



HAL
open science

Vers la simulation numérique adaptative à tout nombre de Mach

Nicolas Chauchat

► **To cite this version:**

Nicolas Chauchat. Vers la simulation numérique adaptative à tout nombre de Mach. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. UPPA, 2016. Français. ⟨NNT : ⟩. ⟨tel-02398058⟩

HAL Id: tel-02398058

<https://univ-pau.hal.science/tel-02398058v1>

Submitted on 6 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THÈSE
UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR
École doctorale des sciences et leurs applications, ED n° 211

Présentée et soutenue le 2 décembre 2016

par **Nicolas Chauchat**

pour obtenir le grade de docteur
de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour
Spécialité : Mécanique des fluides

Vers la simulation numérique
adaptative à tout nombre de Mach

MEMBRES DU JURY

RAPPORTEURS

- Ashwin Chinnayya Professeur, ISAE-ENSMA
- Lazhar Houas Directeur de recherche CNRS, IUSTI - Aix-Marseille Université

EXAMINATEURS

- Laurent Cambier Directeur du DMFN, ONERA
- Georges Jourdan Professeur, Aix-Marseille Université
- Mickael Philit Ingénieur en Aéroélasticité, Safran Helicopter Engines
- Jaap van der Vegt Professeur, Université de Twente, Pays-Bas

DIRECTEURS

- Roland Becker Professeur, Université de Pau et des Pays de l'Adour
- Éric Schall Maître de Conférences HDR, Université de Pau et des Pays de l'Adour



Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements à Éric Schall et Roland Becker, pour m'avoir accueilli au sein de leurs laboratoires, pour avoir mis à ma disposition tous les moyens nécessaires à cette étude et pour le temps qu'ils m'ont accordé.

Ce travail a été mené au sein du laboratoire des sciences de l'ingénieur appliquées à la mécanique et au génie électrique (SIAME), en collaboration avec le laboratoire des mathématiques et de leurs applications de Pau (LMAP).

Il n'aurait pas été possible sans le financement de l'université de Pau, du conseil régional d'Aquitaine, de Safran Helicopter Engines et la collaboration de l'ONERA.

Je remercie aussi toutes les personnes de l'ONERA et de Safran Helicopter Engines qui m'ont suivi au long de cette thèse. Plus particulièrement, je tiens à remercier Nicolas Lantos, pour nos échanges sur l'utilisation du logiciel *elsA*, Jean-Christophe Boniface pour notre collaboration sur le cas de Fraenkel, Vincent Couaillier et Marta de la Llave Plata pour notre collaboration dans le cadre de l'étude thermique.

Je remercie également Jaap van der Vegt pour m'avoir accueilli dans son équipe à l'université de Twente au Pays-Bas durant ma seconde année de thèse et pour l'aide qu'il m'a apporté à cette occasion.

Je remercie vivement Robert Luce, Mathieu Mory et les membres du groupe Concha pour leur gentillesse, leur disponibilité et l'aide qu'ils m'ont apportées au cours de ces trois années.

Merci aussi aux enseignants de l'IUT-GTE pour leurs encouragements et l'amitié qu'ils m'ont témoignés.

Je tiens aussi à remercier mes collègues de bureau et les membres de l'association des masters et doctorants de l'Adour pour les bons moments de convivialité que l'on a partagés.

Merci à Laurence Lamoulié qui m'a transmis l'offre de thèse et mis en relation avec Eric Schall.

Un grand merci aussi à ma famille qui m'a soutenu et encouragé tout au long de ce travail.

Enfin, je tiens une fois de plus à exprimer ma gratitude à Éric Schall pour tout ce qu'il m'a apporté durant les trois dernières années.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 1 |
| 1.1 | Motivation | 1 |
| 1.2 | Modèle physique étudié | 4 |
| 1.2.1 | Equations de Navier-Stokes | 4 |
| 1.2.2 | Equations d'Euler | 7 |
| 1.3 | Méthodes de simulation numérique utilisées | 7 |
| 1.3.1 | Méthode des volumes-finis | 7 |
| 1.3.2 | Méthode des éléments-finis discontinus de Galerkin | 8 |
| 2 | Étude comparative du modèle Euler | 11 |
| 2.1 | Les différents codes utilisés | 11 |
| 2.1.1 | Concha | 11 |
| 2.1.2 | <i>elsA</i> | 12 |
| 2.1.3 | FLUENT | 12 |
| 2.2 | Benchmark : cas test choisis | 13 |
| 2.2.1 | Cas test de Fraenkel (FTC) | 13 |
| 2.2.2 | Tuyère à basse vitesse (ISLN) | 23 |
| 2.2.3 | Tube à choc (ST) | 23 |
| 2.2.4 | Vortex isentropique (ISV) | 29 |
| 2.2.5 | Cylindre à Mach 3 (CM3) | 29 |
| 3 | Étude thermique : Refroidissement d'un cylindre par impacts de jets à <i>Mach</i> | 37 |
| 0.013 | | |
| 3.1 | Présentation du banc expérimental | 37 |
| 3.2 | Stratégie numérique et flux de chaleur. | 38 |
| 3.2.1 | FLUENT pour le modèle incompressible | 41 |
| 3.2.2 | <i>elsA</i> pour le modèle compressible | 42 |
| 3.2.3 | Le calcul du flux de chaleur | 42 |
| 3.3 | Présentation du cas test | 46 |
| 3.4 | Résultats | 49 |
| 3.4.1 | Comparaison 2D-3D avec <i>elsA</i> -Jameson | 49 |
| 3.4.2 | Résultats avec FLUENT | 56 |
| 3.4.3 | Résultats avec <i>elsA</i> | 57 |
| 3.4.4 | Comparaisons FLUENT/ <i>elsA</i> et simulations/expérience | 63 |
| 3.5 | Amélioration de l'expérience | 64 |
| 3.5.1 | Contrôle du débit dans le système | 65 |
| 3.5.2 | Suppression des aspirations d'air non souhaitées | 65 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4 | Simulation des équations d'Euler avec différents jeux de variables | 69 |
| 4.1 | Intérêt du changement de variables | 69 |
| 4.1.1 | Les variables entropiques | 71 |
| 4.1.2 | Les variables physiques en pression | 72 |
| 4.2 | Discrétisation des équations d'Euler avec un changement de variables | 72 |
| 4.2.1 | Le flux numérique | 73 |
| 4.2.2 | Le solveur de Newton | 74 |
| 4.3 | Résultats numériques | 75 |
| 4.3.1 | Le transport d'une onde | 75 |
| 4.3.2 | Le cas de Fraenkel (FTC) | 75 |
| 4.3.3 | La tuyère à basse vitesse (ISLN) | 77 |
| 4.3.4 | Le tube à choc (ST) | 77 |
| 4.3.5 | Le vortex isentropique (ISV) | 81 |
| 4.3.6 | Le cylindre à Mach 3 (CM3) | 84 |
| 5 | Conclusions et Perspectives | 87 |
| A | Les Jacobiennes | 91 |
| A.1 | Les Jacobiennes en variables physiques | 91 |
| A.2 | Les Jacobiennes en variables entropiques | 92 |
| B | Publications | 93 |
| B.1 | Article dans des revues internationales | 93 |
| B.2 | Communications dans des congrès internationaux | 93 |
| | Bibliographie | 115 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Spécificités relatives aux logiciels testés | 14 |
| 2.2 | Résumé des différents cas test | 14 |
| 2.3 | Norme L^2 relative des erreurs par rapport à la solution analytique pour le cas FTC, sur le demi-domaine. | 18 |
| 2.4 | Norme L^2 relative des erreurs par rapport à la solution analytique pour le cas FTC, sur le domaine complet avec le maillage de 6000 quadrangles. | 23 |
| 2.5 | Norme L^2 relative des erreurs par rapport à la solution analytique pour ILSN. | 24 |
| 2.6 | Conditions initiales du tube à choc ($t = 0s$). | 28 |
| 2.7 | Norme L^2 relative des erreurs par rapport à la solution analytique pour ST. | 30 |
| 2.8 | Norme L^2 relative des erreurs par rapport à la solution analytique pour ISV. | 30 |
| 2.9 | Norme L^2 relative des erreurs sur l'enthalpie totale par rapport à la valeur infini amont. | 36 |
| 3.1 | Vue d'ensemble de FLUENT et <i>elsA</i> | 43 |
| 3.2 | Conditions aux limites physiques. | 46 |
| 3.3 | Conditions de simulation avec FLUENT et <i>elsA</i> | 46 |
| 3.4 | Informations sur les maillages utilisés avec FLUENT et <i>elsA</i> | 49 |
| 3.5 | Détails sur le maillage G3 | 49 |
| 3.6 | Norme L^2 relative des erreurs sur le débit pour <i>elsA</i> 2D et <i>elsA</i> 3D. | 54 |
| 3.7 | Norme L^2 relative des erreurs sur la puissance convectée pour <i>elsA</i> 2D et <i>elsA</i> 3D. | 55 |
| 3.8 | Norme L^2 relative des erreurs sur les débits pour <i>elsA</i> et FLUENT. | 63 |
| 3.9 | Comparaison des puissances convectées entre <i>elsA</i> et FLUENT. L'expérience est la référence. | 67 |
| 4.1 | Normes L^2 relatives des erreurs sur la masse volumique à $t = 1s$, pour différents maillages. | 78 |
| 4.2 | Normes L^2 relatives des erreurs par rapport à la solution analytique pour FTC. | 78 |
| 4.3 | Normes L^2 relatives des erreurs par rapport à la solution analytique pour ILSN. | 79 |
| 4.4 | Conditions initiales du tube à choc ($t = 0s$). | 81 |
| 4.5 | Normes L^2 relatives des erreurs par rapport à la solution analytique pour ST. | 83 |
| 4.6 | Normes L^2 relatives de l'erreur par rapport à la solution analytique pour ISV sur la coupe présentée, entre les points (5, 5) et (15, 15). | 83 |
| 4.7 | Normes L^2 relatives des erreurs sur l'enthalpie totale par rapport à la valeur à l'infini amont. | 84 |
| 5.1 | Tableau récapitulatif des résultats obtenus dans le chapitre 2 | 88 |
| 5.2 | Tableau récapitulatif des gains obtenus au chapitre 4, par rapport aux variables conservatives | 89 |

