model as well as by the $\overline{v^2}$ - f model. In future studies, the new formulations will be tested and calibrated in more canonical test cases, in order to be ultimately applicable to complex engineering flows.

The authors gratefully acknowledge Paul Durbin and Joel Ferziger for the valuable comments on a draft of this manuscript, and William Cabot, Javier Jimenez and Robert Moser for assistance with the DNS database and useful discussions. R. M. acknowledges the hospitality of the Center for Turbulence Research during the 1998 summer research program. M. W. acknowledges support by the U.S. Office of Naval Research under Grant N00014-95-1-0221.

Appendix A. Approximation of the Green function in a channel

The purpose of this appendix is to derive an approximate Green function in a channel that is sufficient to preserve the correct features of the solution of a Neumann problem, and in particular its boundary conditions.

Let us consider the channel $\mathcal{C}_0 = \mathbf{R} \times [0, 1] \times \mathbf{R}$ shown in figure 15, bounded by two infinite planes \mathcal{P}_0 and \mathcal{P}_1 located in $y = 0$ and $y = 1$, respectively. In this domain, the


 FIGURE 15. Sketch of the channel $\mathcal{C}_0 = \mathbb{R} \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ and its images \mathcal{C}_{-1} and \mathcal{C}_1

problem to be solved is

$$\begin{cases} \nabla^2 f = g, \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on} \quad \partial \mathcal{C}_0 = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1, \end{cases} \quad (\text{A } 1)$$

where \mathbf{n} is the outgoing unit vector normal to the wall. The general solution of this Neumann problem is given by

$$f(\mathbf{x}) = - \int_{\mathcal{C}_0} \frac{g(\mathbf{x}')}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} dV(\mathbf{x}') - \int_{\partial \mathcal{C}_0} f(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \right) dS(\mathbf{x}'). \quad (\text{A } 2)$$

If the Green function of the channel, which satisfies the Neumann boundary condition on \mathcal{P}_0 and \mathcal{P}_1 , is used, the surface integral vanishes, leading to

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}_0} g(\mathbf{x}') G_{\mathcal{C}_0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'). \quad (\text{A } 3)$$

Unfortunately, no simple analytical expression of $G_{\mathcal{C}_0}$ exists except in the (k_x, k_z) wave-number space. Therefore, it is necessary to derive an approximated form of the Green function in the physical space.

We denote $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ as the approximate Green function which renders the surface term in (A 2) negligibly small. Chou (1945) proposed to let $H = G_{\mathbb{R}^3}$, the free-space Green function, but noted that it is only valid far from solid boundaries.

Let us consider the image channels \mathcal{C}_{-1} and \mathcal{C}_1 shown in figure (15), which are symmetrical to \mathcal{C}_0 with respect to \mathcal{P}_0 and \mathcal{P}_1 , respectively. The ‘‘even’’ extension \tilde{g} of g can be defined by $\tilde{g}(\mathbf{x}'_0) = \tilde{g}(\mathbf{x}'_{-1}) = \tilde{g}(\mathbf{x}'_1) = g(\mathbf{x}'_0)$ for each point \mathbf{x}'_0 of the channel \mathcal{C}_0 , where the points \mathbf{x}'_{-1} and \mathbf{x}'_1 are symmetrical to \mathbf{x}'_0 with respect to \mathcal{P}_0 and \mathcal{P}_1 , respectively.

Then, \tilde{f} , the extension of f , is a solution of a Neumann problem in $\mathcal{C}_{-1} \cup \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$:

$$\begin{cases} \nabla^2 \tilde{f} = \tilde{g}, \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on} \quad \mathcal{P}_{-1} \cup \mathcal{P}_2. \end{cases} \quad (\text{A } 4)$$

The solution can be expressed as

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{x}) = & - \int_{\mathcal{C}_{-1} \cup \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1} \frac{\tilde{g}(\mathbf{x}')}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} dV(\mathbf{x}') \\ & - \int_{\mathcal{P}_2} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \right) \tilde{f}(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}') + \int_{\mathcal{P}_{-1}} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \right) \tilde{f}(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (\text{A } 5)$$

By splitting the volume integral in (A 5) into integrals on \mathcal{C}_{-1} , \mathcal{C}_0 and \mathcal{C}_1 , adding and subtracting surface integrals on \mathcal{P}_0 and \mathcal{P}_1 and using the identities $\tilde{f}(\mathbf{x}'_{-1}) = \tilde{f}(\mathbf{x}'_1) = f(\mathbf{x}'_0)$ and $\tilde{g}(\mathbf{x}'_{-1}) = \tilde{g}(\mathbf{x}'_1) = g(\mathbf{x}'_0)$, it can be easily shown that:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & \int_{\mathcal{C}_0} g(\mathbf{x}'_0) \underbrace{\left(-\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|} - \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|} - \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\|} \right)}_{H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0)} dV(\mathbf{x}'_0) \\ & + \int_{\partial\mathcal{C}_0} f(\mathbf{x}'_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(-\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|} - \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|} - \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\|} \right) dS(\mathbf{x}'_0). \end{aligned} \quad (\text{A } 6)$$

The surface integral in this expression can now be neglected. Indeed, the derivative of $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0)$ is

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} H(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0) = -\frac{(\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}'}{4\pi\|\mathbf{x}'_{-1} - \mathbf{x}\|^3} + \frac{(\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}'}{4\pi\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}\|^3} - \frac{(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}'}{4\pi\|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\|^3}. \quad (\text{A } 7)$$

On \mathcal{P}_0 , since $\mathbf{x}'_{-1} = \mathbf{x}'_0$, the sum of the first two terms is zero and the surface integral only involves the contribution of the image \mathbf{x}'_1 . To estimate its magnitude, we choose a function f such that $f(x, 0, z) = f_0 \chi(x, z)$, where $\chi(x, z) = 1$ for $x^2 + z^2 \leq R^2$ and 0 elsewhere. The contribution $f_{\mathcal{P}_0}$ of the surface integral on \mathcal{P}_0 is

$$f_{\mathcal{P}_0} = \frac{1}{2} f_0 \left(1 - \frac{2-y}{(R^2 + (2-y)^2)^{1/2}} \right), \quad (\text{A } 8)$$

which takes the value

$$f_{\mathcal{P}_0} = f_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(R^2 + 2^2)^{1/2}} \right) \quad (\text{A } 9)$$

at $y = 0$. This value can be very small, depending on R .

In the case of the redistribution term, the two-point correlation $\overline{u_i(\mathbf{x}) \partial p / \partial x_j(\mathbf{x}') + u_j(\mathbf{x}) \partial p / \partial x_i(\mathbf{x}')}$ in the surface term can be approximated by

$$\left(\overline{u_i(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial x_j}(\mathbf{x})} + \overline{u_j(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x})} \right) \chi(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, z' - z). \quad (\text{A } 10)$$

The radius R defining χ is the non-dimensional correlation length scale $L/2h$, where h is the half-width of the channel. If the ϕ_{22}^* component is considered, the correlation length scale at the wall, evaluated from DNS data, is at most $L^+ = 25$ (in the streamwise direction), as can be seen in figure 12. With this value, $R \approx 0.02$. The Taylor series expansion with respect to R of the surface contribution $f_{\mathcal{P}_0} = \phi_{ij\mathcal{P}_0}^*$, given by (A 9), leads to

$$\phi_{ij\mathcal{P}_0}^* \sim \frac{L^2}{64h^2} \phi_{ij}^* \approx 3 \times 10^{-5} \phi_{ij}^*. \quad (\text{A } 11)$$

This result shows that the present approximation of the Green function is much better

than $G_{\mathbf{R}^3}$, which gives a factor of 0.5. Moreover, the boundary condition of f at the wall will be much more correctly imposed with this approximation.

One could think that by the same argument, adding more and more image terms would lead to the vanishing of the surface integral and that the Green function of the channel is exactly the sum of an infinity of image terms. Unfortunately, this sum is not convergent so the exact Green function cannot be derived this way.

Appendix B. Consequence of symmetrizing the correlation function

The purpose of this appendix is to provide a formal proof that the value of the integral (the redistribution term in our case) is increased when the correlation function is symmetrized.

Let us define functions $g(\mathbf{x})$ (corresponding to $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ in this paper) and $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ($f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ $G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ in this paper), and the integral

$$I(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}') h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (\text{B } 1)$$

which corresponds to $\phi_{ij}^*(\mathbf{x})$. If x and z are the homogeneous directions, $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = h(x' - x, y, y', z' - z)$ and $g(\mathbf{x}) = g(y)$. The integral $I(\mathbf{x})$ then reduces to

$$I(y) = \int_y g(y') H(y, y') dy', \quad (\text{B } 2)$$

where $H(y, y') = \int_x \int_z h(x' - x, y, y', z' - z) dx' dz'$.

Two assumptions, consistent with the behaviour of the correlation functions in this paper, are used in the following derivation: $H(y, y')$ decreases faster when $y' < y$ than when $y' > y$ ($H(y, y + s) > H(y, y - s)$ for $s > 0$), and $g(y)$ decreases when y increases.

Let us now define $H^*(y, y')$ by symmetrizing $H(y, y')$:

$$H^*(y, y + s) = \frac{H(y, y - s) + H(y, y + s)}{2} \quad (\text{B } 3)$$

for all s . The integral $I^*(y)$ is simply defined by replacing $H(y, y')$ by $H^*(y, y')$ in (B 2). The objective now is to show that $I^*(y) - I(y) > 0$.

The function $I^*(y)$ can be split into its left and right parts:

$$I^*(y) = \int_{s>0} [g(y - s)H^*(y, y - s) + g(y + s)H^*(y, y + s)] ds. \quad (\text{B } 4)$$

Using the definition of $H^*(y, y')$, this can be written as

$$I^*(y) = \int_{s>0} [g(y - s) + g(y + s)] \frac{H(y, y - s) + H(y, y + s)}{2} ds. \quad (\text{B } 5)$$

On the other hand, $I(y)$ can be split into left and right parts as well:

$$I(y) = \int_{s>0} [g(y - s)H(y, y - s) + g(y + s)H(y, y + s)] ds, \quad (\text{B } 6)$$

and thus, a combination of (B 5) and (B 6) yields:

$$I^*(y) - I(y) = \frac{1}{2} \int_{s>0} [g(y - s) - g(y + s)] [H(y, y + s) - H(y, y - s)] ds. \quad (\text{B } 7)$$

Based on the assumptions about $g(y)$ and $H(y, y')$ made earlier, both terms in the square brackets are positives and, accordingly, $I^*(y) - I(y) > 0$.