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Domaine complet de simulation pour FTC : cas d'un écoulement symétrique autour d'un cylindre. | 14 |
| 2.2 | Zoom sur la solution analytique pour le cas de Fraenkel. Visualisation de 50 lignes de courant en amont et en aval du cylindre. | 15 |
| 2.3 | Solution de FLUENT sur un maillage de 108960 éléments, à un instant donné. Les lignes de courant (blanches) sont superposées au module de la vitesse (cf. iso-couleurs). | 16 |
| 2.4 | Solution avec le schéma AUSM sur un maillage de 6400 éléments (<i>elsA</i>). | 16 |
| 2.5 | Solution avec le schéma Roe sur un maillage de 40000 éléments (<i>elsA</i>). | 16 |
| 2.6 | Solution avec Concha DG1 sur un maillage de 6400 quadrangles. | 17 |
| 2.7 | Solution avec Concha DG0 sur un maillage de 4608 triangles. | 17 |
| 2.8 | Extraction du module de la vitesse le long de la paroi du cylindre pour le cas FTC, sur le demi-domaine. | 18 |
| 2.9 | Profil de la vitesse en x en entrée du domaine de Fraenkel, $x = -10$ et $y \in [-5, 5]$ | 20 |
| 2.10 | Profil de la vitesse en y en entrée du domaine de Fraenkel, $x = -10$ et $y \in [-5, 5]$ | 21 |
| 2.11 | Lignes de courant sur le module de la vitesse pour le cas FTC, sur le domaine complet, avec le flux AUSM, sans ajuster les paramètres. | 21 |
| 2.12 | Lignes de courant sur le module de la vitesse pour le cas FTC, sur le domaine complet, avec le flux de Roe. | 22 |
| 2.13 | Lignes de courant sur le module de la vitesse pour le cas FTC, sur le domaine complet, avec le flux Roe et un préconditionneur basse vitesse. | 22 |
| 2.14 | Lignes de courant pour le cas FTC, sur le domaine complet, avec le flux AUSM et les paramètres ajustés. | 24 |
| 2.15 | Lignes de courant pour le cas FTC, sur le domaine complet avec le maillage en quadrangles, solution de Fraenkel (noir) superposée à la solution avec HLLC (gris). | 24 |
| 2.16 | Maillage en triangle pour le cas FTC. | 25 |
| 2.17 | Lignes de courant, en amont du cylindre, pour le cas FTC, sur le domaine complet avec le maillage en triangle, solution avec HLLC (rouge) superposée à la solution de Fraenkel (en noir, calculée sur ce maillage). | 25 |
| 2.18 | Lignes de courant, en aval du cylindre, pour le cas FTC, sur le domaine complet avec le maillage en triangle, solution avec HLLC (rouge) superposée à la solution de Fraenkel (en noir, calculée sur ce maillage). | 25 |
| 2.19 | Extraction du module de la vitesse le long de la paroi du cylindre pour le cas FTC, sur le domaine complet | 26 |
| 2.20 | Domaine de simulation pour ILSN. | 26 |
| 2.21 | Nombre de Mach sur l'axe central ($y = 0$) de ILSN avec Concha, <i>elsA</i> et FLUENT. | 27 |
| 2.22 | Variation de pression sur l'axe central ($y = 0$) de ILSN avec Concha, <i>elsA</i> et FLUENT. | 27 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.23 | Évolution de la masse volumique le long de l'axe longitudinal de ST avec Concha, <i>elsA</i> et FLUENT. | 28 |
| 2.24 | Plan initial pour le ISV. | 30 |
| 2.25 | Profil de la masse volumique le long de la diagonale à $t = 10s$, pour différents maillages. Concha (noir) : 6400 quads. <i>elsA</i> et FLUENT (vert, jaune, mauve) : 63504 quads. | 31 |
| 2.26 | Profil de la masse volumique le long de la diagonale à $t = 10s$. Pour un même maillage de 16384 quads. | 31 |
| 2.27 | Domaine de simulation pour CM3. | 32 |
| 2.28 | Concha HLLC Tu. | 33 |
| 2.29 | FLUENT DBM. | 33 |
| 2.30 | <i>elsA</i> AUSM minmod. | 33 |
| 2.31 | <i>elsA</i> Roe minmod. | 33 |
| 2.32 | Lignes de courant avec Concha HLLC Tu. | 34 |
| 2.33 | Lignes de courant avec <i>elsA</i> AUSM minmod. | 34 |
| 2.34 | Lignes de courant avec <i>elsA</i> Roe minmod. | 34 |
| 2.35 | Lignes de courant avec FLUENT DBM. | 34 |
| 2.36 | Évolution de l'enthalpie totale sur les lignes de courant avec Concha HLLC Tu. | 35 |
| 2.37 | Évolution de l'enthalpie totale sur les lignes de courant avec <i>elsA</i> AUSM minmod. | 35 |
| 2.38 | Évolution de l'enthalpie totale sur les lignes de courant avec <i>elsA</i> Roe minmod. | 35 |
| 2.39 | Évolution de l'enthalpie totale sur les lignes de courant avec FLUENT DBM. | 35 |
| 2.40 | Évolution de l'erreur de l'enthalpie totale sur les lignes de courant par rapport à la valeur infini amont, avec Concha HLLC Tu. | 36 |
| 2.41 | Évolution de l'erreur de l'enthalpie totale sur les lignes de courant par rapport à la valeur infini amont, avec <i>elsA</i> AUSM minmod. | 36 |
| 2.42 | Évolution de l'erreur de l'enthalpie totale sur les lignes de courant par rapport à la valeur infini amont, avec <i>elsA</i> Roe minmod. | 36 |
| 2.43 | Évolution de l'erreur de l'enthalpie totale sur les lignes de courant par rapport à la valeur infini amont, avec FLUENT DBM. | 36 |
| 3.1 | Vue de côté et coupe du système de refroidissement avec le cylindre chauffé de rayon R_i | 39 |
| 3.2 | Photographie du banc d'essai. Les flèches bleues indiquent les entrées d'air et la rouge représente la sortie. | 39 |
| 3.3 | Photographie du banc d'essai. Vue globale du système de refroidissement incluant les quatre branches d'où l'écoulement arrive. | 40 |
| 3.4 | Photographie de l'intérieur du cylindre à refroidir. | 40 |
| 3.5 | Surface extérieure du cylindre à refroidir, présentant la position des thermocouples. | 43 |
| 3.6 | Exemple de maillage structuré au voisinage d'une paroi. | 44 |
| 3.7 | Schéma du domaine de simulation avec les conditions aux limites. | 47 |
| 3.8 | Vue du maillage en 3D. | 48 |
| 3.9 | Évolution des résidus lors d'une simulation 2D avec <i>elsA</i> | 48 |
| 3.10 | Évolution des résidus lors d'une simulation 3D avec <i>elsA</i> | 50 |
| 3.11 | Évolution de la moyenne du flux de chaleur sur les maillages de G0 à G5. | 50 |
| 3.12 | Historique de la convergence en résidus avec le maillage G3 et le logiciel <i>elsA</i> | 51 |
| 3.13 | Maillage G3. | 51 |
| 3.14 | Zoom sur la sortie dans le maillage G3. | 52 |
| 3.15 | Comparaison des flux de chaleur sur le bord interne-chauffé, de la simulation 3D, pour trois plans différents ($z = -0.0195m$, $z = 0m$ et $z = 0.0195m$). | 52 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.16 | Comparaison des flux de chaleur sur le bord interne-chauffé, pour la simulation 2D et pour le plan de symétrie de la simulation 3D. | 53 |
| 3.17 | Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation 3D avec <i>elsA</i> -Jameson, pour le plan $z = 0m$ | 54 |
| 3.18 | Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation 2D avec <i>elsA</i> -Jameson. | 55 |
| 3.19 | Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation en 2D avec FLUENT-Simple | 56 |
| 3.20 | Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation en 2D avec FLUENT-Piso | 58 |
| 3.21 | Module de la vitesse dans le domaine de simulation avec FLUENT-Simple. . . | 58 |
| 3.22 | Module de la vitesse dans le domaine de simulation avec FLUENT-Piso. . . . | 59 |
| 3.23 | Évolution du flux de chaleur pariétal sur la paroi interne-chauffée avec FLUENT. . . | 59 |
| 3.24 | Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation en 2D avec <i>elsA</i> -Jameson | 60 |
| 3.25 | Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation en 2D avec <i>elsA</i> -Roe | 61 |
| 3.26 | Module de la vitesse dans le domaine de simulation avec <i>elsA</i> -Jameson. | 61 |
| 3.27 | Module de la vitesse dans le domaine de simulation avec <i>elsA</i> -Roe. | 62 |
| 3.28 | Évolution du flux de chaleur pariétal avec <i>elsA</i> , sur la paroi interne-chauffée. . . | 62 |
| 3.29 | Évolution du flux de chaleur pariétal avec <i>elsA</i> Roe et FLUENT Simple, sur la paroi interne-chauffée. | 64 |
| 3.30 | Schéma du té, qui permet de mieux gérer le débit dans le système. | 67 |
| 3.31 | Positions des joints ajoutés. | 67 |
| 4.1 | Simulation du cylindre à Mach 3 avec les variables entropiques et la méthode Simpson pour chaque intégration numérique du flux entropique. | 76 |
| 4.2 | Simulation du cylindre à Mach 3 avec les variables entropiques et les bonnes méthodes d'intégration numérique pour le flux entropique. | 76 |
| 4.3 | Masse volumique dans le domaine après 1s. | 76 |
| 4.4 | Lignes de courant sur la vitesse dans le domaine avec Concha et les variables entropiques. | 77 |
| 4.5 | Vitesse sur la paroi du cylindre de FTC avec Concha et les différents jeux de variables. | 78 |
| 4.6 | Nombre de Mach sur l'axe vertical ($y = 0$) de ILSN avec Concha et les différents jeux de variables. | 79 |
| 4.7 | Variation de pression sur l'axe vertical ($y = 0$) de ILSN avec Concha et les différents jeux de variables. | 80 |
| 4.8 | Évolution de la masse volumique le long de l'axe longitudinal de ST avec Concha et les différents jeux de variables. | 81 |
| 4.9 | Évolution de la masse volumique le long de la diagonale de ISV avec Concha et les différents jeux de variables. | 82 |
| 4.10 | Zoom sur l'évolution de la masse volumique le long de la diagonale de ISV avec Concha et les différents jeux de variables. | 83 |
| 4.11 | Concha HLLC. | 84 |
| 4.12 | Concha conservative. | 84 |
| 4.13 | Concha physique. | 85 |
| 4.14 | Concha entropique. | 85 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.15 | Erreur relative sur l'enthalpie totale le long des lignes de courant pour Concha HLLC. | 85 |
| 4.16 | Erreur relative sur l'enthalpie totale le long des lignes de courant pour Concha conservative. | 86 |
| 4.17 | Erreur relative sur l'enthalpie totale le long des lignes de courant pour Concha physique. | 86 |
| 4.18 | Erreur relative sur l'enthalpie totale le long des lignes de courant pour Concha entropique. | 86 |

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation

Pourquoi la simulation numérique ?

La simulation numérique peut s'expliquer en trois temps : modélisation, résolution numérique et interprétation des résultats comme suivent :

Modélisation

Au cours du temps, les scientifiques ont toujours cherché à expliquer les phénomènes naturels, physiques ou économiques. Ils les ont dans un premier temps considérés comme des phénomènes complexes qu'il est possible de ramener à des modèles ou des compositions de modèles intelligibles et permettant d'anticiper, au moins en probabilité, leurs conséquences ou le résultat d'une action au sein du phénomène. Cependant, la complexité des systèmes n'est pas réductible à des modèles explicatifs et simplificateurs. Les scientifiques du XX^{ieme} siècle ont donc envisagé de modéliser les phénomènes à chaque instant, c'est à dire d'utiliser des modèles potentiellement complexes : c'est la naissance de la modélisation. L'expérience acquise au cours des siècles précédents en matière de modèles représentant des phénomènes supposés compliqués nourrit la modélisation actuelle des systèmes complexes. La modélisation d'un phénomène physique se traduit souvent par un système d'équations différentielles, intégrales ou aux dérivées partielles. Dans certains cas simples, la modélisation permet de trouver des expressions analytiques pour expliquer les phénomènes, mais ce n'est pas le cas pour la plupart des problèmes intéressant les scientifiques, qu'ils soient chercheurs, ingénieurs ou techniciens.

Résolution numérique

On s'intéresse dans un second temps à sa résolution numérique ou simulation afin d'obtenir les informations désirées. Deux cas peuvent alors se présenter : soit la solution est analytique, dans ce cas, on peut l'exploiter à posteriori en faisant varier les inconnues à volonté, soit l'on ne sait pas résoudre analytiquement le système d'EDP. Sauf dans les cas les plus simples, la plupart des modélisations aboutissent à un système que l'on ne sait résoudre car c'est un système continu : les solutions prennent une infinité de valeurs en fonction d'une ou plusieurs inconnues appartenant au domaine étudié. Ainsi, il est possible de simplifier le problème en coupant le domaine en un nombre fini de points où l'on essaiera d'approcher la solution : c'est le principe de discrétisation. S'il n'est pas possible d'obtenir une vraie solution à travers une formule composée de fonctions élémentaires, la discrétisation couplée à l'utilisation de méthodes numériques permet d'approcher une solution en un nombre fini de points choisis au préalable par le scientifique. Ceci est rendu possible grâce au développement de l'informatique. Les scientifiques ont alors la possibilité d'étudier qualitativement les dites solutions.

Interprétation des résultats

La précision et la qualité des résultats obtenus dépendent de la maîtrise des méthodes numériques et peuvent être limitées par les capacités de la machine : l'ordinateur est limité en mémoire, en précision et en durée de fonctionnement. Ainsi l'étude d'un problème physique délibérément modélisé puis discrétisé afin d'obtenir par ordinateur un aperçu des résultats, dans le but de dégager des tendances ou des comportements constitue l'art de la simulation numérique. Postuler simplement qu'il existe des solutions aux équations modélisant le problème étudié, sans même pouvoir le démontrer d'un point de vue mathématique, nécessite la maîtrise de cette discipline quelque part "subjective" et incite une nouvelle fois à la prudence dans l'interprétation des résultats.

Intérêt du calcul adaptatif

Plus le maillage sera fin, meilleure devrait être la solution obtenue. Cependant, compte tenu de la limitation imposée par les moyens informatiques (mémoire, rapidité d'exécution...), un compromis doit être trouvé au niveau du nombre de points de calcul, du pas de temps en fonction de la nature de l'écoulement pour que le résultat obtenu soit représentatif. L'adaptativité évoquée dans le titre concerne le côté spatial. Pour avoir une bonne représentation de l'écoulement dans tout le domaine, il est important d'avoir un nombre de points suffisant dans les zones où les grandeurs physiques varient de façon importante et peu de points suffiront à décrire les zones où les variations sont faibles. On parle en particulier de maillage adaptatif. Ce point, bien que très important, n'est pas traité dans le travail présenté. Cependant, nous disposons déjà d'une procédure adaptative faite par le passé dans le cas des écoulements stationnaires qui sera testée ultérieurement.

Dans ce travail, on cherche à appréhender et maîtriser les fluides newtoniens en mouvement par la simulation numérique. Les applications industrielles comme académiques sont nombreuses dans des secteurs d'activité aussi divers et variés que : le transport, l'aéronautique, le spatial, le bâtiment... La maîtrise et la connaissance de ces fluides passent par la détermination en général des quatre grandeurs physiques que sont : le vecteur vitesse \vec{V} , la masse volumique ρ , la pression P et la température T à l'échelle macroscopique d'une particule fluide. Le système composé des équations de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie) et d'une équation caractérisant le fluide forme un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) fermé que l'on peut résoudre par la simulation numérique. La résolution numérique de ce système est cependant difficile compte tenu de son caractère fortement non linéaire. Il convient alors, le plus souvent, d'effectuer des hypothèses dans la mesure où le champ d'investigation le permet. L'étude des fluides newtoniens se sépare nettement en deux communautés en fonction de l'hypothèse liée à la compressibilité :

D'une part, la première communauté considère que l'écoulement est incompressible. Cette hypothèse se justifie pour des fluides à forte masse volumique et/ou évoluant à basse vitesse relativement à la vitesse du son dans le milieu. Ainsi, l'eau se distingue de l'air par une masse volumique approximativement mille fois supérieure et dans un registre de vitesse plus bas. Cela signifie que l'eau sera plus facilement considérée comme un fluide incompressible tandis que l'air sera considéré comme un fluide compressible. La compressibilité n'est pas un état de fait mais reste une hypothèse émise sur l'écoulement étudié. En effet, l'air à basse vitesse peut se comporter aussi comme un fluide incompressible. L'incompressibilité du fluide se caractérise, pour les cas non-réactif et sans changement de phase, par le fait que la dérivée totale ou particulière de la masse volumique soit nulle. Ce qui équivaut à dire que la divergence de la vitesse est nulle. Le système d'EDP étudié se réduit alors à une dépendance réciproque directe entre la vitesse et la pression. Admettre le fait que la divergence de la vitesse soit nulle réduit cependant le champ d'application à des fluides isentropiques. Le modèle incompressible ne peut

pas simuler des fluides où siègeraient des processus à forte compressibilité comme des ondes de choc. Ce phénomène apparaît le plus souvent au sein d'écoulements à grande vitesse au contact d'un solide. A moindre vitesse, l'apparition de zones à forte compressibilité peut se produire dans des écoulements évoluant au sein de géométries complexes.

D'autre part, la seconde communauté qui étudie les fluides compressibles ne font quant à eux aucune hypothèse sur le système d'EDP obtenu au départ. Cependant, il s'avère que les méthodes numériques mises en œuvre pour la résolution ne donnent pas de résultat satisfaisant à basse vitesse, plus précisément lorsque le fluide tend vers sa limite incompressible. A ce jour, il n'existe aucune méthode capable de simuler correctement des écoulements où co-habiteraient simultanément des zones dites incompressibles et des zones dites compressibles. Actuellement, les ingénieurs ou chercheurs qui pratiquent la simulation numérique dans le but d'appréhender ou d'anticiper la nature d'un fluide en mouvement sont obligés de faire le choix préalable quant à la compressibilité de celui-ci. Ainsi d'un point de vue industriel comme académique, il existe deux sortes de logiciels relativement aux deux hypothèses. On peut citer par exemple le logiciel FLUENT pour les fluides incompressibles utilisant des solveurs du type "pressure-based" et le logiciel *elsA* utilisant, entre autres, les solveurs approchés de Riemann pour les fluides compressibles.

Étant donné que seul le modèle compressible est capable de capturer des écoulements à rupture ou saut d'entropie, ce travail a pour objectif d'étudier les méthodes numériques susceptibles de donner aussi de bons résultats à basse vitesse relativement à la vitesse du son ou à bas nombre de Mach. Par abus de langage dans ce manuscrit, la notion "incompressible" sera souvent évoquée à travers l'expression dite à "bas nombre de Mach" ou à "basse vitesse", sous entendue relativement à la vitesse du son. La recherche d'une méthode numérique pouvant résoudre avec précision aussi bien les écoulements compressibles et incompressibles à partir du modèle des équations compressibles se résume dans la quête du "solveur tout Mach" auquel contribue ce travail.