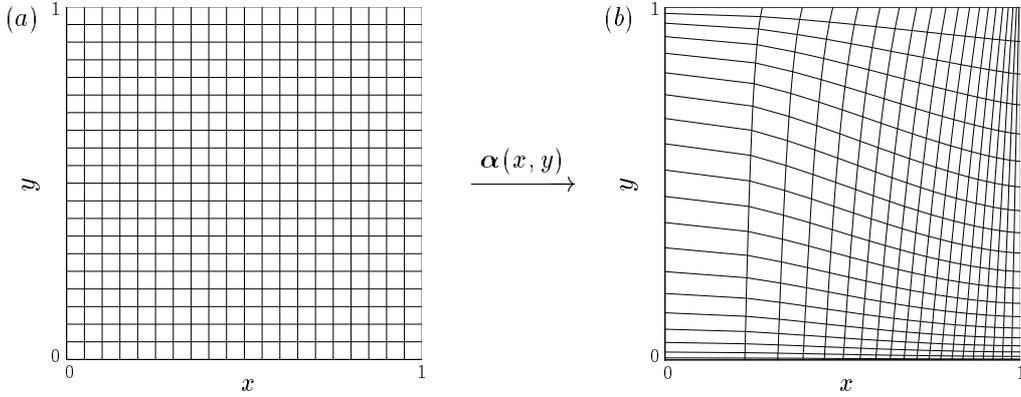


FIGURE 16. Example of mapping a $[0, 1] \times [0, 1]$ domain to itself. Lines drawn in figure (b) correspond to those in figure (a).

Thus, the replacement of the correlation function by a symmetrical function increases the redistribution term.

Appendix C. Examples of space transformations

The space transformation used in § 5.1 is difficult to visualize in complex geometries. Furthermore, it is not straightforward to understand its use to solve a differential equation, for instance a Neumann problem, in a 3-dimensional geometry. This appendix aims to clarify these issues, by examples in 1- or 2-dimensional domains.

Figure 16 shows an example of such a transformation α in the domain $[0, 1] \times [0, 1]$. The transformation is defined by:

$$\begin{cases} \alpha_1(x, y) = \sin^{1/2} \left[\frac{\pi}{2}(0.05 + 0.9y)x \right] / \sin^{1/2} \left[\frac{\pi}{2}(0.05 + 0.9y) \right], \\ \alpha_2(x, y) = \sin^2 \left[\frac{\pi}{2}(0.95 - 0.9x)y \right] / \sin^2 \left[\frac{\pi}{2}(0.95 - 0.9x) \right]. \end{cases} \quad (\text{C } 1)$$

This example may appear quite complicated, but it was chosen in such a way that the distortion of the domain is quite severe. This figure shows that the boundaries of the domain can be preserved even when no point of the domain is invariant, except for the corners.

However, the Green function of the domain $[0, 1] \times [0, 1]$ can only be obtained by applying a Fourier series expansion in one direction, which increases significantly the complexity of the analytic development. Therefore, in the remainder of this appendix, we will consider the case of a 1-dimensional Dirichlet problem:

$$\begin{cases} \nabla^2 f(x) = g(x) = x, \\ f(0) = 1, \\ f(1) = 0. \end{cases} \quad (\text{C } 2)$$

The Green function for the Dirichlet problem is

$$\begin{cases} G(x, x') = (x-1)x' & \text{for } x' < x, \\ G(x, x') = (x'-1)x & \text{for } x < x'. \end{cases} \quad (\text{C } 3)$$

The solution of (C 2) is then given by

$$f(x) = \int_0^x (x-1)x'^2 dx' + \int_x^1 x(x'-1)x' dx' + 1 - x, \quad (\text{C } 4)$$

and, finally,

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{7}{6}x + 1. \quad (\text{C } 5)$$

The above is the direct way of solving (C 2) by means of the Green function (obviously not the simplest way to solve this problem). The problem can also be solved by introducing first a space transformation α . For instance, let us consider the transformation

$$\alpha : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & x^{1/2}. \end{cases} \quad (\text{C } 6)$$

and the functions $\varphi = f \circ \alpha^{-1}$ and $\zeta = \partial^2 \varphi / \partial x^2$. Now, ζ , the Laplacian of φ , can be expressed as:

$$\zeta(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \circ \alpha^{-1} \right) \left(\frac{\partial \alpha^{-1}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \alpha^{-1} \right) \left(\frac{\partial^2 \alpha^{-1}}{\partial x^2} \right), \quad (\text{C } 7)$$

which yields

$$\zeta(x) = 5x^4 - \frac{7}{3}. \quad (\text{C } 8)$$

The function φ is then the solution of the Dirichlet problem in $[0, 1]$:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi(x) = \zeta(x) = 5x^4 - \frac{7}{3}, \\ \varphi(0) = 1, \\ \varphi(1) = 0. \end{cases} \quad (\text{C } 9)$$

Since the domain has been preserved, the Green function is the same, and the solution of (C 9) is

$$\varphi(x) = \int_0^x (x-1)x'(5x'^4 - \frac{7}{3}) dx' + \int_x^1 x(x'-1)(5x'^4 - \frac{7}{3}) dx' + 1 - x, \quad (\text{C } 10)$$

which leads to

$$\varphi(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{7}{6}x^2 + 1. \quad (\text{C } 11)$$

Finally, one can return to the original space using $f = \varphi \circ \alpha$, which yields (C 5) again.

This simple example shows how the functions are transformed and how one can obtain the same result by working in the transformed space. In principle, this method can be extended to multi-dimensional spaces. In complex geometries the method is obviously still valid, but the Green function cannot be determined analytically.

REFERENCES

- BEHNIA, M., PARNEIX, S. & DURBIN, P. 1998 Prediction of heat transfer in a jet impinging on a flat plate. *Intl J. Heat Mass Transfer* **41**, 1845–1855.
 BRADSHAW, P. 1973 *The strategy of calculation methods for complex turbulent flows*. Rep. 73-05, Dept of Aero., Imperial College, London.

- BRADSHAW, P., MANSOUR, N. N. & PIOMELLI, U. 1987 On local approximations of the pressure-strain term in turbulence models. *Proc. Summer Program, CTR, Stanford University/NASA Ames Research Center*, pp. 159–164.
- CHOU, P. Y. 1945 On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Q. Appl. Maths* **3**, 38–54.
- CRAFT, T. J. & LAUNDER, B. E. 1996 A Reynolds stress closure designed for complex geometries. *Intl J. Heat and Fluid Flow* **17**, 245–254.
- DEMUREN, A. O. & SARKAR, S. 1993 Systematic study of Reynolds stress closure models in the computations of plane channel flows. *J. Fluids Engng* **115**, 5–12.
- DURBIN, P. A. 1991 Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* **3**, 1–13.
- DURBIN, P. A. 1993 A Reynolds stress model for near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.* **249**, 465–498.
- DURBIN, P. A. 1995 Separated flow computations with the $k - \varepsilon - \overline{v^2}$ model. *AIAA J.* **33**, 659–664.
- DURBIN, P. A. & LAURENCE, D. 1996 Nonlocal effects in single point closure. *Proc. Turbulence Research Associates 96 meeting, Seoul, Korea*.
- FAVRE A. J., GAVIGLIO J. J. & DUMAS, R. J. 1957 Space-time double correlations and spectra in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **2**, 313–342.
- FAVRE A. J., GAVIGLIO J. J. & DUMAS, R. J. 1958 Further space-time correlations of velocity in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* **3**, 344–356.
- FU, S., LAUNDER, B. E. & TSELEPIDAKIS, D. P. 1987 *Accommodating the effects of high strain rates in modelling the pressure-strain correlation*. Rep. TDF/87/5, Mech. Engng Dept, UMIST, Manchester.
- GIBSON, M. M. & LAUNDER, B. E. 1978 Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.* **86-3**, 491–511.
- GRANT, H. L. 1958 The large eddies of turbulent motion. *J. Fluid Mech.* **4**, 149–190.
- HADŽIĆ, I. 1999 Second-moment closure modelling of transitional and unsteady turbulent flows. *PhD Thesis, Delft University of Technology*.
- HANJALIĆ, K. & LAUNDER, B. E. 1972 Fully developed asymmetric flow in a plane channel. *J. Fluid Mech.* **51**, 301–335.
- HUNT, J. C. R. & GRAHAM, J. M. R. 1978 Free-stream turbulence near plane boundaries. *J. Fluid Mech.* **84**, 209–235.
- HUNT, J. C. R., MOIN, P., LEE, M., MOSER, R. D., SPALART, P., MANSOUR, N. N., KAIMAL, J. C. & GAYNOR, E. 1989 Cross correlation and length scales in turbulent flows near surfaces. *Proc. 2nd Euro. Turb. Conf.*, 128–134.
- KIM, J. 1989 On the structure of pressure fluctuations in simulated turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **205**, 421–451.
- LAURENCE, D. & DURBIN, P. 1994 Modeling near wall effects in second moment closures by elliptic relaxation. *Proc. Summer Program, CTR, Stanford University/NASA Ames Research Center*.
- LAUNDER, B. E., REECE, G. J. & RODI, W. 1975 Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.* **68**, 537–566.
- LAUNDER, B. E. & TSELEPIDAKIS, D. P. 1991 Progress and paradoxes in modelling near-wall turbulence. *Proc. 8th Symp. Turbulence Shear Flows*, Vol. 29-1, pp. 1–6.
- LIEN, F.-S., DURBIN, P. A. & PARNEIX, S. 1997 Non-linear $\overline{v^2} - f$ modelling with application to aerodynamic flows. *Proc. 11th Symp. Turbulence Shear Flows*, Vol. 6, pp. 19–24.
- LUMLEY, J. L. 1975 Pressure-strain correlation. *Phys. Fluids* **18**, p. 750.
- MANCEAU, R. 1999 Modélisation de la turbulence. Prise en compte de l’influence des parois par relaxation elliptique. *PhD Thesis, École Centrale de Nantes, France*.
- MANCEAU, R., PARNEIX, S. & LAURENCE, D. 2000 Turbulent heat transfer predictions using the $\overline{v^2} - f$ model on unstructured meshes. *Intl J. Heat and Fluid Flow* **21**, 320–328.
- MANCEAU, R. & HANJALIĆ, K. 2000 A new form of the elliptic relaxation equation to account for wall effects in RANS modelling. *Phys. Fluids* **12-9**, 2345–2351.
- MANSOUR, N. N., KIM, J. & MOIN, P. 1988 Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **194**, 15–44.

- MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. 1975 *Statistical fluid mechanics*. MIT Press.
- MOSER, R. D., KIM, J. & MANSOUR, N. N. 1999 DNS of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, in press.
- NAOT, D., SHAVIT, A. & WOLFSHTEIN, M. 1973 Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses. *Phys. Fluids* **16**, 738–743.
- PARNEIX, S., DURBIN, P. A. & BEHNIA, M. 1998 Computation of 3-D turbulent boundary layers using the V2F model. *Flow, Turbulence and Combust.* **60**, 19–46.
- PEROT, J. B. & MOIN, P. 1993 Shear-free turbulent boundary layers: physics and modeling. Technical report, Dept Mech. Eng., Stanford University.
- ROTTA, J. C. 1951 Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Z. Phys.* **129**, 547–572.
- SABOT, J. 1976 *Étude de la cohérence spatiale et temporelle de la turbulence établie en conduite circulaire*. PhD Thesis, Lyon University, France.
- SPEZIALE, C. G. 1985 Modeling the pressure gradient–velocity correlation of turbulence. *Phys. Fluids* **28**, 69–71.
- SPEZIALE, C. G., SARKAR, S. & GATSKI, T. B. 1991 Modeling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical system approach. *J. Fluid Mech.* **227**, 245–272.
- WIZMAN, V., LAURENCE, D., KANNICHE, M., DURBIN, P. & DEMUREN, A. 1996 Modeling near-wall effects in second-moment closures by elliptic relaxation. *Intl J. Heat and Fluid Flow* **17**, 255–266.

Annexe D

Article paru dans : *Proceedings of the fourth
Symposium on Engineering Turbulence Modelling
and Measurements, Porticcio, Corsica, 1999*

Computations of turbulent flows using the V2F model in a finite element code

R. Manceau and S. Parneix*

Laboratoire National d'Hydraulique, Electricité de France,
6 quai Watier, BP 49, 78 401 Chatou, France

The V2F model has been implemented and used for the first time in an industrial finite element code, N3S, developed at the LNH. The implementation has been validated on the channel flow at $Re_\tau = 395$ and the backward-facing step at $Re = 5, 100$. Very satisfactory results have been obtained for the test case, proposed at the 7th ERCOFTAC/IARH workshop, of the ribbed-channel flow at $Re_H = 37, 200$ and heat transfer at $Re_H = 12, 600$. In particular, the present V2F model yielded very accurate predictions for the Nusselt number distribution.

1. Introduction

In industrial applications, turbulence modelers must conciliate two constraints: computational efficiency and solution accuracy. In the past, since the computational resources were very limited, wall functions were widely used. Unfortunately, there is a lack of accuracy for wall heat transfer applications, actually one of the most important quantity in nuclear engineering. Thus, in order to improve numerical predictions, turbulence models valid down to the wall are requested.

The standard way to extend high-Reynolds models is to use so-called “damping functions” in order to reproduce the influence of the molecular viscosity and the wall-blocking effect on the mean quantities of the flow. This kind of approach has been widely used since it was introduced by Jones and Launder [1], though these functions are mainly derived from experimental or DNS results and are not based on theoretical grounds. Moreover, from a numerical point of view, they introduce dangerous non-linearities and lead to numerical instabilities for complex configurations.

To avoid this type of problems, Durbin [2] introduced an elliptic relaxation method, which allows the derivation of low-Reynolds models from all high-Reynolds models. This approach, shortly presented in the first section, is related to a theoretical analysis. The simplest model which can be derived with such a technique is the V2F model; it has been successfully applied in a number of different cases, including heat transfer cases [3–7]. It seems therefore to show a good compromise for engineering applications where low-Reynolds models, implying fine meshes, can be used. It is indeed simpler than full Reynolds stress models and very efficient.

*Present address: Heat Transfer, ABB Corporate Research Ltd., CH-5405 Baden-Dättwil, Switzerland

The distinctive feature of this work is the use of a finite element code, N3S, whereas previous V2F computations used finite difference or finite volume codes. The second section of this paper presents the implementation of the model, in particular how the boundary conditions are handled, as well as validation cases.

The third section describes the test case of a 2-D periodic ribbed-channel, which was proposed at the 7th ERCOFTAC/IARH workshop in Manchester [8]. A 2-D unstructured triangular mesh has been generated for this purpose. For this case, two sets of experiments are available: the first one, with flow measurements, from Drain & Martin [9], at $Re_H = 37,200$; the second one, with heat flux measurements on the ribbed-wall, from Liou *et al.* [10], at $Re_H = 12,600$. Both cases were computed separately. Results showed that the V2F model accurately predicts mean flow properties. In particular, the prediction of the Nusselt number distribution is very satisfactory.

2. The V2F model

The standard way to develop low-Reynolds versions of eddy-viscosity models is to introduce a damping function in the Prandtl-Kolmogorov formula, such that the eddy-viscosity will match experimental data. To avoid this *ad hoc* modification, Durbin [2] introduces a velocity scale called $\overline{v^2}$ in order to naturally damp the eddy-viscosity $\nu_t = C_\mu \overline{v^2} T$, where T is the time scale (evaluated in a classical way as k/ε , but bounded by the Kolmogorov time scale to avoid singularities in the ε -equation; note the latter is not acting as a damping function, it's active only in the laminar sublayer, below $y^+ \leq 5$, where the molecular viscosity becomes dominant). An additional transport equation is solved for the velocity scale $\overline{v^2}$, directly derived from the equation of the Reynolds stress $\overline{v^2}$ in a channel. In order to preserve the non-local effect in this equation, the pressure term is modeled by $\phi_{22} = kf$, where f satisfies the following Yukawa equation:

$$f - L^2 \nabla^2 f = \frac{1}{k} \phi_{22}^h \quad (1)$$

In this equation, the slow and rapid part of the source term ϕ_{22}^h are respectively given by Rotta and IP models.

The dissipation in the transport equation for $\overline{v^2}$ is modeled by supposing that $\varepsilon_{22} - \varepsilon/k \overline{v^2}$ also follows an elliptic relaxation equation. The difference between ε_{22} and $\varepsilon/k \overline{v^2}$ has been included in the term kf and hence, the source term $1/k (\varepsilon/k \overline{v^2} - 2/3 \varepsilon)$ is added in equation (1). The total dissipation becomes isotropic far from the wall.

$$f - L^2 \nabla^2 f = \frac{1}{k} \left(\phi_{22}^h + \frac{\overline{v^2}}{k} \varepsilon - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \quad (2)$$

The use of the elliptic equation (2) allows the integration of the model down to solid boundaries, since $\overline{v^2}$ and the eddy-viscosity are correctly damped, when the appropriate boundary condition for f is provided (Durbin [2]):

$$f = -\frac{20 \nu^2 \overline{v^2}}{\varepsilon y^4} \quad (3)$$

The resulting model, called V2F, consist in the following equations:

- Equations:

$$D_t U = -\nabla p + \nabla \cdot \left((\nu + \nu_t)(\nabla U + \nabla^t U) \right) \quad (4)$$

$$D_t k = P - \varepsilon + \nabla \cdot \left((\nu + \nu_t) \nabla k \right) \quad (5)$$

$$D_t \varepsilon = \frac{C'_{\varepsilon_1} P - C_{\varepsilon_2} \varepsilon}{T} + \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) \quad (6)$$

$$D_t \overline{v^2} = k f - \frac{\overline{v^2}}{k} \varepsilon + \nabla \cdot \left((\nu + \nu_t) \nabla \overline{v^2} \right) \quad (7)$$

$$f - L^2 \nabla^2 f = (C_1 - 1) \frac{(2/3 - \overline{v^2}/k)}{T} + C_2 \frac{P}{k} \quad (8)$$

$$\nu_t = C_\mu \overline{v^2} T \quad ; \quad P = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} \quad (9)$$

- Length and time scales:

$$L = C_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon} ; C_\eta \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right) \quad ; \quad T = \max \left(\frac{k}{\varepsilon} ; 6 \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right) \quad (10)$$

- Coefficients: $C'_{\varepsilon_1} = 1.4 \left(1 + 0.045 \sqrt{k/\overline{v^2}} \right)$

$$C_\mu = 0.22 \quad ; \quad C_1 = 1.4 \quad ; \quad C_2 = 0.3 \quad ; \quad C_{\varepsilon_2} = 1.9 \quad ; \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad ; \quad C_L = 0.25 \quad ; \quad C_\eta = 85.0 \quad (11)$$

- Boundary conditions at walls:

$$U_i = 0 \quad ; \quad k = 0 \quad ; \quad \overline{v^2} = 0 \quad ; \quad \varepsilon = \frac{2\nu k}{y^2} \quad ; \quad f = -\frac{20 \nu^2 \overline{v^2}}{\varepsilon y^4} \quad (12)$$

This model was successfully tested in a lot of different situations:

- Flows with adverse pressure gradient: backward-facing step and Obi *et al.* separated diffuser [3];
- Flows around bluff bodies with deterministic unsteadiness: vortex shedding behind a triangular cylinder (flame holder) [3];
- 3-D boundary layers: wall-mounted swept bump at 45 degrees and square cross-section U-bend duct with strong curvature [4];
- 3-D flows with horse-shoe vortex: appendage-body junction [4];
- Aerodynamic flows: high-lift aerofoil and prolate spheroid [5];
- Impinging flow heat transfer: axisymmetric jet impinging on a flat plate [6] and on a heated pedestal [7].

The model proved to reproduce accurately the near-wall turbulence and appeared to be very efficient in predicting heat transfer. Therefore, it has been chosen to be used in the industrial code N3S, as presented in the next section. The last part of this work is concerned with the test of the model in a relevant case for turbine cooling, namely the periodic ribbed channel flow.

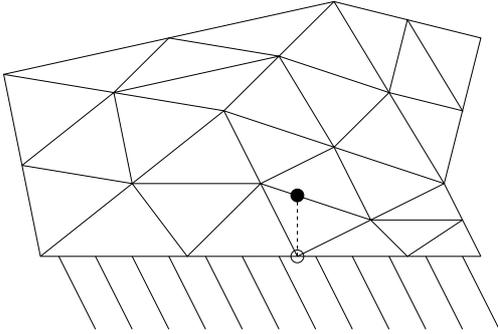


Figure 1. Evaluation of the limiting values involved in the boundary conditions (12) of ε and f .

- point where the BC is applied
- point where the limiting value is evaluated

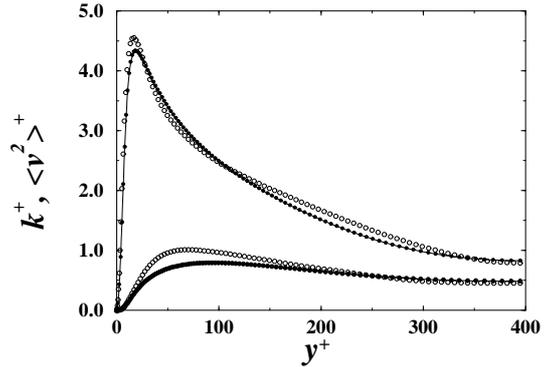


Figure 2. Validation of the implementation for a channel at $Re_\tau = 395$ [12].