Ce manuscrit comporte une introduction, trois chapitres et une conclusion générale. En chapitre 1, l'introduction contient trois différentes sections. Le modèle des équations compressibles est présenté dans sa forme générique dite de Navier-Stokes en conservant les termes visqueux et diffusifs puis en les négligeant à travers les équations d'Euler hyperboliques (sections 1.2.1 et 1.2.2). Deux types de méthodes numériques sont présentés : la plus largement utilisée, celle des volumes-finis et plus récemment la méthode éléments-finis discontinus de Galerkin (DG) développée dans ce travail (sections 1.3.1 et 1.3.2). Pour le modèle d'Euler, le chapitre suivant (chapitre 2) s'intéresse à un ensemble de cas académiques dont on connaît, pour la plupart, une solution analytique afin de pouvoir effectuer d'une part des comparaisons entre modèles (compressible et incompressible) et d'autre part entre méthodes numériques pour un même modèle. Au chapitre 3, on s'intéresse à l'étude d'un cas, cette fois visqueux et diffusif (Navier-Stokes), pour lequel on dispose de mesures expérimentales de température et de vitesse. Étant donné que l'étude expérimentale s'effectue à basse vitesse, les modèles compressible et incompressible sont résolus avec respectivement les logiciels *elsA* et FLUENT. Les résultats numériques sont comparés entre les deux méthodes relativement à chaque modèle puis font l'objet d'une comparaison avec l'expérience. Le chapitre 4 présente une nouvelle méthode numérique basée sur des changements de variable pour la simulation numérique du modèle compressible d'Euler en utilisant la technique des éléments-finis DG. Cette méthode possède l'avantage de conserver de bonnes propriétés mathématiques lorsque le nombre de Mach tend vers 0 contrairement aux méthodes à capture de choc actuellement utilisées. La faisabilité de cette nouvelle méthode est testée à l'aide des cas du chapitre 2. En conclusion, le chapitre 5 reprend les résultats princi-

paux des chapitres 2, 3 et 4 et dresse successivement les conclusions et perspectives respectives qui s'en dégagent.

1.2 Modèle physique étudié

La simulation numérique en mécanique des fluides s'intéresse à la détermination des caractéristiques du fluide au cours de son déplacement dans la géométrie considérée au cours du temps. D'un point de vue macroscopique, il s'agit de déterminer le vecteur vitesse \vec{V} , la masse volumique ρ , la pression P et la température T des particules fluides dans l'espace étudié, au cours du temps. En supposant que les termes de transport tels que : la conductivité thermique, la viscosité dynamique et les capacités calorifiques sont constants à chaque itération de calcul, le système composé des équations de conservation associées à une équation caractéristique du fluide suffit pour fermer le système qui peut alors être résolu. Sans aucune hypothèse, le système obtenu s'identifie par abus de langage aux équations dites de Navier-Stokes présentées dans la section 1.2.1. Si par ailleurs on néglige les phénomènes diffusifs et visqueux le système obtenu porte le nom d'équations d'Euler abordées à la section 1.2.2.

1.2.1 Equations de Navier-Stokes

Les "équations de Navier-Stokes" traduisent à l'origine les équations de conservation de quantité de mouvement mais sont souvent assimilées aux lois fondamentales décrivant les principes physiques régissant le mouvement d'un fluide et ses différents transferts en milieu continu [1, 2]. La description d'un milieu continu est basée sur l'hypothèse selon laquelle toutes les échelles macroscopiques d'espace et de temps sont suffisamment grandes par rapport à celles des particules élémentaires (atomes, molécules...) en présence.

Afin de pouvoir présenter les différentes équations de conservation, il est nécessaire de considérer une particule fluide de volume élémentaire $V_m(t)$ contenu dans la surface $A_m(t)$. La taille d'une particule fluide se définit comme un ensemble suffisamment grand pour contenir une très grande quantité de particules élémentaires et suffisamment petit pour être assimilé à un point caractérisé par sa propre : vitesse, masse volumique, pression et température.

Par la suite, le volume élémentaire sera noté V et la surface A de normale extérieure n .

1.2.1.1 Conservation de la masse

La conservation de la masse est une loi fondamentale du comportement d'un milieu continu. Elle stipule que la masse de fluide dans un volume donné reste constante au cours du temps :

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (1.1)$$

avec m la masse du fluide et t le temps.

Comme il est possible d'écrire m sous la forme $m = \iiint_V \rho dV$, l'équation devient :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = 0 \quad (1.2)$$

$$\Rightarrow \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) \right) dV = 0 \quad (1.3)$$

Ce qui donne l'équation de conservation de la masse appelée aussi continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (1.4)$$

avec ρ la masse volumique du fluide et v son vecteur vitesse.

1.2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à notre particule fluide, on obtient :

$$\sum F_{ext} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho v dV \quad (1.5)$$

avec F_{ext} les forces extérieures qui s'appliquent sur la particule fluide qui se décomposent en deux types :

- les forces de contact ou surfaciques notées f : $\iint_A f \cdot ndS$ qui contiennent les forces de pression statique et de frottement.
- Les forces à distance ou forces volumiques qui se réduisent à l'action du champ gravitationnel : $\iiint_V \rho g dV$

L'équation (1.5) devient :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \cdot v) \right) dV = \iiint_V \rho g dV + \iint_A f \cdot ndS \quad (1.6)$$

Soit T le tenseur des contraintes tel que :

$$\iint_A f \cdot ndS = \iint_A T ndS = \iint_A t(n) dS \quad (1.7)$$

La projection de l'équation (1.6) sur l'axe i donne :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v_i dV = \iiint_V \rho g_i dV + \iint_A t_i(n) dS \quad (1.8)$$

avec $t_i(n) = T_{ij} n_j$, en utilisant la notation d'Einstein.

La contrainte pariétale T_{ij} se décompose en une partie de pression statique p et une partie de contrainte visqueuse :

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1.9)$$

où τ_{ij} est le tenseur des contraintes visqueuses proportionnel aux gradients de la vitesse.

$$\iint_A t_i(n) dS = \iint_A (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}) n_j dS \quad (1.10)$$

$$= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}) dV \quad (1.11)$$

D'où

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho v dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}) dV + \iiint_V \rho g_i dV \quad (1.12)$$

En projetant cette équation sur l'axe i , et par unité de volume, on a :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow \rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \rho g + \nabla \tau \quad (1.14)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) = -\nabla p + \rho g + \nabla \tau \quad (1.15)$$

Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses est fonction du tenseur des vitesses de déformation :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (1.16)$$

avec μ le coefficient de viscosité dynamique, que l'on considère constant en espace. En calculant :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu (\nabla v_i) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla v) \quad (1.17)$$

il est possible de déduire l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un fluide newtonien :

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \otimes v) = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 v + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla v) \quad (1.18)$$

1.2.1.3 Conservation de l'énergie

L'application du premier principe de la thermodynamique au volume élémentaire donne :

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt} \quad (1.19)$$

$\frac{dW}{dt}$ est la puissance des forces extérieures, qui vaut :

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \rho g v dV + \iint_A t(n) v dS \quad (1.20)$$

Supposons qu'il n'y a pas de source interne de chaleur et que le seul flux de chaleur se diffuse par conduction. La puissance échangée par diffusion $\frac{dQ}{dt}$ vaut donc :

$$\frac{dQ}{dt} = - \iint_A q n dS \quad (1.21)$$

avec $q = -\lambda \nabla T$ la densité de flux de chaleur selon la loi de Fourier et λ le coefficient de diffusion thermique.

De plus :

$$E_t = \iiint_V \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV \quad (1.22)$$

avec e l'énergie interne.

Comme $t_i(n) = -pn_i + \tau_{ij}n_j$ en notation d'Einstein, on obtient en projetant sur l'axe i :

$$\iint_A t(n) v dS = \iint_A (pn_i v_i + \tau_{ij} v_i n_j) dS \quad (1.23)$$

$$= \iiint_V \left(-\frac{\partial (pv_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} \right) dV \quad (1.24)$$

$$\iint_A q n dS = \iiint_V \nabla q dV \quad (1.25)$$

En posant $E = e + \frac{1}{2}v^2$ et en étudiant les équations par unité de volume, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E v - t(n)v + q) = \rho g v \quad (1.26)$$

En regroupant les équations (1.4), (1.18) et (1.26), on obtient le système des équations de Navier-Stokes. La gravité n'étant pas prise en compte dans ce travail de thèse, le système considéré s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v v - t(n)) = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E v - t(n)v + q) = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

1.2.2 Equations d'Euler

Dans le cas où on ne s'intéresse pas aux interactions fluide/paroi qui se produisent dans la couche limite, on peut négliger la viscosité et la diffusion thermique ($\mu = \lambda = 0$) du fluide. Le système des équations de Navier-Stokes est donc modifié pour obtenir le système des équations hyperboliques d'Euler :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v v) + \nabla p = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E v + p v) = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

En posant $U = (\rho, \rho v, \rho E)^\top$ comme étant le vecteur conservatif, il est possible d'écrire le système sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla F(U) = 0 \quad (1.29)$$

avec $F(U)$ les flux d'Euler qui en projection sur la direction i donne :

$$F_i(U) = \begin{pmatrix} \rho v_i \\ \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \\ \rho v_i \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

1.3 Méthodes de simulation numérique utilisées

Afin de simuler les équations de Navier-Stokes, différentes méthodes numériques sont utilisées à l'aide de différents logiciels (ou codes de calculs) : Concha, *elsA* et FLUENT afin d'être comparées. Ces logiciels, d'origines diverses présentés dans la section 2.1, utilisent la méthode des volumes-finis ou celle des éléments-finis discontinus de Galerkin (DG) qui sont présentées dans les sections 1.3.1 et 1.3.2 suivantes.

1.3.1 Méthode des volumes-finis

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot f(u) = 0 \quad (1.31)$$

avec u le vecteur conservatif et $f(u)$ le vecteur flux.

L'intégration de cette équation sur un volume V dans \mathbb{R}^n , permet d'obtenir la forme intégrale de la loi de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dx + \oint_{\partial V} f_i n_i dS = 0 \quad (1.32)$$

où le théorème de la divergence est utilisé pour convertir le terme de divergence en une intégrale sur la surface ∂V admettant n comme vecteur normal unitaire extérieur.

Soit $\{V_r\}_{r=1,\dots,N}$ une décomposition en volumes de contrôle du domaine Ω . Ces volumes de contrôle peuvent être identiques aux éléments du maillage ou centrés aux nœuds.

$$\Omega = \cup_r V_r \quad (1.33)$$

Introduisons la moyenne sur la cellule V_r pour obtenir :

$$u_r = \frac{1}{|V_r|} \int_{V_r} u(x) dx \quad (1.34)$$

qui est l'inconnue de base dans les méthodes volumes finis.

Soit $N(r)$ l'ensemble des volumes de contrôle partageant une face avec V_r . L'intégration de la loi de conservation sur le volume V_r est donc :

$$|V_r| \frac{du_r}{dt} + \sum_{x \in N(r)} \int_{V_r \cap V_x} f_i n_i dS = 0 \quad (1.35)$$

Une discrétisation complète est faite si une approximation de la dérivée en temps est réalisée. En général, nous utiliserons la méthode Euler implicite.

1.3.2 Méthode des éléments-finis discontinus de Galerkin

Soit \mathcal{H} un ensemble de maillages réguliers admissibles au sens usuel. Un maillage h de cet ensemble est constitué de cellules $K \in \mathcal{K}_h$ et l'ensemble des cellules constituant le maillage h est nommé \mathcal{K}_h . L'ensemble des arêtes est nommé $\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_h^{\text{int}} \cup \mathcal{S}_h^{\partial}$, il est constitué de l'ensemble des arêtes intérieures $\mathcal{S}_h^{\text{int}}$ et de l'ensemble des arêtes de bord \mathcal{S}_h^{∂} . La mesure de K (ou $S \in \mathcal{S}_h$) est notée $|K|$ ($|S|$ respectivement).

Pour une arête interne S , n_S est un vecteur normal unitaire, fixé arbitrairement. Si S est une arête du bord du domaine $\delta\Omega$, $n_S = n_\Omega$ est le vecteur normal unitaire extérieur.

Les espaces d'approximation basés sur des fonctions polynomiales par morceaux, de degré $k \in \mathbb{N}$ pour les cellules et les arêtes sont respectivement nommés :

$$D_h^k := \{v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_K \in P^k(K) \forall K \in \mathcal{K}_h\}$$

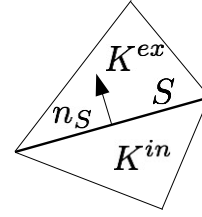
Soit $u \in D_h^k$, pour une arête interne $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_h^{\text{int}}$ et $x \in \mathcal{S}$

$$u_S^{\text{in}}(x) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} u(x - \varepsilon n_S)$$

$$u_S^{\text{ex}}(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u(x + \varepsilon n_S)$$

Ensuite, le saut et la moyenne de $x \in S$ sont définis par :

$$\begin{aligned} [u](x) &:= u_S^{\text{in}}(x) - u_S^{\text{ex}}(x) \\ \{u\}(x) &:= \frac{1}{2} (u_S^{\text{in}}(x) + u_S^{\text{ex}}(x)) \end{aligned}$$



tel que n_S est la normale à l'arête S commune aux cellules K^{in} et K^{ex} . Cette normale est orientée de K^{in} vers K^{ex} .

Par souci de concision, les notations suivantes seront utilisées pour les intégrations par morceaux :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_h} &= \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \\ \int_{\mathcal{S}_h} &= \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \int_S \end{aligned}$$

Considérons la discrétisation des équations d'Euler en variables conservatives basées sur l'espace d'approximation $(D_h^k)^m$, c.a.d., cherchons un vecteur u_h de polynômes discontinus par morceaux d'au plus cinq inconnues non nulles. Les différentes composantes sont les approximations de ρ , ρv et ρE . Dans le cas de l'ordre le plus faible $k = 0$, on a les approximations des grandeurs physiques ρ_h , v_h , E_h (et p_h). Pour $k > 0$, il n'y a pas d'approximation polynomiale pour v_h et E_h .

Dans un premier temps, définissons une forme $a_h : D_h^k \times D_h^k \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$a_h(u_h)(\phi_h) := - \int_{\mathcal{K}_h} \sum_{i=1}^d f_i(u_h) \cdot \frac{\partial \phi_h}{\partial x_i} + \int_{\mathcal{S}_h^{\text{int}}} f_{n_S}^\Sigma(u_h^{\text{in}}, u_h^{\text{ex}}) \cdot [\phi_h] + \int_{\mathcal{S}_h^\partial} f_{n_S}^\partial(u_h^{\text{in}}, u^{\text{D}}) \phi_h \quad (1.36)$$

avec le flux intérieur f_n^Σ et le flux de bord f_n^∂ . Comme le signe du terme de saut (et la définition de \cdot^{in} et \cdot^{ex}) dépend de l'orientation de n_S , il faut imposer :

$$f_{-n}^\Sigma(u_h^{\text{ex}}, u_h^{\text{in}}) = f_n^\Sigma(u_h^{\text{in}}, u_h^{\text{ex}}) \quad (1.37)$$

pour que a_h soit indépendant du choix de la normale. Le flux interne doit aussi vérifier la condition de consistance suivante :

$$f_{n_S}^\Sigma(u, u) = f_n(u) \quad (1.38)$$

Considérons maintenant le problème semi-discret :

$$\left\langle \frac{\partial u_h}{\partial t}, \phi_h \right\rangle + a_h(u_h)(\phi_h) = 0 \quad \forall \phi_h \in D_h^k. \quad (1.39)$$

Une discrétisation complète est faite si une approximation de la dérivée en temps est réalisée. En général, nous utiliserons la méthode Euler implicite qui donne :

$$\left\langle \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}, \phi_h \right\rangle + a_h(u_h^n)(\phi_h) = 0 \quad \forall \phi_h \in D_h^k \quad (1.40)$$

pour les instants $n = 1, 2, \dots$ et une approximation u_h^0 des données initiales.