- DNS
- 1D-code
- N3S

3. Implementation and validation

3.1. The N3S code

N3S is an industrial code developed by the LNH based on a finite element discretization. Elements are tetrahedra in 3-D cases and triangles in 2-D cases. The basis and test functions are the same (Galerkin method). The pressure is defined at the nodes of the element with a linear interpolation inside the element (P_1 interpolation). For all other variables, the element is divided into sub-elements by adding a node at the middle of each edge. Linear interpolation is used on each sub-element ($isoP_2$ interpolation).

Partial derivatives over time are kept in the transport equation. The time integration is performed by a fractional step method. First, all the variables excepting pressure and f are convected using the characteristic method: the characteristic is followed in upwind direction by a Runge-Kutta scheme, the convective velocity being taken at the previous time step. Thus, the LHS in (4)-(7) can be replaced by $(X^{n+1} - \bar{X}^n)/\Delta t$, where \bar{X}^n is the convected value of X^n .

A diffusion step for the scalar variables is then performed, i.e., equations (5)-(8) are solved. In order to impose the coupled boundary condition for ε and f (*cf.* §3.2), coupled systems are solved for k and ε in one hand, and for $\overline{v^2}$ and f in the other hand. Thus, in the $k - \varepsilon$ system, only the production, the time scale and the turbulent viscosity are explicit. In the $\overline{v^2} - f$ system, the transport equation for $\overline{v^2}$ is completely implicit and the RHS of the elliptic equation for f is explicit. The coupling comes from the implicitation of the boundary condition on f . The resolution of both systems is performed by a BICGSTAB algorithm [11].

Finally, the remaining generalized Stokes problem, i.e., the momentum equation coupled with the continuity equation, is solved by the iterative Uzawa algorithm.

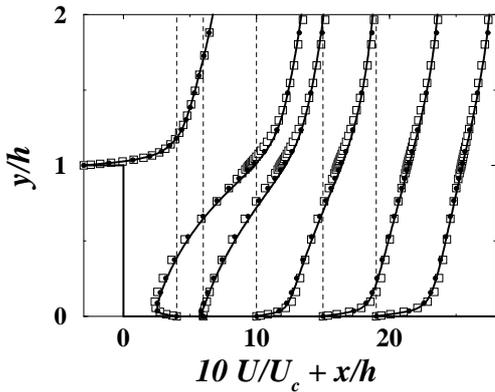


Figure 3. Validation test case: backward-facing step at $Re = 5, 100$.

- DNS [12]
- NASA code solution [3]
- N3S

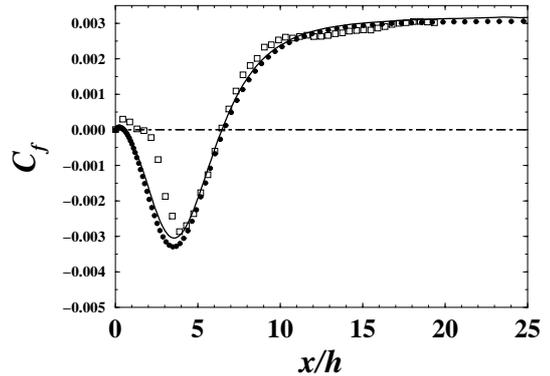


Figure 4. Backward-facing step at $Re = 5, 100$. Friction coefficient on the lower wall. See Fig. 3 for legend.

3.2. Boundary conditions

Boundary conditions in N3S are usually imposed by a projection method. In the particular case of the V2F model, those for ε and f involve respectively k and $\overline{v^2}$. Hence, they are directly included in the coupled systems $k - \varepsilon$ and $\overline{v^2} - f$.

To this day, the V2F model has only been implemented for structured meshes in finite difference or finite volume codes, and the limiting values k/y^2 and $\overline{v^2}/y^4$ entering the boundary conditions are then evaluated at the first point inside the domain. In finite elements with unstructured meshes, these limiting values were evaluated at the point where a side of an element is encountered while following the direction normal to the wall (Fig. 1), though it is a finite difference approximation.

3.3. Validation

3.3.1. Channel flow

As a first validation, the channel flow at $Re_\tau = 395$ was chosen in order to compare the solutions given by N3S and a 1D-finite difference code developed at the CTR. Results for k and $\overline{v^2}$, shown in Fig. 2, also compared with DNS data [12], are exactly the same for the two different codes; this validates the implementation and in particular the way the boundary conditions are imposed.

3.3.2. Backward-facing step

The second validation case is the 2-D backward-facing step at $Re = 5, 100$, for which DNS data are available, as well as a V2F solution from a NASA finite difference code [3]. Comparisons of mean streamwise velocity and friction coefficient between the latter and N3S solution are shown in Figs. 3 and 4. The solutions are very similar, which gives a high confidence in the V2F implementation in N3S. The backflow and the friction coefficient are very well predicted as found by Durbin [3]. This point will be crucial for the following heat transfer test case: the ability of the model to reproduce accurately the near-wall region allows the prediction of the right heat exchange between the wall and the flow.

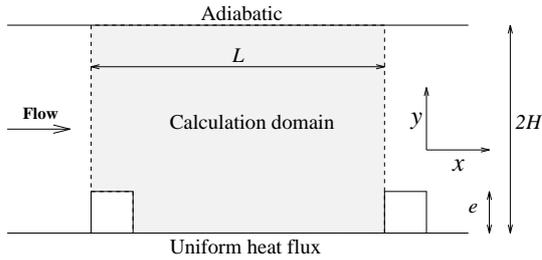


Figure 5. Geometry of the ribbed-channel test case ($2H=5e$; $L=7.2e$).

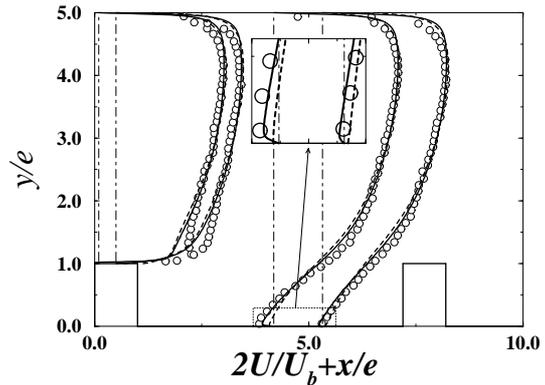


Figure 6. Mean streamwise velocity. Ribbed-channel flow at $Re_H = 37,200$.
 ○ Experiments (Drain & Martin [9])
 — V2F model
 - - - $k - \varepsilon$ model with wall functions

4. Test case: periodic ribbed-channel

4.1. Presentation of the test case

This 2-D test case was proposed for the 7th ERCOFTAC/IARH workshop [8]. A sketch of the channel is shown in Fig. 5. Two sets of experiments are available. In the first one, from Drain & Martin [9], velocity measurements were performed for the Reynolds number $Re_H = 37,200$, based on the bulk velocity U_b and the hydraulic diameter. The second one, from Liou *et al.* [10], contains only heat transfer data, without velocity measurements. The Reynolds number for the latter is $Re_H = 12,600$.

Thus, two different calculations have been performed. In both cases, the V2F model described in §2 is used. Periodic boundary conditions are applied at inlet and outlet, with a splitting of the pressure and, in the second case, of the temperature into linearly growing part and periodic part.

4.2. Case without heat transfer

Profiles of the streamwise velocity are shown in Fig. 6. The solution obtained with the standard $k - \varepsilon$ model with wall functions is plotted for comparison. The velocities are very similar for both models in the main part of the domain. The flow is indeed mainly determined by the geometry induced pressure field and the influence of the eddy-viscosity is significant only where the shear is important, near the walls and in the shear layer between the recirculation bubble and the rest of the flow. With both models, the velocity seems to be over-predicted near the upper-wall and under-predicted in the region between $y/e = 1$ and $y/e = 2$. Actually, all the results showed at the workshop by different teams using a number of different models presented the same feature. This might be interpreted as a 3-D effect in the experiment, creating contra-rotating eddies in $y - z$ plane. These eddies diverge near the upper-wall, adding a “loss” of fluid in this area and by continuity a deceleration, and an acceleration where they converge.

Streamlines are shown in Fig. 7. Two different recirculation zones exist between consecutive ribs. In the solution given by the V2F model, the two bubbles merge. Experimental

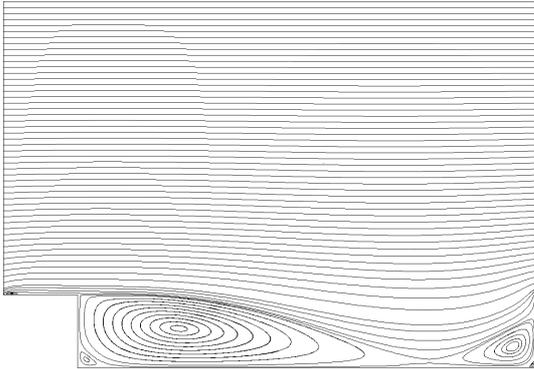


Figure 7. Streamlines obtained with the V2F model. Ribbed-channel flow at $Re_H = 37,200$.

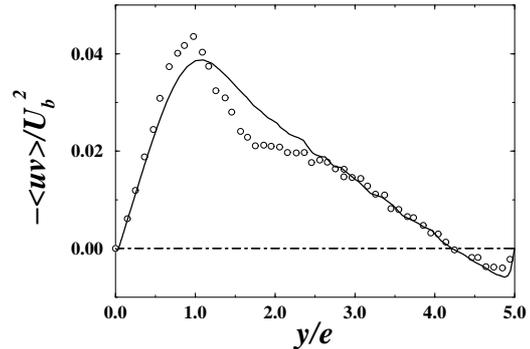


Figure 8. Shear stress given by the Boussinesq equation at $x/e = 4.18$. Ribbed-channel flow at $Re_H = 37,200$.

○ Experiments (Drain & Martin [9])
 — V2F model

data are too scarce to confirm this feature, but it was also exhibited in a Large Eddy Simulation performed at the LNH [8]. Anyway, Fig. 6 shows that the $k - \varepsilon$ model predicts a too early reattachment before the location $x/e = 5.32$, where some back-flow still appears in the experiment. The V2F model reproduces quite well the intensity of the back-flow, even if it is slightly under-predicted at $x/e = 4.18$ and over-predicted at $x/e = 5.32$. However, the solution is globally qualitatively and quantitatively correct. Actually, reproducing the mean flow is not the most difficult task; indeed, the flow is mainly driven by the geometry induced pressure field. The challenge in this case concerns the level of turbulence and the shear stress near the lower wall, on which will depend heat transfer predictions.