La définition du flux interne est cruciale pour la stabilité en entropie de la méthode (E-flux, voir [3]). Nous considérons des flux upwind de la forme :

$$f_n^\Sigma(u^{\text{in}}, u^{\text{ex}}) = \{f_n(u)\} + D^\Sigma(u^{\text{in}}, u^{\text{ex}})[u] \quad (1.41)$$

qui remplissent les conditions présentées dans les équations (1.37) et (1.38). La matrice de diffusion D^Σ peut être définie de différentes manières : le choix le plus simple est une matrice diagonale dimensionnée par le maximum de la valeur absolue des valeurs propres (Lax-Friedrich). Un autre exemple classique est donné par le flux de Roe. Dans le cas du plus petit ordre $k = 0$, la méthode est assez proche d'une méthode volumes-finis centrée sur les cellules, et tous les flux développés dans ce contexte, comme provenant des méthodes de Riemann approchées (HLLC), peuvent être utilisés.

Pour les flux de bord, nous utilisons une approche similaire avec l'état externe au maillage défini à partir des conditions de bord.

Chapitre 2

Étude comparative du modèle Euler

La première partie de ce travail de thèse est consacrée à la comparaison de différentes méthodes de résolution des équations d'Euler pour un gaz parfait. Cette comparaison de méthodes a pour but de définir plus précisément la frontière des domaines de validité entre les modèles compressible et incompressible. Par ailleurs, on notera que cette étude comparative des deux modèles est faite en utilisant deux techniques de résolution numérique différentes, qui sont les volumes-finis (VF) et les éléments-finis (EF), présentées dans les sections 1.3.1 et 1.3.2. Cette remarque est d'autant plus importante qu'il est bien connu que les méthodes volumes-finis sont, en général, limitées au mieux à l'ordre 2 en espace alors que les méthodes éléments-finis peuvent plus facilement monter en ordre. Cette étude comparative a donc deux objectifs : comparer les modèles compressible et incompressible mais aussi comparer les méthodes volumes-finis et éléments finis, pour le modèle compressible uniquement. A cette fin, nous avons choisi d'utiliser trois logiciels réputés dans leurs domaines respectifs vis-à-vis de ces objectifs, et qui sont décrits dans la section 2.1. Ces méthodes sont comparées sur cinq cas test présentés dans la section 2.2 choisis de manière à couvrir une large gamme de nombre de Mach.

2.1 Les différents codes utilisés

Les trois logiciels testés ont des origines diverses et utilisent des méthodes différentes pour simuler différents types d'écoulements de fluides. FLUENT et *elsA* ont tout d'abord été choisis en fonction de leur notoriété et leur degré d'expertise dans les résolutions respectives du modèle incompressible et du modèle compressible. Bien que ces deux logiciels soient spécialisés dans la simulation numérique de modèles différents, ils utilisent tous deux une méthode volumes-finis quant à la résolution. Un premier objectif sera de comparer les résultats issus de ces deux logiciels dans le but d'avoir une meilleure connaissance de la limite imposée par la résolution des modèles incompressible et compressible. Par ailleurs, le développement à Pau du logiciel Concha basé sur la résolution éléments-finis DG du modèle compressible, technique différente des deux logiciels précédents, permettra de comparer les méthodes volumes-finis et éléments-finis pour le modèle compressible.

Les caractéristiques importantes à noter des trois logiciels sont regroupées dans le tableau 2.1.

2.1.1 Concha

Le logiciel Concha [4] est une librairie académique, développé à l'université de Pau et des pays de l'Adour (UPPA). Parmi tous les solveurs éléments-finis, ce code utilise les éléments-finis

discontinus de Galerkin (DG ou DGFEM) pour les problèmes hyperboliques de la mécanique des fluides (voir par exemple [5]).

Dans cette étude, seul le flux numérique HLLC [6] avec le limiteur Tu [7] est considéré. Les résultats présentés sont obtenus avec des fonctions d'approximation constante par mailles (P0 et Q0) ou linéaire par mailles (P1 et Q1).

L'algorithme utilisé pour le pas de temps est le schéma implicite Backward Différenciation Formulas à deux pas (BDF2) couplé à un algorithme de Newton.

2.1.2 *elsA*

Depuis 1997, le logiciel *elsA* est un solveur de CFD développé par l'ONERA, le centre de recherche français en aérospatial. Ce logiciel regroupe les résultats innovants de la recherche. Dans le même temps, il est utilisé d'une part en recherche comme outil pour la compréhension de phénomènes physiques et d'autre part c'est un logiciel industriel de simulations appliquées à la CFD pour de grosses entreprises du secteur aéronautique. La plate-forme de simulation CFD multi-applications *elsA* est basée sur la simulation des équations compressibles 3D de Navier-Stokes et couvre un très vaste domaine d'applications aérospatiales : turbomachines, avions, hélicoptères, rotors contra-rotatif ouverts (CROR), véhicule aérien sans pilote (UAV), missiles, lanceurs ... (voir [8] et <http://elsa.onera.fr> pour une liste des accomplissements en recherche et dans l'industrie).

Dans le cadre de cette étude, *elsA* simule les équations d'Euler avec la méthode des volumes-finis en utilisant, entre autres, des solveurs de Riemann approchés. Pour la discrétisation spatiale, deux schémas de type upwind et le schéma centré de Jameson sont utilisés afin de calculer les flux aux interfaces de chaque cellule. Pour les schémas upwind, on utilise les schémas de Roe [9] et d'AUSM+(P) MILES [10] (abrégé en AUSM par la suite). Le schéma AUSM est dédié aux simulations à bas nombre de Mach. Dans tous les cas, les paramètres relatifs à AUSM sont définis à partir des valeurs infini amont. Ces deux schémas sont couplés au limiteur du second ordre minmod (voir Roe [9]) sans pré-conditionnement à basse vitesse.

Toutes les simulations sont réalisées avec la version 3.3-p2 du code.

2.1.3 FLUENT

Le logiciel FLUENT, version R15.0.7, est un logiciel commercial de simulation CFD développé par ANSYS Inc. Au travers d'un grand nombre de modèles physiques (laminaire, turbulent, réactif...) , il permet la modélisation d'écoulements variés pour de nombreuses applications industrielles. Compte tenu de son ancienneté, FLUENT figure parmi les premiers logiciels du genre qui a su évoluer en fonction de la demande, il est par conséquent très utilisé dans l'industrie comme outil multi-applications (voir [11] et <http://www.ansys.com/Products/Fluids/ANSYS-Fluent>).

Dans le cadre de cette étude, les équations d'Euler sont simulées avec la méthode des volumes-finis et deux méthodes numériques distinctes. La première dédiée aux simulations d'écoulements incompressibles est la méthode Pressure-Based (PBM) avec les algorithmes du type SIMPLE [12] et PISO [13]. La seconde est (comme *elsA*) une méthode Density-Based (DBM) dédiée à la simulation d'écoulements compressibles. Le schéma utilisé pour les calculs des flux aux interfaces correspond à un schéma de type Roe [9], comme celui implanté dans *elsA*. Il faut cependant noter qu'il existe de nombreuses variantes à la programmation du schéma de Roe avec des nuances non négligeables pouvant avoir une influence sur la capture de certains écoulements.

2.2 Benchmark : cas test choisis

Les méthodes précédentes sont comparées sur cinq cas test en deux dimensions (2D). Ces cas test couvrent une large gamme de nombre de Mach, allant de 0 à 3, et permettent de mettre en évidence les difficultés liées à ces vitesses : ondes de chocs (droite et oblique), ondes d'expansions, zones de raréfactions et zones tourbillonnaires... Tous ces cas test sont des écoulements non-visqueux sans diffusion thermique, stationnaire ou transitoire. Les logiciels associés aux méthodes numériques éprouvées font donc l'objet de simulations numériques des équations d'Euler. La plupart des cas test choisis admettent une solution analytique, un descriptif est présenté dans le tableau 2.2.

Sauf indication contraire, un schéma d'ordre 2 est utilisé pour la discrétisation en espace et en temps des différentes simulations.

Le logiciel UNAMALLA (cf <http://www.mathmoo.unam.mx/unamalla/>) est utilisé pour générer les maillages structurés de haute qualité en quadrangle. Les maillages initiaux sont identiques pour chaque cas test. Lorsque la précision d'une simulation n'est pas suffisante, le maillage est raffiné jusqu'à obtenir un degré de précision suffisant. Les comparaisons sont réalisées à iso-maillage.

2.2.1 Cas test de Fraenkel (FTC)

Le premier cas test étudié, du nom de Fraenkel [14], est un cas 2D, stationnaire, incompressible, avec un nombre de Mach allant de 0 à 5×10^{-4} . Dans son article, Fraenkel propose une solution analytique à un problème d'écoulement Eulerien autour d'un cylindre avec ρ constante. La particularité de ce cas est que le profil de vitesse en entrée est cisailé de manière symétrique par rapport à l'axe horizontal du cylindre, tout en étant dépourvu de frottement. Fraenkel montre qu'en théorie, il existe quatre tourbillons parfaitement symétriques situés en amont et en aval du cylindre. La définition de ce cas étant symétrique par rapport à l'axe $y = 0$, deux études sont faites : la première en ne considérant qu'un demi-domaine avec une condition de symétrie en $y = 0$ (section 2.2.1.1), la seconde sur le domaine complet (section 2.2.1.2). Le cas test de Fraenkel relève de la résolution numérique du modèle Euler incompressible. Bien que le modèle originel d'Euler soit simplifié par la prise en compte du fait que la divergence de la vitesse soit nulle, il reste un cas difficile à résoudre. C'est la raison pour laquelle cette étude s'est effectuée en deux étapes, la première en forçant la symétrie et la seconde en considérant le domaine complet.

Dans le cas de la première étude, un demi-domaine rectangulaire de $20m$ de long et de $5m$ de haut, privé d'un demi-cylindre de rayon $1m$, placé au centre de la paroi inférieure est utilisé. Dans ce domaine, le profil de vitesse en entrée est défini avec l'équation (2.1) tandis que les autres grandeurs restent constantes en entrée et sont définies à partir des équations (2.2) à (2.4).

$$V_{in} = \begin{pmatrix} 0.034y \\ 0 \end{pmatrix} m.s^{-1} \quad (2.1)$$

$$\rho_{in} = 1.2kg.m^{-3} \quad (2.2)$$

$$p_{in} = 101366.3Pa \quad (2.3)$$

$$T_{in} = 294.27K \quad (2.4)$$

Pour la seconde étude, le domaine est rectangulaire de $20m$ de long et $10m$ de haut, centré en 0, privé au centre d'un cylindre de rayon $1m$ (figure 2.1). Pour garder le profil de vitesse

TABLEAU 2.1 – Spécificités relatives aux logiciels testés

| | Modèle | Méthode | Type de maillage | Méthode numérique |
|-------------|----------------|--|------------------------|---------------------------------------|
| FLUENT | Incompressible | Volumes-finis | Triangle ou quadrangle | Pressure-Based |
| | Compressible | Volumes-finis | Triangle ou quadrangle | Density-Based |
| <i>elsA</i> | Compressible | Volumes-finis | Quadrangle structuré | Solveur de Riemann (Roe, AUSM ...) |
| Concha | Compressible | Éléments-finis discontinus de Galerkin | Triangle ou quadrangle | Solveur de Riemann (HLLC ...) |

TABLEAU 2.2 – Résumé des différents cas test

| Cas test | Mach | Compressibilité | État | Solution analytique |
|---------------------------|----------------|-----------------|--------------|---------------------|
| Le cas de Fraenkel | 0 à $5.e^{-4}$ | Incompressible | Stationnaire | Oui |
| La tuyère à basse vitesse | 0.036 | Incompressible | Stationnaire | Oui |
| Le tube à choc | - | Compressible | Transitoire | Oui |
| Le vortex isentropique | 2.39 | Compressible | Transitoire | Oui |
| Le cylindre à Mach 3 | 3 | Compressible | Stationnaire | Non |

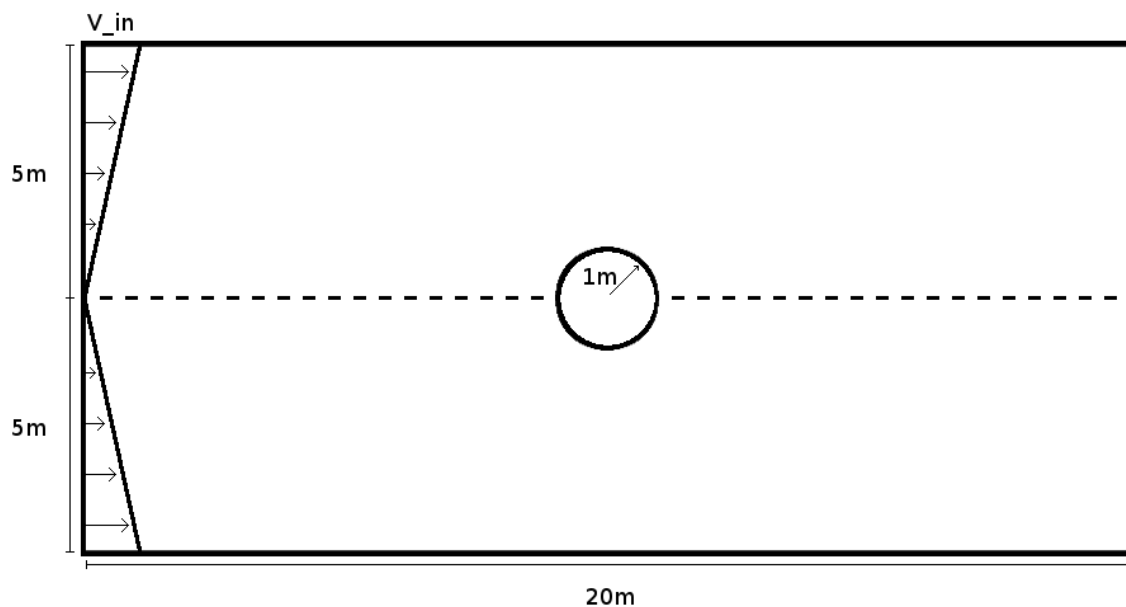


FIGURE 2.1 – Domaine complet de simulation pour FTC : cas d'un écoulement symétrique autour d'un cylindre.

en entrée symétrique, par rapport à $y = 0$, la valeur absolue de la hauteur doit être utilisée (équation (2.5)), les autres grandeurs sont inchangées (équations (2.2) à (2.4)).

$$V_{in} = \begin{pmatrix} 0.034|y| \\ 0 \end{pmatrix} m.s^{-1} \quad (2.5)$$

On rappelle que d'après Fraenkel [14] pour un fluide Eulérien incompressible, lorsqu'un écoulement avec un tel profil de vitesse de symétrie horizontale rencontre un cylindre à basse vitesse, une solution analytique constituée de quatre recirculations existe : deux en amont et deux en aval du cylindre tout en conservant la symétrie d'axe $y = 0$. Cette solution analytique est représentée sur la figure 2.2.