Unfortunately, the experimental database [9] only contains data for the Reynolds stresses $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ and \overline{uv} . Since the V2F model is an eddy viscosity model, it does not provide directly the Reynolds stresses. However, they can be calculated by using the Boussinesq equation $\overline{u_i u_j} = -\nu_t (\partial U_j / \partial x_i + \partial U_i / \partial x_j) + 2/3 k \delta_{ij}$. Figs. 8 and 9 show comparisons between the experimental Reynolds stresses and those reconstructed by using the Boussinesq equation. The shear stress is very well reproduced, except between $y/e = 1$ and $y/e = 2$, where a slight disagreement with the experiment exists. However, the anisotropy is very badly predicted, the diagonal component $\overline{u^2}$ and $\overline{v^2}$ being almost equal everywhere, which shows that the Boussinesq approximation is not valid in this case for these components; if these have to be modeled, Reynolds-stress or non-linear eddy-viscosity models would be needed [5]. The velocity scale $\overline{v^2}$ given by the transport equation (7) has been plotted in Fig. 9, though it can only be regarded as the component of the Reynolds stress tensor normal to the wall in the particular case of the simple channel flow. For instance, it is close to the experimental profile in the upper part of the ribbed-channel, where the flow is very similar to a non-ribbed-channel flow. In the recirculation bubble, the two quantities cannot be rigorously compared. But results show that $\overline{v^2}$ is a much better scaling parameter than $2/3 k$.

Thus, even if no conclusions can be drawn concerning the level of turbulent energy because of the lack of experimental data ($\overline{w^2}$ has not been measured), the correct pre-

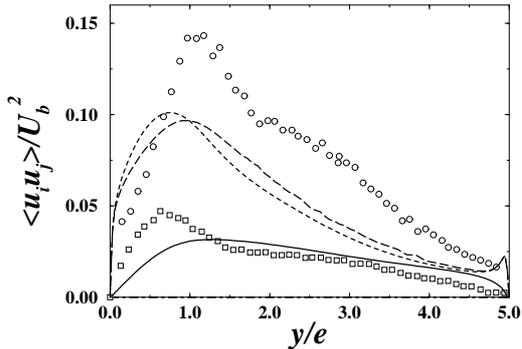


Figure 9. Diagonal Reynolds stresses at $x/e = 4.18$. Ribbed-channel flow at $Re_H = 37,200$.

- Exp. $\overline{u^2}$ from Drain & Martin [9]
- Exp. $\overline{v^2}$ from Drain & Martin [9]
- $\overline{u^2}$ from the Boussinesq equation
- · - · - $\overline{v^2}$ from the Boussinesq equation
- $\overline{v^2}$ from the model

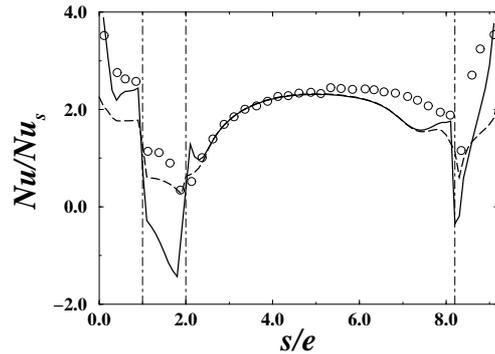


Figure 10. Heat transfer enhancement. Ribbed-channel flow at $Re_H = 12,600$. s is the curvilinear coordinate, $s = 0$ corresponding to the upstream protruding corner of the rib.

- Experiment from Liou *et al.* [10]
- Computation with resolution of the conduction equation in the rib
- Computation with imposed flux on the rib walls

diction of the shear stress is encouraging for the computation of the heat transfer case, since a turbulent diffusivity hypothesis will be used: the shear stress is the predominant turbulent term in the mean flow equations.

4.3. Heat transfer case

The experiments for this case were performed at $Re_H = 12,600$. Only the Nusselt number is available. It is defined by $Nu = \dot{q}_w D_e / (k_f (T_w - T_b))$, where \dot{q}_w is the local wall surface heat flux, D_e the hydraulic diameter, k_f the conductivity of the fluid, T_w the wall temperature and T_b the bulk temperature. The latter is defined as:

$$T_b = \int_0^{2H} T |U| y dy / \int_0^{2H} |U| y dy \quad (13)$$

The Nusselt number is normalised by the Nusselt number Nu_s for fully turbulent flows in smooth circular tubes, given by the Dittus-Boelter correlation $Nu_s = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}$. The ratio Nu/Nu_s characterizes the heat transfer enhancement due to the presence of the ribs.

In the experiment, an uniform heat flux is imposed on the lower wall as shown in Fig. 5. However, it is not clear in [10] how the Nusselt number given in the database is calculated on the rib walls. The heat flux is probably considered as a constant which value is one third of the imposed heat flux. Thus, for the computations, two different boundary conditions for the energy equation have been used. In both cases, an uniform heat flux \dot{q} is imposed on the lower wall between consecutive ribs. In the first one, the uniform heat flux $\dot{q}/3$ is imposed on the walls of the rib as well, whereas in the second one, the heat flux \dot{q} is imposed on the channel wall and the conduction equation is solved in the rib, using the SYRTHES tool developed at the LNH to couple solid and fluid heat

transfer computations.

The turbulent fluxes are modeled by a turbulent diffusivity hypothesis:

$$\overline{u_i \theta} = -\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (14)$$

with the turbulent Prandtl number given by the Kays & Crawford [13] correlation

$$\sigma_t = \frac{1}{0.5882 + 0.228(\nu_t/\nu) - 0.0441(\nu_t/\nu)^2 [1 - \exp(-5.165/(\nu_t/\nu))]} \quad (15)$$

Results are shown in Fig. 10. The Nusselt numbers obtained using different boundary conditions are almost exactly the same on the lower wall. They are different only on the rib walls and very close to its lower corners. Since the way the experimental Nusselt number has been calculated on the rib walls is not clear, only the results on the lower wall of the channel are relevant. It is even so interesting to notice that for the coupled resolution, the heat flux through the downstream wall of the rib is negative. This phenomenon is due to the fact that the upstream upper corner is cooled by the flow, whereas the very low velocity just downstream of the rib leads to a heat accumulation. Therefore, the heat is conducted through the rib from the downstream lower corner up to the upstream upper corner.

The results on the lower wall of the channel are excellent in the first half of the wall between two ribs, whereas in the second half, the Nusselt number is slightly under-predicted. However the results are very close to the experiment. This is a confirmation that the V2F is a very efficient and predictive model for heat transfer problems.

5. Conclusion

This paper has presented the application of the elliptic relaxation approach to the eddy-viscosity concept, leading to the V2F model. The main contribution of this work has been to test the possibility to implement this model in a finite element code in an industrial context. The most questionable point was the use of a finite difference approximation to handle the coupled boundary conditions. This approach has been found to be totally successful and validated for the channel flow at $Re_\tau = 395$ and the backward-facing step at $Re = 5,100$.

The model has been applied to the 2-D test case of the periodic ribbed-channel at $Re = 37,200$ without heat transfer and at $Re = 12,600$ with heat transfer. In both cases, the results are excellent, especially in the second case concerning the Nusselt number prediction.

In the context of nuclear engineering, the success of the implementation of the V2F model in a finite element code, allowing computations of complex geometries with unstructured meshes, and its ability to predict correctly the Nusselt number, is an important result. Heat transfer is indeed one of the most important phenomenon to take into account in nuclear power stations and the V2F model emerges as a very good compromise between the simplicity imposed by the cost limitation and the accuracy needed to reproduce the physics.

REFERENCES

1. Jones, W. P., Launder, B. E., *The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence*, Int. J. Heat Mass Transfer, **15**, 301-314, 1972
2. Durbin, P. A., *Near-Wall Turbulence Closure Modeling Without "Damping Functions"*, Theoret. Comput. Fluid Dynamics, **3**, 1-13, 1991
3. Durbin, P. A., *Separated Flow Computations with the $k-\varepsilon-v^2$ Model*, AIAA Journal, **33**, 659-664, 1995
4. Parneix, S., Durbin, P. A., *Computation of 3-D turbulent boundary layers using V2F model*, Flow, Turb. and Comb. J., **60-1**, 19-46, 1998
5. Lien, F.-S., Durbin, P. A., Parneix, S., *Non-linear $\overline{v^2}-f$ modelling with application to aerodynamic flows*, Eleventh symposium on turbulent shear flows, Grenoble, France, **6**, 19-24, September 8-10, 1997
6. Behnia, M., Parneix, S., Durbin, P., *Prediction of heat transfer in a jet impinging on a flat plate*, Int. J. Heat Mass Transfer, **41**, 1845-1855, 1998
7. Parneix, S., Behnia, M., Durbin, P., *Predictions of turbulent heat transfer in an axisymmetric jet impinging on a heated pedestal*, to be published in J. Heat Transfer, 1999
8. *Proceedings of the 7th ERCOFTAC/IARH workshop on refined turbulence modelling*, UMIST, Manchester, UK, 28/29th may 1998
9. Drain, L. E., Martin, S., *Two-component velocity measurements of turbulent flow in a ribbed-wall flow channel*, Int. Conf. on Laser Anemometry-Advances and Applications, Manchester, UK, 99-112, 1985
10. Liou, T.-M., Hwang, J.-J., Chen, S.-H., *Simulation and measurement of enhanced turbulent heat transfer in a channel with periodic ribs on one principal wall*, Int. J. Heat Mass Transfer, **36-2**, 507-517, 1993
11. Van der Vorst, H.A., *BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. **13**, 631-644, 1992
12. Center for Turbulence Research database, Stanford University
13. Kays, W. M., Crawford, M. E., *Convective heat and mass transfer*. Third Edition, McGraw-Hill, 1993

Bibliographie

- [1] R. S. Amano et P. Goel. A numerical study of a separating and reattaching flow by using Reynolds-stress turbulence closure. *Num. Heat Transfer*, vol. 7, p. 343–357, 1984.
- [2] R. A. Antonia et J. Kim. Low-Reynolds-number effects on near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 276, p. 61–80, 1994.
- [3] F. Archambeau. Le $R_{ij}-\varepsilon$ dans N3S 3.3.0. Rapport HE-41/97/007/A, Électricité de France, 1997.
- [4] D. Aronson, A. V. Johansson et L. Löfdahl. Shear-free turbulence near a wall. *J. Fluid Mech.*, vol. 338, p. 363–385, 1997.
- [5] W. Bauer, O. Haag et D. K. Hennecke. Accuracy and robustness of non-linear eddy viscosity models. In : *Proc. Fourth Symp. Turb. Modelling and Measurements, Ajaccio, Corsica, France*, 2, pages 113–122, 1999.
- [6] M. Behnia, S. Parneix et P. Durbin. Prediction of heat transfer in a jet impinging on a flat plate. *Intl J. Heat Mass Transfer*, vol. 41, n° 12, p. 1845–1855, 1998.
- [7] S. E. Belcher et P. A. Durbin. A second-order closure study of rotating channel flow without the use of ‘damping functions’. CTR Manuscript 134, Center for Turbulence Research, Stanford University, 1992.
- [8] P. Bergé. *Le chaos, théorie et expérience*. Eyrolles, 1988.
- [9] P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal. *L’ordre dans le chaos*. Hermann, Paris, 1984.
- [10] R. Boudjemadi. Simulation directe et modélisation de la convection naturelle turbulente dans un canal différentiellement chauffé. Thèse de doctorat, rapport HE-41/96/014/A, Électricité de France, 1996.
- [11] P. Bradshaw, N. N. Mansour et U. Piomelli. On local approximations of the pressure-strain term in turbulence models. In : *Proc. of the Summer Program*, pages 159–164. Center for Turbulence Research, Stanford University, 1987.
- [12] J. P. Chabard. Projet N3S de mécanique des fluides. Manuel théorique de la version 3. Rapport HE41/91.30/B, Électricité de France, 1991.