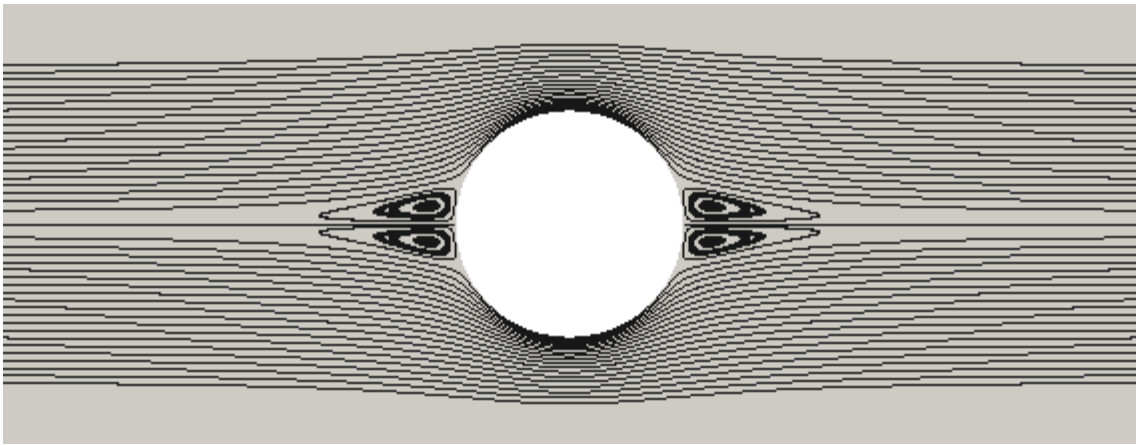


FIGURE 2.2 – Zoom sur la solution analytique pour le cas de Fraenkel. Visualisation de 50 lignes de courant en amont et en aval du cylindre.

2.2.1.1 Résultats sur le demi-domaine, avec une condition de symétrie

Les différentes simulations de cet écoulement permanent sont réalisées sur des maillages en quadrangles structurés, avec des méthodes d'ordre 2 en espace. Le premier maillage est constitué de 6400 éléments. Après convergence du calcul, si la solution obtenue ne correspond pas à celle de Fraenkel, une simulation est relancée sur un maillage plus fin.

Avec le logiciel FLUENT, quelle que soit la méthode utilisée (compressible Roe ou AUSM ; incompressible SIMPLE ou PISO) et quel que soit le degré de raffinement du maillage (ici jusqu'à 108960 éléments), aucune solution stationnaire correspondant à la solution analytique de Fraenkel, n'est obtenue comme le montre la figure 2.3. On retrouve dans le cas présent une recirculation en amont du cylindre et une large recirculation en aval sur toute la longueur entre le cylindre et le bord de notre domaine. Les tourbillons observés se déplaçant sans cesse, la solution semble ne pas converger.

Avec le logiciel *elsA*, la solution obtenue diffère en fonction du schéma utilisé.

Avec un maillage de 6400 éléments, le schéma AUSM est capable de capturer les recirculations de la solution analytique (figure 2.4). Cependant, en utilisant le schéma de Roe, sur un maillage allant jusqu'à 40000 éléments, les lignes de courant suivent le bord du domaine et ne retrouvent pas les recirculations attendues (figure 2.5), bien qu'un état stationnaire soit atteint.

Avec le logiciel Concha et le flux HLLC, que le maillage soit structuré (6400 quadrangles) avec une méthode DG1 (figure 2.6) ou qu'il soit non structuré (4608 triangles) avec une méthode

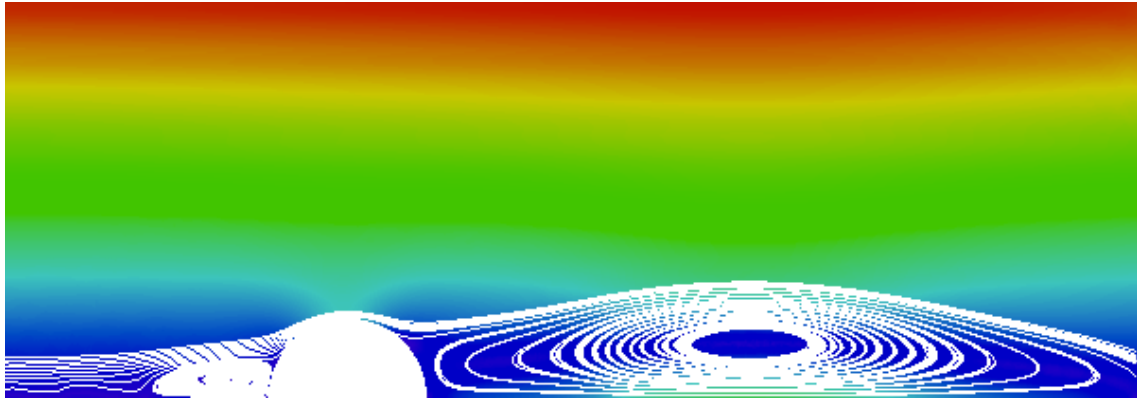


FIGURE 2.3 – Solution de FLUENT sur un maillage de 108960 éléments, à un instant donné. Les lignes de courant (blanches) sont superposées au module de la vitesse (cf. iso-couleurs).

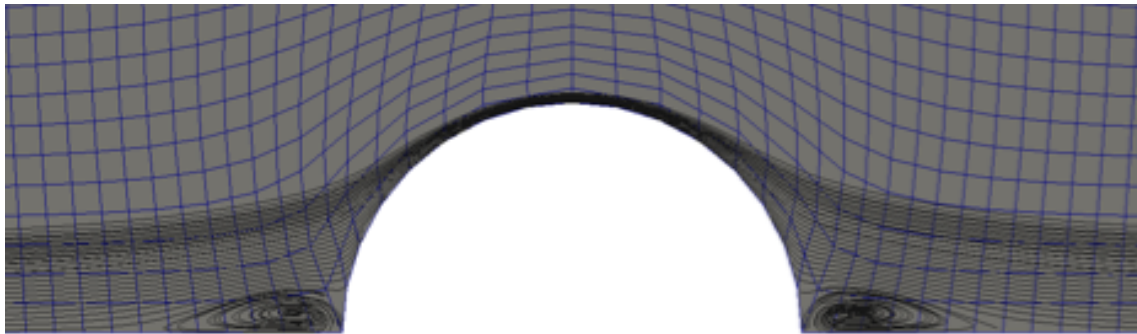


FIGURE 2.4 – Solution avec le schéma AUSM sur un maillage de 6400 éléments (*elsA*).

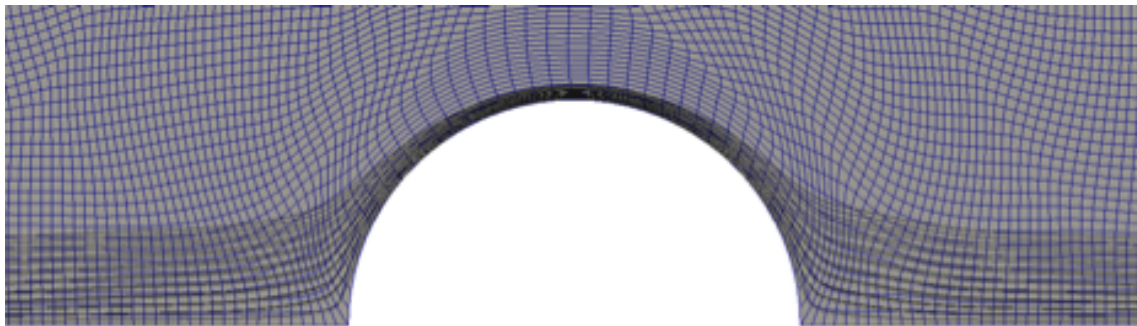


FIGURE 2.5 – Solution avec le schéma Roe sur un maillage de 40000 éléments (*elsA*).

DG0 ou DG1 (figure 2.7), la solution converge et capture les recirculations.

Ces résultats correspondent aux travaux de Guillard [15]. La méthode au premier ordre (DG0), appliquée sur des maillages en triangle arrive à capturer les zones de recirculation alors que l'utilisation d'un maillage en quadrangles ne le permet pas. H. Guillard montre que, dans le cas de la simulation des équations d'Euler à bas nombre de Mach, avec une méthode volumes-finis et un schéma upwind, le manque de précision par rapport aux méthodes incompressibles disparaît avec l'utilisation d'un maillage en triangles. Ce manque de précision disparaît aussi avec l'utilisation d'une méthode d'ordre plus élevé (au moins DG1), quel que soit le type d'élément utilisé.

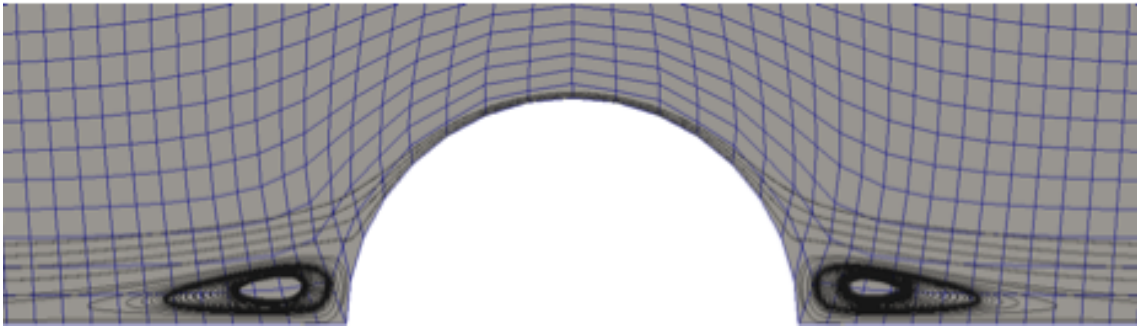


FIGURE 2.6 – Solution avec Concha DG1 sur un maillage de 6400 quadrangles.

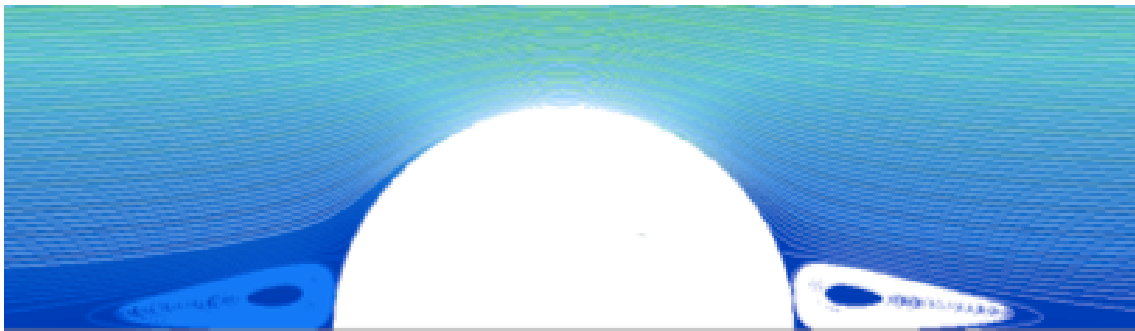


FIGURE 2.7 – Solution avec Concha DG0 sur un maillage de 4608 triangles.

Afin de comparer les différentes solutions, par rapport à la solution analytique, le module de la vitesse est extrait sur la paroi du cylindre puis divisé par le module de la vitesse infini amont, à une hauteur de $1m$ ($V_\infty = 0.034m.s^{-1}$). Les différentes extractions sont représentées sur la figure 2.8, le tableau 2.3 présente les erreurs de ces extractions par rapport à la solution analytique de Fraenkel.

On remarque qu'avec le flux de Roe, le module de vitesse sur la paroi du cylindre est assez proche (12% d'erreur en norme L^2 relative) de celle de la solution analytique bien que l'on ne retrouve pas les recirculations attendues. Avec le flux AUSM, on retrouve les recirculations attendues mais la vitesse au sommet du cylindre étant moins importante que celle de la solution analytique, la norme L^2 relative de l'erreur est plus importante (28.9%). Avec le flux HLLC, la vitesse au sommet est correcte, on retrouve les recirculations attendues mais la norme L^2 relative de l'erreur est quand même de 11.1% car les recirculations obtenues sont plus écrasées que celles de la solution analytique.

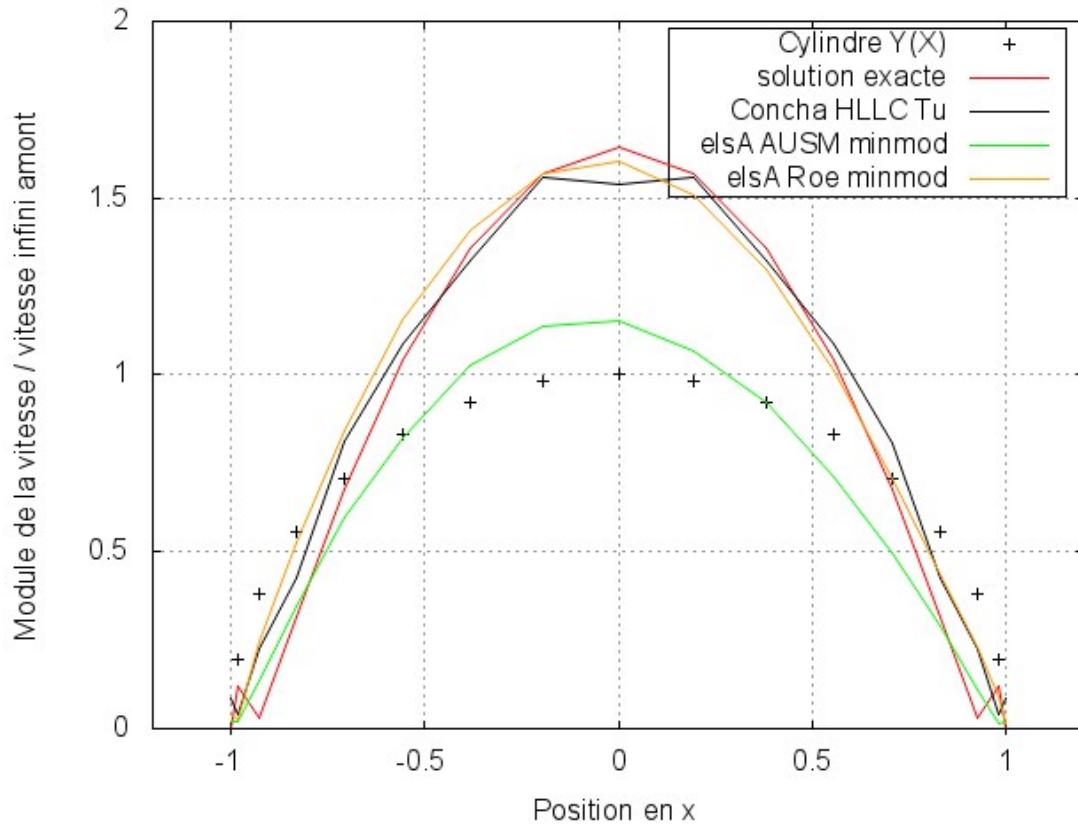


FIGURE 2.8 – Extraction du module de la vitesse le long de la paroi du cylindre pour le cas FTC, sur le demi-domaine.

TABLEAU 2.3 – Norme L^2 relative des erreurs par rapport à la solution analytique pour le cas FTC, sur le demi-domaine.

| | Module de la vitesse le long de la paroi du cylindre |
|-------------------------|--|
| Concha HLLC Tu | $1.11e^{-1}$ |
| <i>elsA</i> AUSM minmod | $2.89e^{-1}$ |
| <i>elsA</i> Roe minmod | $1.20e^{-1}$ |

2.2.1.2 Résultats sur le domaine complet avec un profil d'entrée conforme à la solution analytique de Fraenkel

Afin de simuler cet écoulement permanent, sans imposer de condition de symétrie, un nouveau maillage de 6000 quadrangles est utilisé. Ce maillage a été défini sur le quart supérieur droit du domaine, avec 1500 quadrangles puis symétrisé deux fois : par rapport à $x = 0$ puis par rapport à $y = 0$.

En plus de supprimer la condition de symétrie, le profil de vitesse en entrée est redéfini en utilisant les équations de Fraenkel (cf. Katate Mastsuka [16]). À partir de l'équation (2.6) définissant les lignes de courant, il est possible de retrouver les expressions de la vitesse : équations (2.7) à (2.10).

$$\forall(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{si } x = (-1, 0) \text{ ou } x = (1, 0) \\ \frac{1}{2}\omega y^2 + \frac{\omega}{2\pi} \left[\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) y + \frac{xy(r^4-1)}{2r^4} \ln \left(\frac{r^2-2x+1}{r^2+2x+1}\right) \right] & \text{sinon} \\ + \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{1}{r^4}\right) (x^2 - y^2) - 2 \right) \arctan \left(\frac{2y}{r^2-1}\right) + U_\infty \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) y & \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\forall(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$v_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x = (-1, 0) \text{ ou } x = (1, 0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\text{où } \frac{\partial \phi}{\partial y} = \omega |y| + \frac{\omega}{2\pi} \left[\frac{2y^2}{r^4} + \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{r^4} + \frac{4y^2}{r^6}\right) \ln \left(\frac{r^2-2x+1}{r^2+2x+1}\right) \right. \\ \left. + \frac{4x^2y^2(1-\frac{1}{r^4})}{(r^2-2x+1)(r^2+2x+1)} - \left(\frac{2|y|(x^2-y^2)}{r^6} + \left(1 + \frac{1}{r^4}\right)|y|\right) \arctan \left(\frac{2|y|}{r^2-1}\right) \right. \\ \left. + \frac{\left(\left(1 + \frac{1}{r^4}\right)(x^2-y^2) - 2\right)(x^2-y^2-1)}{(r^2-1)^2+4y^2} \right] + U_\infty \left(1 - \frac{x^2-y^2}{r^4}\right) \quad (2.8)$$

$$\forall(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$v_y = \begin{cases} 0 & \text{si } x = (-1, 0) \text{ ou } x = (1, 0) \\ -\frac{\partial \phi}{\partial x} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\text{où } -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\omega}{2\pi} \left[\frac{2xy}{r^4} + \frac{y}{2} \left(1 - \frac{1}{r^4} + \frac{4x^2}{r^6}\right) \ln \left(\frac{r^2-2x+1}{r^2+2x+1}\right) \right. \\ \left. + \frac{2xy(x^2-y^2-1)\left(1-\frac{1}{r^4}\right)}{(r^2-2x+1)(r^2+2x+1)} - \left(\frac{2x(x^2-y^2)}{r^6} - \left(1 + \frac{1}{r^4}\right)x\right) \arctan \left(\frac{2y}{r^2-1}\right) \right. \\ \left. - \frac{2xy\left(\left(1 + \frac{1}{r^4}\right)(x^2-y^2) - 2\right)}{(r^2-1)^2+4y^2} \right] - U_\infty \frac{2xy}{r^4} \quad (2.10)$$

Il faut ensuite définir correctement les paramètres ω et U_∞ . L'objectif étant de retrouver le profil de vitesse imposé sur le demi-domaine (équation (2.1)), il faut donc résoudre le système défini par l'équation (2.11). La solution de ce système est présentée équation (2.12).

$$\begin{cases} V_0 = v_x(-10, 0) = 0m.s^{-1} \\ V_1 = v_x(-10, 1) = 0.034m.s^{-1} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{V_1 - \frac{1010200}{1009899} V_0}{1 + \frac{1010200 * 59686845206167}{1009899 \times 4503599627370496\pi} - \frac{1810936964773}{140737488355328\pi}} \\ \simeq V_1 - V_0 \simeq 0.034 \\ U_\infty = \frac{100}{99} (V_0 + \frac{59686845206167}{4503599627370496\pi} \omega) \\ \simeq 0.042V_1 + 0.968V_0 \simeq 1.4e^{-3} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

En imposant $\omega = 0.034$ et $U_\infty = 1.4e^{-3}$ dans les équations (2.7) et (2.9), le profil de vitesse est correct pour v_x (figure 2.9), la vitesse v_y n'est pas nulle (figure 2.10) mais reste très faible inférieure à $1.e^{-4}$.

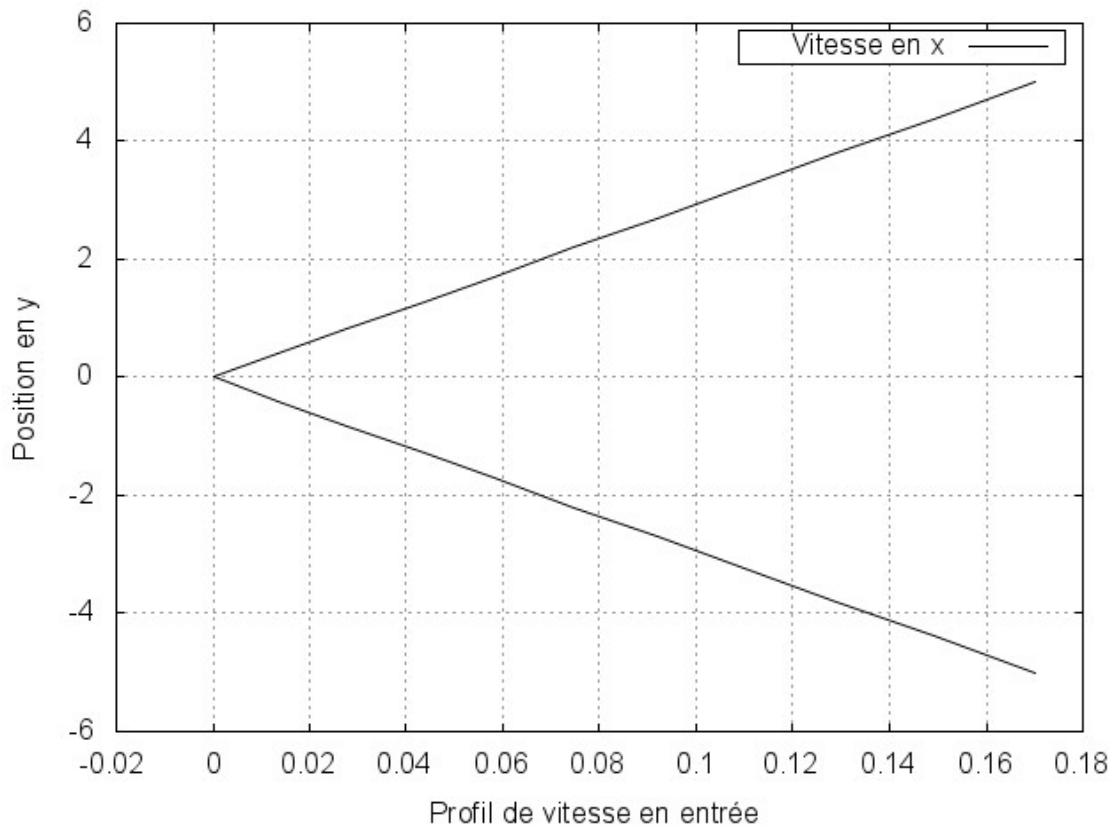


FIGURE 2.9 – Profil de la vitesse en x en entrée du domaine de Fraenkel, $x = -10$ et $y \in [-5, 5]$

Les solutions obtenues avec *elsA*, pour les flux AUSM et Roe, ne sont pas toujours symétriques (figures 2.11 et 2.12). L'utilisation d'un préconditionneur basse vitesse avec le flux de Roe permet de retrouver des recirculations mais elles ne correspondent pas à celles de la solution de Fraenkel (figure 2.13). Afin de retrouver une solution correspondant à la solution de Fraenkel, il est nécessaire d'utiliser le schéma AUSM et d'ajuster certains paramètres : il faut diminuer le paramètre α , constante utilisé dans le schéma AUSM, de 4×10^{-2} (valeur par défaut dans *elsA*) à 10^{-4} . Il est aussi nécessaire de diminuer le pas de temps tel que le CFL soit inférieur ou égal à 1 même avec un schéma implicite. Dans cette configuration, il est possible d'obtenir la solution présentée en figure 2.14.

Avec Concha et le flux HLLC, la solution obtenue correspond à la solution de Fraenkel, comme le montre la figure 2.15 où les lignes de courant de la solution de Fraenkel sont super-

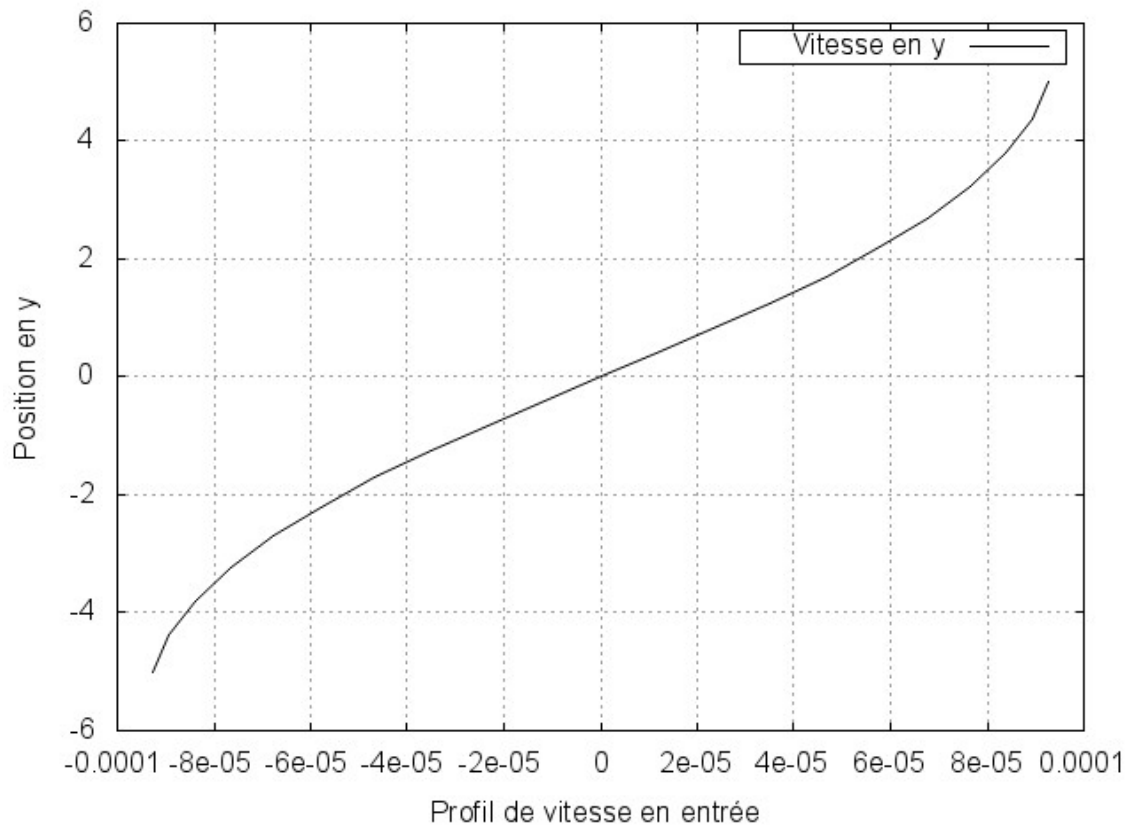


FIGURE 2.10 – Profil de la vitesse en y en entrée du domaine de Fraenkel, $x = -10$ et $y \in [-5, 5]$

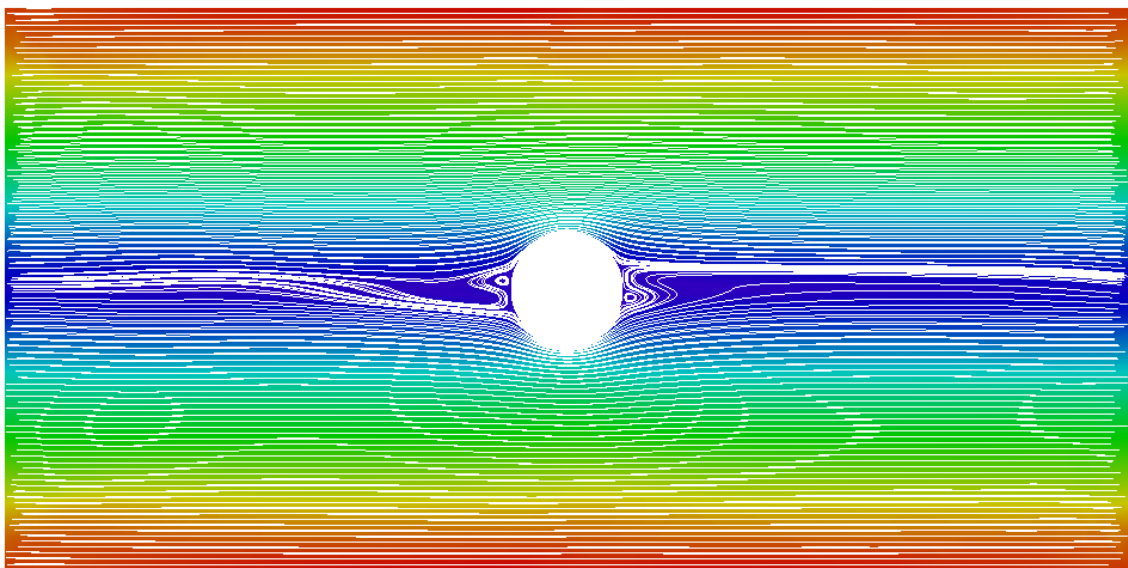


FIGURE 2.11 – Lignes de courant sur le module de la vitesse pour le cas FTC, sur le domaine complet, avec le flux AUSM, sans ajuster les paramètres.