-
- [13] K.-Y. Chien. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model. *AIAA J.*, vol. 20, n° 1, p. 33–38, 1982.
- [14] C. C. Chieng et B. E. Launder. On the calculation of turbulent transport downstream from an abrupt pipe expansion. *Num. Heat transfer*, vol. 3, p. 189–207, 1980.
- [15] P. Y. Chou. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quart. of Appl. Math.*, vol. 3, p. 38–54, 1945.
- [16] P. Y. Chou. Pressure flow of a turbulent fluid between two parallel infinite planes. *Quart. of Appl. Math.*, vol. 3, p. 198–209, 1945.
- [17] G. Comte-Bellot et S. Corrsin. The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 25, p. 657–682, 1966.
- [18] D. Cooper, D. C. Jackson, B. E. Launder et G. X. Liao. Impinging jet studies for turbulence model assessment—I. Flow-field experiments. *Intl J. Heat Mass Transfer*, vol. 36, n° 10, p. 2675–2684, 1993.
- [19] E. R. Corino et R. S. Brodkey. A visual investigation of the wall region in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 37, p. 1–30, 1969.
- [20] T. J. Craft. Computations of separating and reattaching flows using a low-Reynolds-number second-moment closure, 1997.
- [21] T. J. Craft, L. J. W. Graham et B. E. Launder. Impinging jet studies for turbulence model assessment—II. An examination of the performance of four turbulence models. *Intl J. Heat Mass Transfer*, vol. 36, n° 10, p. 2685–2697, 1993.
- [22] T. J. Craft, J. W. Kidger et B. E. Launder. Three dimensional modelling of turbulent free-surface jets. In: *Proc. of the Fourth Intl Symp. Engng. Turb. Modelling and Measurements, Ajaccio, Corsica, France*, pages 73–82, 1999.
- [23] T. J. Craft et B. E. Launder. Computation of impinging flows using second-moment closures. In: *Proc. Eighth Symp. Turb. Shear Flows*, 8, pages 1–6, 1991.
- [24] T. J. Craft et B. E. Launder. Improvements in near-wall Reynolds stress modelling for complex flow geometries. In: *Proc. Tenth Symp. Turb. Shear Flows, Pennsylvania State Univ., USA*, 20, pages 25–30, 1995.
- [25] T. J. Craft et B. E. Launder. A Reynolds stress closure designed for complex geometries. *Intl J. Heat and Fluid Flow*, vol. 17, n° 3, p. 245–254, 1996.
- [26] T. J. Craft, B. E. Launder et K. Suga. A non-linear eddy viscosity model including sensitivity to stress anisotropy. In: *Proc. Tenth Symp. Turb. Shear Flows, Pennsylvania State Univ., USA*, 23, pages 19–24, 1995.

-
- [27] T. J. Craft, B. E. Launder et K. Suga. Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence. *Intl J. Heat and Fluid Flow*, vol. 17, n° 2, p. 108–115, 1996.
- [28] B. J. Daly et F. H. Harlow. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, vol. 13, p. 2634–2649, 1970.
- [29] J.-S. Darrozes et C. Francois. *Mécanique des fluides incompressibles*. École Nationale Supérieure de Techniques Avancées.
- [30] R. Dautray et J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Tome 2: L'opérateur de Laplace*. Collection enseignement – INSTN CEA. Masson, 1987.
- [31] A. O. Demuren, M. M. Rogers, P. Durbin et S. K. Lele. On modeling pressure diffusion in non-homogeneous shear flows. In: *Proc. of the Summer Program*, pages 63–72. Center for Turbulence Research, Stanford University, 1996.
- [32] A. O. Demuren et R. V. Wilson. On elliptic relaxation near wall models. In: *Proc. of the ICASE/LaRC Workshop on Turb. Transition and Comb.*, 2, pages 61–71, 1994.
- [33] L. E. Drain et S. Martin. Two-component velocity measurements of turbulent flow in a ribbed-wall flow channel. In: *Intl Conf. Laser Anemometry-Advances and Applications*, pages 99–112, 1985.
- [34] R. du Vachat. Realizability inequalities in turbulent flows. *Phys. Fluids*, vol. 20, n° 4, p. 551–556, 1977.
- [35] P. A. Durbin. Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, vol. 3, p. 1–13, 1991.
- [36] P. A. Durbin. Reynolds stress closure modeling in wall-bounded flows. In: *Ann. Res. Briefs*, pages 185–197. Center for Turbulence Research, Stanford University, 1992.
- [37] P. A. Durbin. On modeling three-dimensional turbulent wall layers. *Phys. Fluids*, vol. A5, n° 5, p. 1231–1238, 1993.
- [38] P. A. Durbin. A Reynolds stress model for near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 249, p. 465–498, 1993.
- [39] P. A. Durbin. Separated flow computations with the $k-\varepsilon-\overline{v^2}$ model. *AIAA J.*, vol. 33, p. 659–664, 1995.
- [40] P. A. Durbin. On the $k-3$ stagnation point anomaly. *Intl J. Heat and Fluid Flow*, vol. 17, n° 1, p. 89–90, 1996.

-
- [41] P. A. Durbin et D. Laurence. Nonlocal effects in single point closure. In : *Proc. Turb Res. Associates 96 meeting, Seoul, Korea*, 1996.
- [42] R. E. Falco. The production of turbulence near a wall. AIAA paper 80-1356, 1980.
- [43] J. H. Ferziger. Introduction to the modeling of turbulence. Introduction to the physics and simulation of turbulence. Lecture Series 97-03, Von Kármán institute, 1997.
- [44] W. K. George et S. P. Capp. A theory for natural convection turbulent boundary layers next to heated vertical surfaces. *Intl J. Heat Mass Transfer*, vol. 22, p. 813–826, 1979.
- [45] M. M. Gibson et B. E. Launder. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.*, vol. 86, n° 3, p. 491–511, 1978.
- [46] K. Hanjalić. Advanced turbulence closure models: a view of current status and future prospects. *Intl J. Heat and Fluid Flows*, vol. 15, n° 3, p. 178–203, 1994.
- [47] K. Hanjalić et B. E. Launder. Fully developed asymmetric flow in a plane channel. *J. Fluid Mech.*, vol. 51, n° 2, p. 301–335, 1972.
- [48] K. Hanjalić et B. E. Launder. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, vol. 52, p. 609–638, 1972.
- [49] K. Hanjalić et B. E. Launder. Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 74, n° 4, p. 593–610, 1976.
- [50] G. H. Hoffmann. Improved form of the low-Reynolds number $k-\varepsilon$ turbulence model. *Phys. Fluids*, vol. 18, p. 309–312, 1975.
- [51] J. C. R. Hunt. Turbulence structure in thermal convection and shear-free boundary layers. *J. Fluid Mech.*, vol. 138, p. 161–184, 1984.
- [52] J. C. R. Hunt et J. M. R. Graham. Free-stream turbulence near plane boundaries. *J. Fluid Mech.*, vol. 84, n° 2, p. 209–235, 1978.
- [53] H. J. Hussein et R. J. Martinuzzi. Energy balance for turbulent flow around a surface mounted cube placed in a channel. *Phys. Fluids*, vol. 8, n° 3, p. 764–780, 1996.
- [54] C. B. Hwang et C. A. Lin. Proposal of a low-Reynolds-number two-equation model to predict dynamic and thermal field. In : *Proc. Eleventh Symp. on Turb. Shear Flows, Grenoble, France*, P2, pages 95–100, 1997.
- [55] A. V. Johansson et P. H. Alfredsson. On the structure of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 122, p. 295–314, 1982.

-
- [56] W. P. Jones. Introduction to the modeling of turbulence. Turbulence modeling. Lectures series 97-03, Von Kármán institute, 1997.
- [57] W. P. Jones et B. E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Intl J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, p. 301–314, 1972.
- [58] N. Kasagi et N. Shikazono. Contribution of direct numerical simulation to understanding and modeling turbulent transport. *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. A, n° 451, p. 257–292, 1995.
- [59] W. M. Kays et M. E. Crawford. *Convective heat and mass transfer*. Third Edition, Mc Graw-Hill, New-York, 1993.
- [60] W. Kebede, B. E. Launder et B. A. Younis. Large amplitude periodic pipe flow: a second-moment closure study. In: *Proc. Fifth Symp. Turb. Shear Flows, Cornell Univ., Ithaca, New-York, USA*, 16, pages 23–29, 1985.
- [61] H. T. Kim, S. K. Kline et W. C. Reynolds. The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, vol. 50, p. 133–160, 1971.
- [62] J. Kim. On the structure of wall-bounded turbulent flows. *Phys. Fluids*, vol. 26, n° 8, p. 2088–2097, 1983.
- [63] J. Kim. Turbulent structures associated with the bursting event. *Phys. Fluids*, vol. 28, p. 52–58, 1985.
- [64] J. Kim. On the structure of pressure fluctuations in simulated turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 205, p. 421–451, 1989.
- [65] J. Kim et P. Moin. The structure of the vorticity field in turbulent channel flow. Part 2. Study of ensemble-averaged fields. *J. Fluid Mech.*, vol. 162, p. 339–363, 1986.
- [66] J. Kim, P. Moin et R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, vol. 177, p. 133–166, 1987.
- [67] J. Kim et R. Spalart. Scaling of the bursting frequency in turbulent boundary layers at low Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, vol. 30, p. 3326–3328, 1987.
- [68] S. J. Kline, W. C. Reynolds, F. A. Schraub et P. W. Runstadler. The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, vol. 30, p. 741–773, 1967.
- [69] S. H. Ko. Application of a Reynolds stress model to separating boundary layers. In: *Ann. Res. Briefs*, pages 199–211. Center for Turbulence Research, Stanford University, 1992.