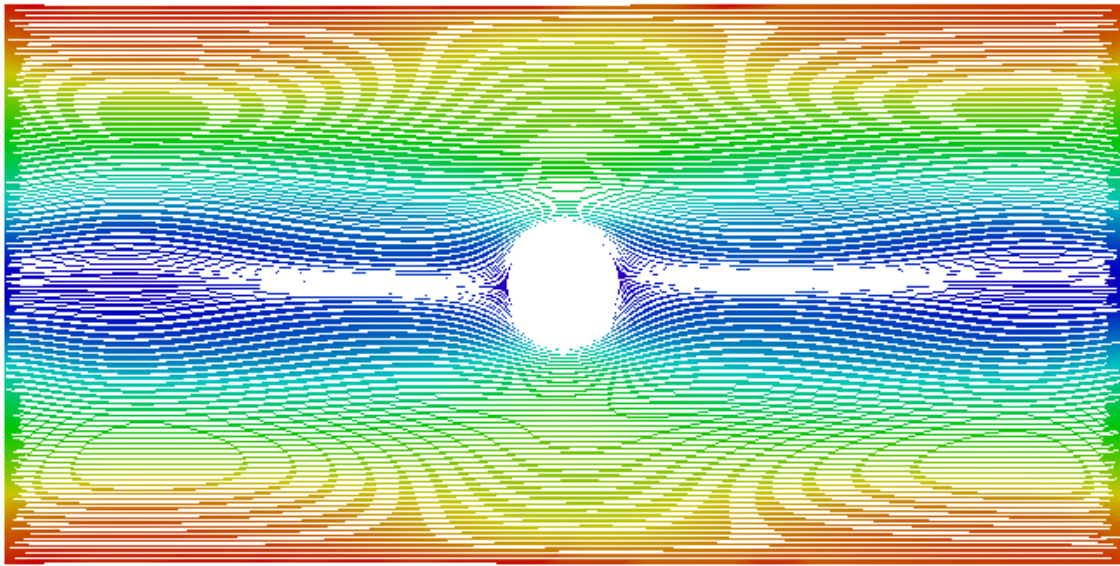


FIGURE 2.12 – Lignes de courant sur le module de la vitesse pour le cas FTC, sur le domaine complet, avec le flux de Roe.

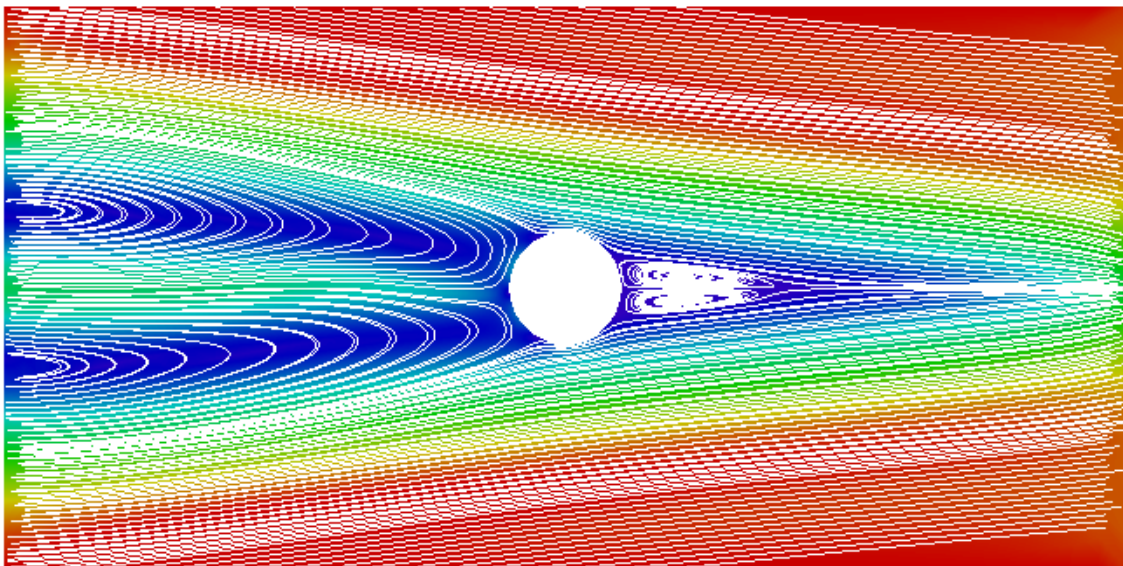


FIGURE 2.13 – Lignes de courant sur le module de la vitesse pour le cas FTC, sur le domaine complet, avec le flux Roe et un préconditionneur basse vitesse.

posées à celles obtenues avec le flux HLLC. Avec le même modèle, si l'on utilise un maillage de 3182 triangles ne présentant aucune symétrie (figure 2.16), la solution présente des recirculations similaires à celles de la solution de Fraenkel. On observe une relative perte de symétrie (figures 2.17 et 2.18) qui pourrait être corrigée en raffinant le maillage qui reste très grossier.

Afin de comparer les différentes solutions à la solution analytique, comme pour l'étude sur le demi-domaine, le module de la vitesse est extrait le long de la paroi du cylindre. L'évolution de cette grandeur est représentée sur la figure 2.19 et la comparaison avec la solution analytique est faite au tableau 2.4.

D'après ces résultats, il est donc possible de conclure que la méthode qui s'approche le plus de la solution de Fraenkel est la méthode éléments finis DG, avec le flux HLLC. Il est par ailleurs surprenant de noter que la pire des solutions obtenues soit celle issue de la résolution du modèle Euler incompressible que ce soit par les méthodes SIMPLE ou PISO.

TABLEAU 2.4 – Norme L^2 relative des erreurs par rapport à la solution analytique pour le cas FTC, sur le domaine complet avec le maillage de 6000 quadrangles.

| | Module de la vitesse le long de la paroi du cylindre |
|-------------------------|--|
| Concha HLLC Tu | $9.93e^{-2}$ |
| <i>elsA</i> AUSM minmod | $1.87e^{-1}$ |
| <i>elsA</i> Roe minmod | $2.20e^{-1}$ |

2.2.2 Tuyère à basse vitesse (ISLN)

Les écoulements dans des tuyères sont largement étudiés dans la littérature. Ce cas test possède l'avantage d'avoir une solution analytique. Il s'agit ici d'un écoulement dans une géométrie faiblement convergente-divergente avec un nombre de Mach en entrée de 0.036, donc faible par rapport à 1. En négligeant les effets visqueux, il est donc possible de déterminer la solution analytique de cet écoulement mono-dimensionnel, malgré le caractère 2D de la tuyère [17]. La solution recherchée est la solution permanente d'un écoulement subsonique à bas nombre de Mach dans des conditions atmosphériques. Il est donc raisonnable de penser que le fluide puisse avoir le comportement d'un fluide incompressible.

La tuyère étudiée ici (figure 2.20) fait $1m$ de long et $0.1m$ de diamètre au niveau de l'entrée et de la sortie. Le diamètre au col est de $0.09m$.

Le maillage utilisé pour les simulations est structuré, constitué de 1000 quadrangles.

Les résultats (figures 2.21 et 2.22 et le tableau 2.5) obtenus avec les différentes méthodes sont tous en bon accord avec la solution analytique. En effet, la norme L^2 du tableau 2.5 indique une erreur inférieure à 1.5‰ sur le nombre de Mach et une erreur inférieure à 7% sur la pression. On peut remarquer que FLUENT donne des solutions quasiment identiques avec les méthodes Density-Based (pour le compressible) et Pressure-Based (pour l'incompressible). Par contre, les solutions obtenues par *elsA* et FLUENT avec le flux de Roe sont assez différentes, bien que la méthode soit la même.

2.2.3 Tube à choc (ST)

Parmi tous les tubes à choc de Sod [18], le cas test transitoire étudié est décrit au tableau 2.6. A l'instant initial, les états *Left* et *Right* ($(\rho, p, V)^L$ et $(\rho, p, V)^R$) sont séparés par une discontinuité au centre du domaine de simulation ($x = 0$). Ce cas test relève d'une simulation 1D ou quasi 2D. En effet la solution analytique bien que donnée sur une ligne de courant

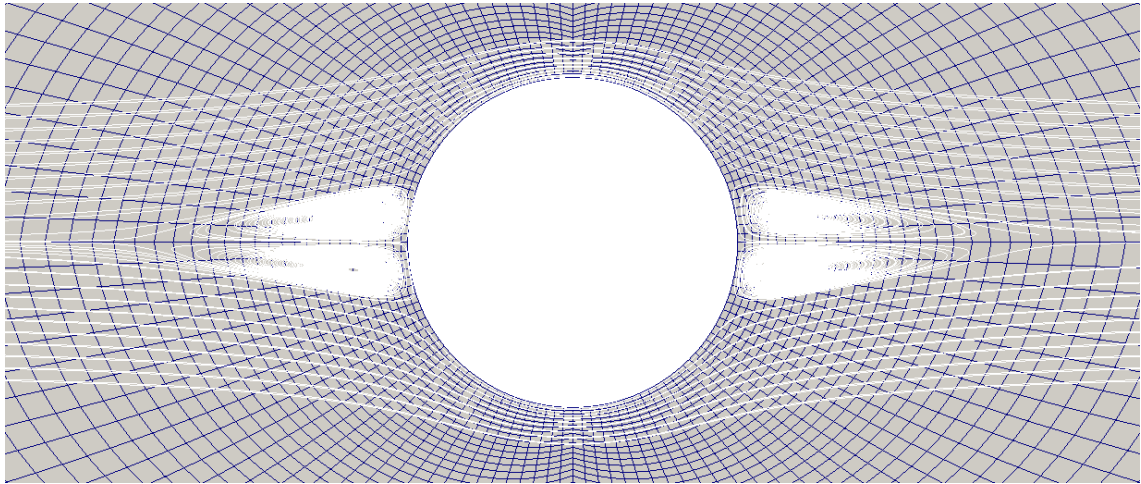


FIGURE 2.14 – Lignes de courant pour le cas FTC, sur le domaine complet, avec le flux AUSM et les paramètres ajustés.

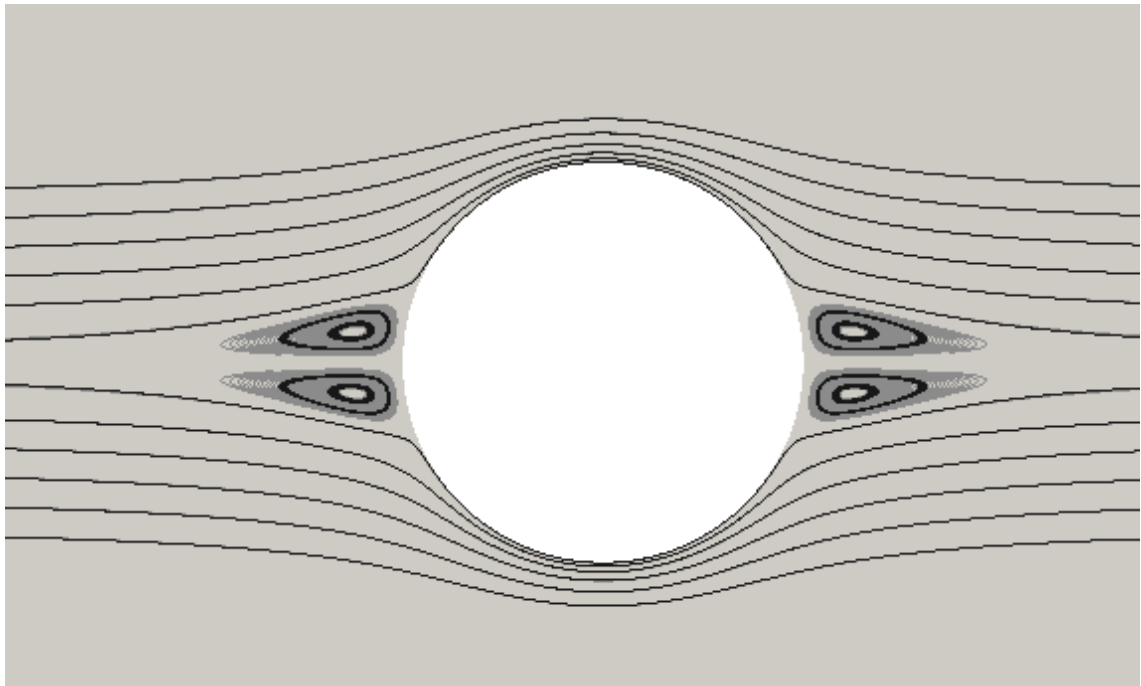


FIGURE 2.15 – Lignes de courant pour le cas FTC, sur le domaine complet avec le maillage en quadrangles, solution de Fraenkel (noir) superposée à la solution avec HLLC (gris).