- [70] S. H. Ko. Computation of turbulent flows over backward and forward-facing steps using a near-wall Reynolds stress model. In: *Ann. Res. Briefs*, pages 75–90. Center for Turbulence Research, Stanford University, 1993.
- [71] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk.*, URSS, vol. 30, p. 299–303, 1941.
- [72] S. Komori, Y. Murakami et H. Ueda. Detection of coherent structures associated with bursting events in an open-channel flow by a two-point measuring technique using two laser-doppler velocimeters. *Phys. Fluids*, vol. A1, p. 339–348, 1989.
- [73] Y. G. Lai et R. M. C. So. On near-wall turbulent flow modelling. *J. Fluid Mech.*, vol. 221, p. 641–673, 1990.
- [74] C. K. G. Lam et K. Bremhorst. A modified form of the k - ε model for predicting wall turbulence. *J. Fluids Engng.*, vol. 103, p. 456–460, 1981.
- [75] L. D. Landau. On the problem of turbulence. *C. R. Acad. Sci.*, URSS, vol. 44, p. 311, 1944.
- [76] B. E. Launder. Numerical computation of convective heat transfer in complex turbulent flows: time to abandon wall functions? *Intl J. Heat Mass Transfer*, vol. 27, n° 9, p. 1485–1491, 1984.
- [77] B. E. Launder. Low-Reynolds-number turbulence near walls. Rapport TDF/86/4, Dept Mech. Engng., University of Manchester, 1986.
- [78] B. E. Launder. On the computation of convective heat transfer in complex turbulent flows. *J. Heat Transfer*, vol. 110, p. 1112–1128, 1988.
- [79] B. E. Launder. Second-moment closure: present... and future? *Intl J. Heat and Fluid Flow*, vol. 10, n° 4, p. 282–300, 1989.
- [80] B. E. Launder et S.-P. Li. On the elimination of wall-topography parameters from second-moment closure. *Phys. Fluids*, vol. 6, n° 2, p. 999–1006, 1994.
- [81] B. E. Launder, G. J. Reece et W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, vol. 68, n° 3, p. 537–566, 1975.
- [82] B. E. Launder et W. C. Reynolds. Asymptotic near-wall stress dissipation rates in a turbulent flow. *Phys. Fluids*, vol. 26, n° 5, p. 1157–1158, 1983.
- [83] B. E. Launder et B. I. Sharma. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, vol. 1, p. 131–138, 1974.

-
- [84] B. E. Launder et N. Shima. Second-moment closure for the near-wall sublayer: Development and application. *AIAA J.*, vol. 27, p. 1319–1325, 1989.
- [85] B. E. Launder et D. P. Tselepidakis. Contribution to the second-moment modeling of sublayer turbulent transport. *Zaric Memorial Intl Seminar on Near-Wall Turb., Dubrovnik, Yougoslavie*, pages 16–20, 1988.
- [86] B. E. Launder et D. P. Tselepidakis. Directions in second-moment modelling of near-wall turbulence. In: *29th Aerospace Sciences Meeting*, AIAA 91–0219, pages 1–10, 1991.
- [87] D. Laurence. Cours Von Kármán institute: « Introduction to turbulence modeling: Applications of RANSE models ». Rapport HE–41/97/015/A, Électricité de France, 1997.
- [88] D. Laurence. Modélisation statistique de la turbulence incompressible. École de printemps de mécanique des fluides numériques, GDR/MFN, 1997.
- [89] D. Laurence et P. Durbin. Modeling near wall effects in second moment closures by elliptic relaxation. In: *Proc. of the Summer program*, pages 1–16. Center for Turbulence Research, Stanford University, 1994.
- [90] D. Laurence et P. A. Durbin. Modeling near-wall effects in second moment closures by elliptic relaxation. In: *Proc. Tenth Symp. Turb. Shear Flows, Pennsylvania State Univ., USA*, 1995.
- [91] D. Laurence et O. Simonin. Numerical implementation of second moment closures and application to turbulent jets. Rapport 94NB00069, Électricité de France, 1994.
- [92] H. Le, P. Moin et J. Kim. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. In: *Proc. Ninth Symp. Turb. Shear Flows, Kyoto, Japan*, 13–2, pages 1–6, 1993.
- [93] F.-S. Lien, P. A. Durbin et S. Parneix. Non-linear $\overline{v^2}$ - f modelling with application to aerodynamic flows. In: *Proc. Eleventh Symp. Turb. Shear Flows, Grenoble, France*, 6, pages 19–24, 1997.
- [94] T.-M. Liou, J.-J. Hwang et S.-H. Chen. Simulation and measurement of enhanced turbulent heat transfer in a channel with periodic ribs on one principal wall. *Intl J. Heat Mass Transfer*, vol. 36, p. 507–517, 1993.
- [95] J. L. Lumley. *Stochastic tools in turbulence*. Academic Press, 1970.
- [96] J. L. Lumley. Pressure-strain correlation. *Phys. Fluids*, vol. 18, n° 6, p. 750, 1975.

- [97] J. L. Lumley. Computational modeling of turbulent flows. In : *Advances in Applied Mechanics*, volume 18, pages 123–175. Academic Press, 1978.
- [98] J. L. Lumley. Turbulence modeling. *J. Appl. Mech.*, vol. 50, p. 1097–1103, 1983.
- [99] J. L. Lumley et G. R. Newman. The return to isotropy of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 82, n° 1, p. 161–178, 1977.
- [100] S. L. Lyons, T. J. Hanratty et J. B. McLaughlin. Turbulence-producing eddies in the viscous wall region. *AIChE J.*, vol. 35, p. 1962–1974, 1989.
- [101] J. Magnaudet. The modelling of inhomogeneous turbulence in the absence of mean velocity gradient. In : *Proc. Fourth Eur. Turb. Conf.*, 1992.
- [102] R. Manceau. Modélisation de la turbulence sur maillages non-structurés, rapport d'activité de 1^{re} année de thèse. Rapport HE-41/97/062, Électricité de France, 1997.
- [103] P. Manneville. *Structures dissipatives, chaos et turbulence*. Aléa Saclay, 1991.
- [104] N. N. Mansour, J. Kim et P. Moin. Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 194, p. 15–44, 1988.
- [105] G. L. Mellor et H. J. Herring. A survey of the mean turbulent field closure models. *AIAA J.*, vol. 11, n° 5, p. 590, 1973.
- [106] C. M. Millikan. A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes. In : *Proc. Fifth Intl Congress Appl. Mech.*, pages 386–392, 1938.
- [107] B. Mohammadi et O. Pironneau. On wall laws in CFD.
- [108] P. Moin et J. Kim. The structure of the vorticity field in turbulent channel flow. Part 1. Analysis of instantaneous fields and statistical correlations. *J. Fluid Mech.*, vol. 155, p. 441–464, 1985.
- [109] A. S. Monin et A. M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics*. MIT Press, 1975. Traduction anglaise de la version russe originale de 1965.
- [110] R. D. Moser, J. Kim et N. N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, vol. 11, n° 4, p. 943–945, 1999.
- [111] Y. Nagano et M. Hishida. Improved form of the k - ε model for wall turbulent shear flows. *J. Fluid Engng.*, vol. 109, p. 156–160, 1987.
- [112] D. Naot, A. Shavit et M. Wolfshtein. Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses. *Phys. Fluids*, vol. 16, p. 738–743, 1973.
- [113] D. Naot, A. Shavit et M. Wolfshtein. Numerical calculation of Reynolds stresses in a square duct with secondary flow. *Wärme- und Stoffübertragung*, vol. 7, p. 151–161, 1974.

-
- [114] V.-T. NGuyen. *Contributions à l'étude de la structure de la turbulence près d'une paroi lisse*. PhD thesis, université Paris VI, 1987.
- [115] M. Oberlack. Non-isotropic dissipation in non-homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 350, p. 351–374, 1997.
- [116] S. A. Orzag et L. C. Kells. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 96, p. 159–205, 1980.
- [117] S. Parneix, M. Behnia et P. A. Durbin. Predictions of turbulent heat transfer in an axisymmetric jet impinging on a heated pedestal. *J. Heat Transfer*, vol. 120, p. 1–7, 1998.
- [118] S. Parneix et P. Durbin. A new methodology for turbulence modelers using DNS database analysis. In: *Ann. Res. Briefs*, pages 17–30. Center for Turbulence Research, Stanford University, 1996.
- [119] S. Parneix, P. A. Durbin et M. Behnia. Computation of 3D turbulent boundary layers using the $\overline{v^2}$ - f model. *Flow, Turb. and Comb.*, vol. 60, p. 19–46, 1998.
- [120] S. Parneix, D. Laurence et P. A. Durbin. Second moment closure analysis of the backstep flow database. In: *Proc. of the Summer Program*, pages 47–62. Center for Turbulence Research, Stanford University, 1996.
- [121] S. Parneix, D. Laurence et P. A. Durbin. A procedure for using DNS databases. *J. Fluid Engng.*, vol. 120, p. 40–47, 1998.
- [122] S. V. Patankar et D. B. Spalding. *Heat and Mass transfer in Boundary Layers*. Morgan Grampian, 1967.
- [123] V. C. Patel, W. Rodi et G. Scheuerer. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: a review. *AIAA J.*, vol. 23, n° 9, p. 1308–1318, 1985.
- [124] J. B. Perot et P. Moin. Shear-free turbulent boundary layers: physics and modeling. Rapport technique, Dept Mech. Engng., Stanford University, 1993.
- [125] L. Prandtl. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. *Nachr. Akad. Wiss., Allemagne*, page 16, 1945.
- [126] M. Prud'homme et S. Elghobashi. Prediction of wall-bounded turbulent flows with an improved version of a Reynolds-stress model. In: *Proc. Fourth Symp. Turb. Shear Flows, Karlsruhe, Germany*, 1, pages 7–12, 1983.
- [127] M. Prud'homme et S. Elghobashi. Turbulent heat transfer near the reattachment of flow downstream of a sudden pipe expansion. *Num. Heat Transfer*, vol. 10, p. 349–368, 1986.

- [128] N.-E. Rharif. *Fermeture au second ordre de la turbulence : modèle réalisable anisotherme appliqué à un jet impactant une paroi et mise en œuvre en éléments finis*. PhD thesis, École centrale de Lyon, 1995.
- [129] P. Rollet-Miet, D. Laurence et J. Ferziger. LES and RANS of turbulent flow in tube bundles. *Intl J. Heat and Fluid Flow*, vol. 20, n° 3, p. 241–254, 1999.
- [130] M. Rosenfeld, J. Cohen et V. Levinski. The effect of rotation on the growth of hairpin vortices in shear flows. Numerical simulations. In : *Proc. First Intl Symp. Turb. Shear Flow Phenomena, Santa Barbara, California, USA*, 2, pages 21–26, 1999.
- [131] J. C. Rotta. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Zeitschrift für Physik*, vol. 129, p. 547–572, 1951.
- [132] D. Ruelle et F. Takens. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.*, vol. 20, p. 167, 1971.
- [133] J. Sabot. *Étude de la cohérence spatiale et temporelle de la turbulence établie en conduite circulaire*. PhD thesis, université de Lyon, 1976.
- [134] R. Schiestel. Les écoulements turbulents, modélisation et simulation. 2^e édition revue et augmentée. *Hermès, Paris*, 1998.
- [135] U. Schumann. Realizability of Reynolds-stress turbulence models. *Phys. Fluids*, vol. 20, n° 5, p. 721–725, 1977.
- [136] T.-H. Shih et J. L. Lumley. Modelling of pressure correlation terms in Reynolds stress and scalar flux equations. Rapport FDA-85-3, Sibley School of Mech. and Aerospace Engng., Cornell University, Ithaca, NY, 1985.
- [137] T.-H. Shih, N. N. Mansour et J. Y. Chen. In : *Proc. of the Summer Program*. Center for Turbulence Research, Stanford University, 1987.
- [138] T.-H. Shih, J. Zhu et J. L. Lumley. A realizable Reynolds stress algebraic equation model. Techn. memorandum 105993, NASA, 1993.
- [139] N. Shikazono et N. Kasagi. Second-moment closure for low Reynolds number sheared turbulence and its application to stably-stratified flows. *Intl J. Heat and Fluid Flow*, 1995.
- [140] N. Shima. A Reynolds-stress model for near-wall and low-Reynolds-number regions. *J. Fluids Engng.*, vol. 110, p. 38–44, 1988.
- [141] C. C. Shir. A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, vol. 30, p. 1327–1339, 1973.
- [142] R. M. C. So et G. J. Yoo. Low Reynolds number modeling of turbulent flows with and without wall transpiration. *AIAA J.*, vol. 25, n° 12, p. 1556–1564, 1987.

-
- [143] R. M. C. So, H. S. Zhang et C. G. Speziale. Near-wall modeling of the dissipation rate equation. *AIAA J.*, vol. 29, p. 2069–2076, 1991.
- [144] P. R. Spalart. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $R_\theta = 1410$. *J. Fluid Mech.*, vol. 187, p. 61–98, 1988.
- [145] C. G. Speziale. Modeling the pressure gradient-velocity correlation of turbulence. *Phys. Fluids*, vol. 28, n° 1, p. 69–71, 1985.
- [146] C. G. Speziale. A review of Reynolds stress models for turbulent shear flows. Rapport 95-15, ICASE, NASA, 1995.
- [147] C. G. Speziale et T. B. Gatski. Analysis and modelling of anisotropies in the dissipation rate of turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 344, p. 155–180, 1997.
- [148] C. G. Speziale, S. Sarkar et T. B. Gatski. Modeling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical system approach. *J. Fluid Mech.*, vol. 227, p. 245–272, 1991.
- [149] Technical University of Delft. *Proc. Sixth ERCOFTAC/IAHR/COST workshop on refined flow modelling*, 1997.
- [150] H. Tennekes et J. L. Lumley. *A first course in Turbulence*. MIT Press, 1972.
- [151] N. H. Thomas et P. E. Hancock. Grid turbulence near a moving wall. *J. Fluid Mech.*, vol. 82, p. 481–496, 1977.
- [152] C. D. Tomkins et R. J. Adrian. Characteristics of vortex packets in wall turbulence. In: *Proc. First Intl Symp. Turb. Shear Flow Phenomena, Santa Barbara, California, USA*, 2, pages 31–36, 1999.
- [153] Uberoi. *J. Fluid Mech.*, vol. 90, p. 241, 1979.
- [154] UMIST, Manchester. *Proc. Seventh ERCOFTAC/IAHR workshop on refined turbulence modelling*, 1998.
- [155] T. Uzkan et W. C. Reynolds. A shear-free turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, vol. 28, p. 803–821, 1967.
- [156] H. A. Van der Worst. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, vol. 13, p. 631–644, 1992.
- [157] E. R. van Driest. On turbulent flow near a wall. *J. Aero. Sci.*, vol. 23, p. 1007–1011, 1956.
- [158] T. von Kármán. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. *Nachr. Ges. Wiss.*, page 68, 1930.
- [159] L. Wang. Frame-indifferent and positive-definite Reynolds stress-strain relation. *J. Fluid Mech.*, vol. 352, p. 341–358, 1997.

-
- [160] J. Weinstock. Theory of the pressure-strain-rate correlation for Reynolds-stress turbulence closures. Part 1. Off-diagonal element. *J. Fluid Mech.*, vol. 105, p. 369–396, 1981.
- [161] J. Weinstock. Theory of the pressure-strain-rate. Part 2. Diagonal elements. *J. Fluid Mech.*, vol. 116, p. 1–29, 1982.
- [162] J. Weinstock et S. Burk. Theoretical pressure strain term: resistance to large anisotropies of stress and dissipation.
- [163] V. Wizman, D. Laurence, M. Kanniche, P. Durbin et A. Demuren. Modeling near-wall effects in second-moment closures by elliptic relaxation. *Intl J. Heat and Fluid Flow*, vol. 17, n° 3, p. 255–266, 1996.
- [164] Z. Yang et T.-H. Shih. New time scale based k - ε model for near-wall turbulence. *AIAA J.*, vol. 31, n° 7, p. 1191–1198, 1993.
- [165] C. R. Yap. *Turbulent heat and momentum transfer in recirculating and impinging flows*. PhD thesis, Faculty of Science, University of Manchester, 1997.
- [166] X. Yuan, A. Moser et P. Suter. Wall functions for numerical simulation of turbulent natural convection along vertical plates. *Intl J. Heat Mass Transfer*, vol. 36, n° 18, p. 4477–4485, 1993.
- [167] M. V. Zagarola, A. E. Perry et A. J. Smits. Log laws or power laws: the scaling in the overlap region. *Phys. Fluids*, vol. 9, n° 7, p. 2094–2100, 1997.
- [168] O. Zeman et J. L. Lumley. Buoyancy effects in entraining turbulent boundary layers: a second-order closure study. In : *Proc. First Symp. Turb. Shear Flows*, 6, pages 295–306, 1979.

Résumé

La thèse a pour but la prise en compte, dans les modèles en un point, des effets induits par les parois solides sur la turbulence. L'importance des caractéristiques de la turbulence en dessous de la zone logarithmique, notamment pour la prédiction des échanges thermiques fluide–solide, conduit à utiliser des modèles intégrables jusqu'à la paroi.

Les modèles bas-Reynolds classiques, dérivés de modèles haut-Reynolds, souffrent de défauts inhérents à l'utilisation, pour le terme de redistribution, des hypothèses de quasi-homogénéité et de localité. Une alternative à ces modèles, fondée sur des hypothèses plus cohérentes, proposée par Durbin, consiste à résoudre pour le terme de redistribution une équation différentielle, dite de *relaxation elliptique*. Les hypothèses de base de la méthode, permettant de modéliser les corrélations en deux points entre la vitesse et le gradient de pression, ayant été introduites de manière intuitive, une analyse en détail de ces corrélations a été menée à partir d'une base de données de simulation directe en canal. Il a été montré que les hypothèses sont globalement cohérentes avec les données, mais peuvent néanmoins être modifiées pour rendre compte de l'inhomogénéité et de l'anisotropie. De nouvelles formulations de l'équation de relaxation elliptique en résultent, dont le comportement dans la zone logarithmique est meilleur que celui de la formulation d'origine.

La version réduite à trois équations de transport du modèle de Durbin, le modèle $\overline{v^2}-f$ (ou $k-\varepsilon-\overline{v^2}$), a été implanté dans le code industriel aux éléments finis N3S développé à EDF, utilisant des maillages non-structurés. Une validation a été réalisée sur des cas de canal et de marche descendante, puis le modèle a été appliqué au cas du canal, dont une des parois, chauffée, est garnie de *ribs* pour augmenter les échanges thermiques. La qualité des résultats obtenus, notamment pour le nombre de Nusselt, montre l'intérêt de ce modèle pour les applications industrielles.

Mots clés : écoulements de proche paroi ; modélisation de la turbulence ; moyennes de Reynolds ; bas-Reynolds ; effet non-local ; blocage ; sous-couche visqueuse ; redistribution ; relaxation elliptique ; analyse de données de simulation directe ; maillages non-structurés ; canal ; marche descendante ; *ribs* ; transferts thermiques.

Abstract

Turbulence modelling. Accounting for wall effects by elliptic relaxation.

The aim of this work is to account for the wall-induced effects on the turbulence in single point closures. Since the knowledge of the turbulence characteristics below the logarithmic layer is very important, especially for the prediction of heat transfer between the fluid and the walls, models integrable down to solid boundaries are needed.

Standard low-Reynolds-number models, derived from high-Reynolds-number models, inherit shortcomings due to the use of the quasi-homogeneous and local assumptions for the redistribution term. An alternative method, proposed by Durbin, consist in expressing this term as the solution of a differential equation, the so-called *elliptic relaxation equation*. Since the assumptions of the model for the two-point correlations between velocity and pressure gradient were originally introduced on an intuitive basis, a DNS database analysis of these correlations has been performed. It has been shown that the assumptions are consistent with the data, but can be modified in order to account for the inhomogeneity and the anisotropy. New formulations of the elliptic relaxation equation have then been derived, which behave more correctly in the logarithmic layer than the original model.

The version of Durbin's model reduced to three transport equations, the $\overline{v^2}-f$ or $k-\varepsilon-\overline{v^2}$ model, has been implemented in the finite element industrial code N3S developed at EDF, which uses unstructured meshes. Validations on the channel and backstep flows have been performed, and the model has been applied to the case of the ribbed-channel, including heat transfer. The predictions obtained, in particular regarding the Nusselt number, show the ability of the model to reproduce cases relevant to industrial applications.

Keywords: near-wall flow; turbulence modelling; Reynolds-averaged Navier–Stokes equations; low Reynolds number; non local effect; blocking effect; viscous sublayer; redistribution; elliptic relaxation; analysis of a direct numerical simulation database; unstructured mesh; channel flow; backstep flow; ribbed-channel flow; heat transfer.