TABLEAU 2.5 – Norme L^2 relative des erreurs par rapport à la solution analytique pour ILSN.

| | Nombre de Mach | Pression |
|-------------------------|----------------|--------------|
| Concha HLLC Tu | $1.60e^{-3}$ | $3.20e^{-2}$ |
| <i>elsA</i> AUSM minmod | $1.45e^{-3}$ | $3.20e^{-2}$ |
| <i>elsA</i> Roe minmod | $1.05e^{-3}$ | $6.49e^{-2}$ |
| FLUENT DBM | $1.50e^{-3}$ | $3.09e^{-2}$ |
| FLUENT PBM | $1.49e^{-3}$ | $3.09e^{-2}$ |

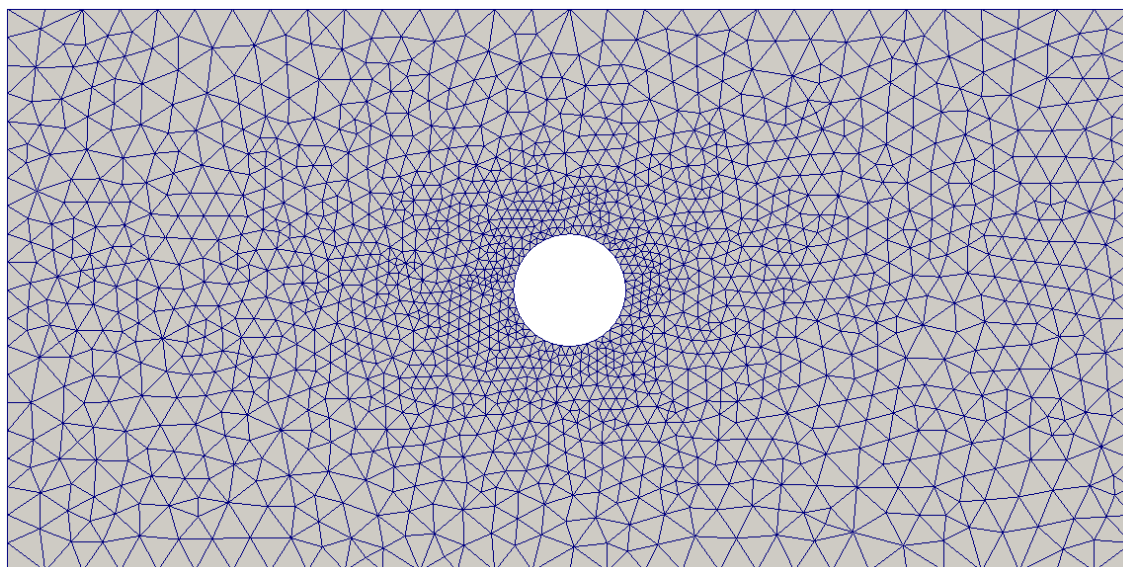


FIGURE 2.16 – Maillage en triangle pour le cas FTC.

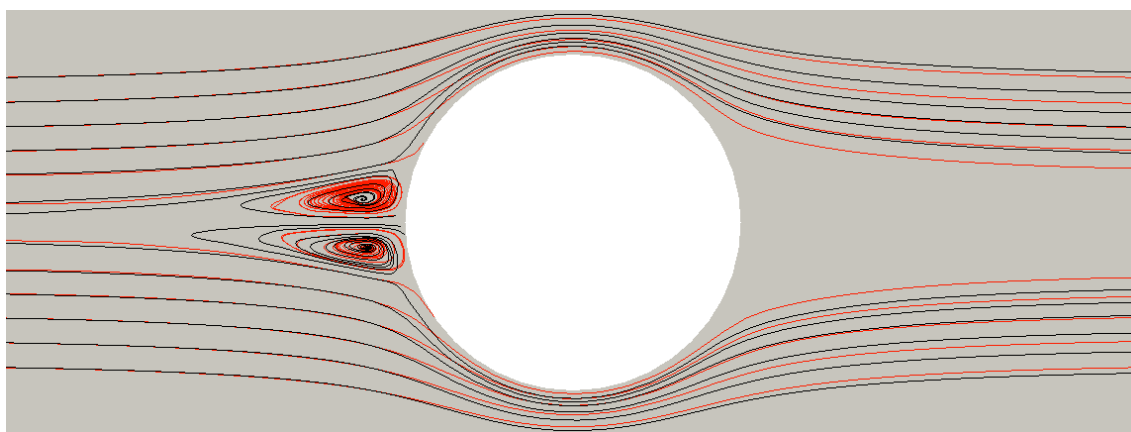


FIGURE 2.17 – Lignes de courant, en amont du cylindre, pour le cas FTC, sur le domaine complet avec le maillage en triangle, solution avec HLLC (rouge) superposée à la solution de Fraenkel (en noir, calculée sur ce maillage).

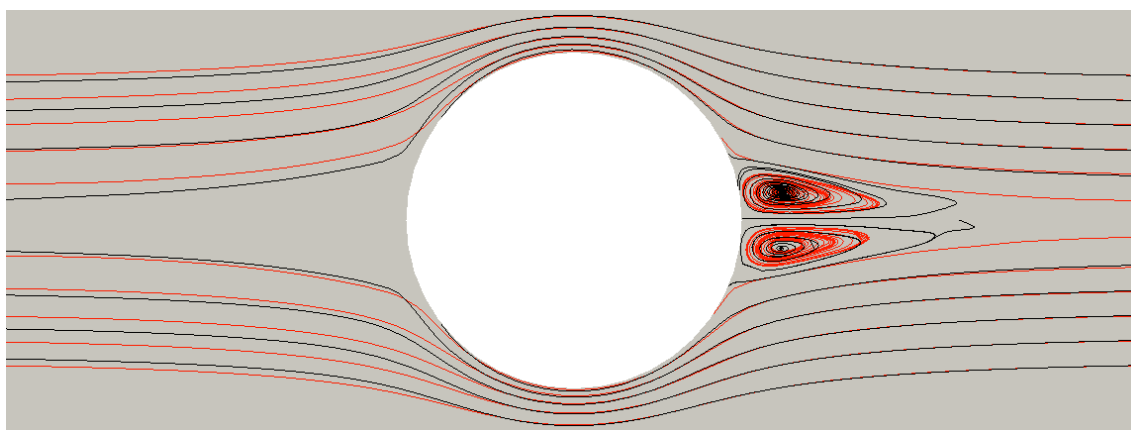


FIGURE 2.18 – Lignes de courant, en aval du cylindre, pour le cas FTC, sur le domaine complet avec le maillage en triangle, solution avec HLLC (rouge) superposée à la solution de Fraenkel (en noir, calculée sur ce maillage).

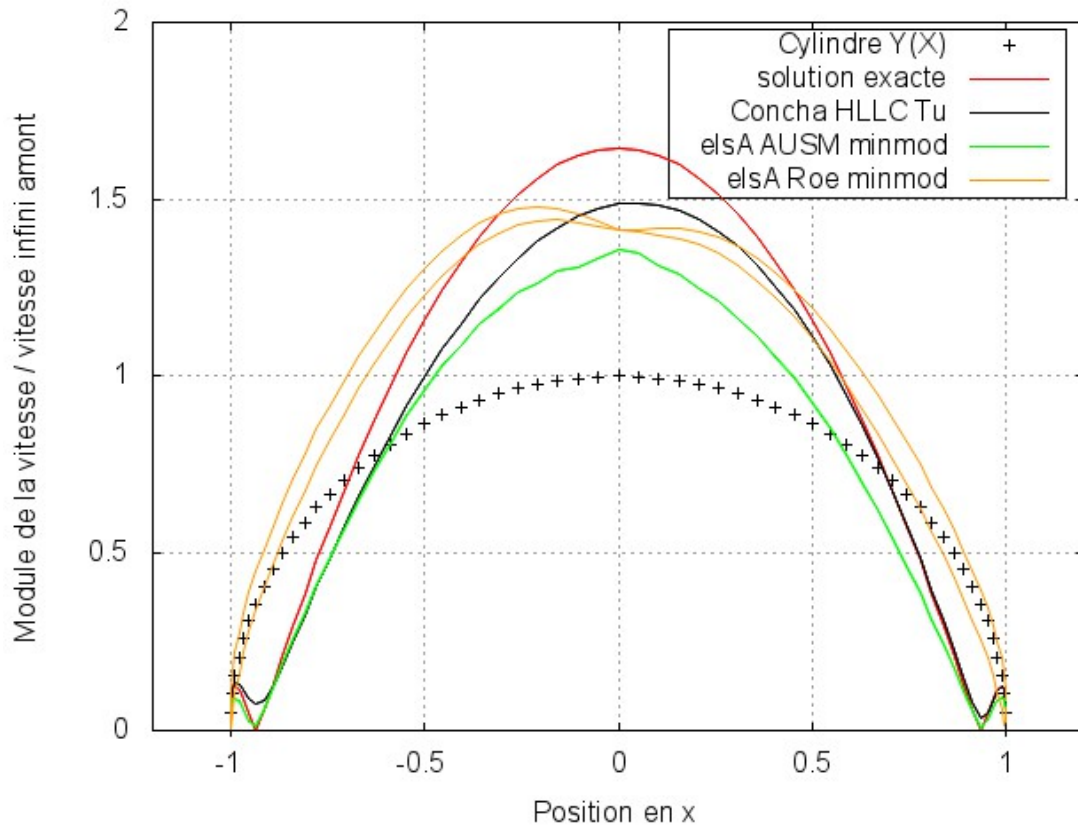


FIGURE 2.19 – Extraction du module de la vitesse le long de la paroi du cylindre pour le cas FTC, sur le domaine complet

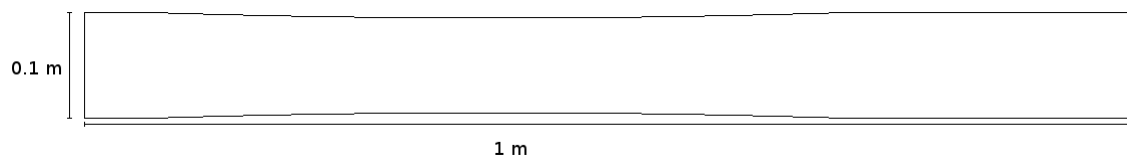


FIGURE 2.20 – Domaine de simulation pour ILSN.

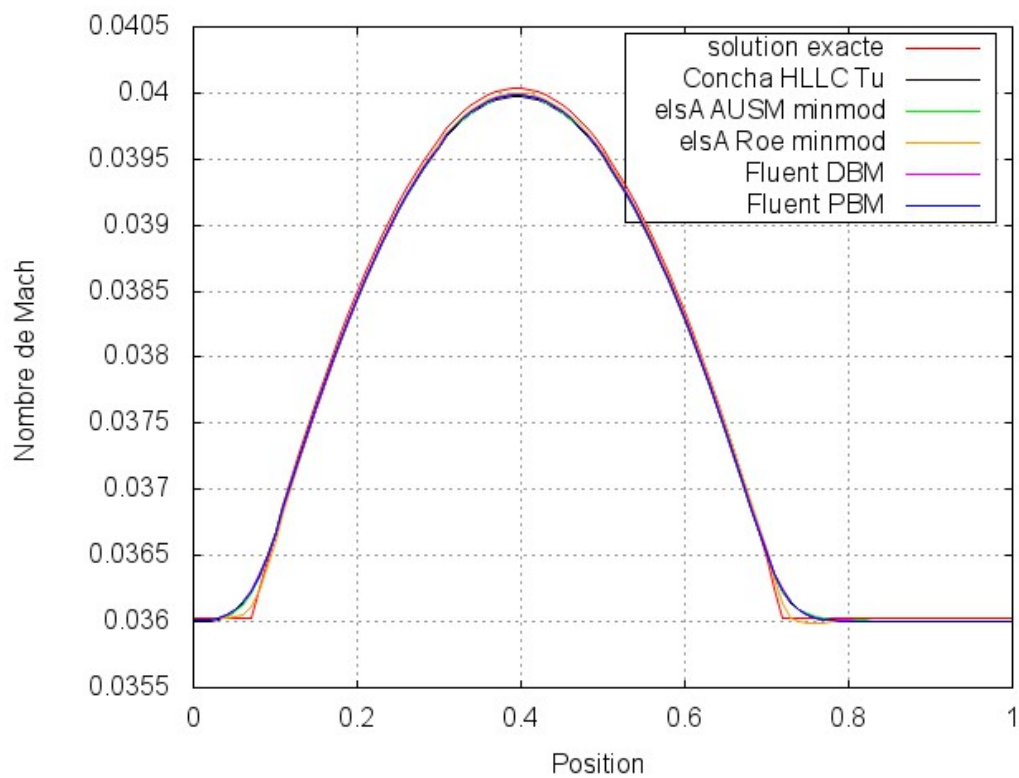


FIGURE 2.21 – Nombre de Mach sur l'axe central ($y = 0$) de ILSN avec Concha, *elsA* et FLUENT.

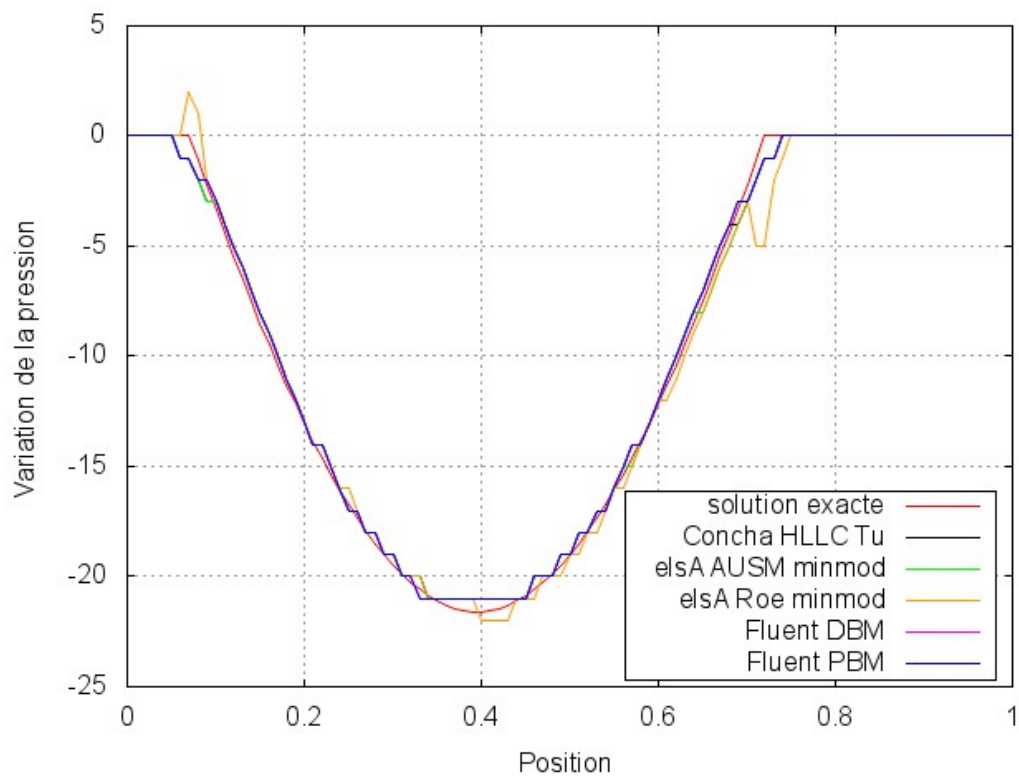


FIGURE 2.22 – Variation de pression sur l'axe central ($y = 0$) de ILSN avec Concha, *elsA* et FLUENT.

(donc 1D) est simulée ici en 2D sur un tube de $10m$ de long de faible épaisseur $0.1m$ avec des conditions de bord de type glissant. Toutes les simulations sont réalisées sur un maillage structuré de 1580 quadrangles identiques. La solution est étudiée à $t = 0.007s$.

TABLEAU 2.6 – Conditions initiales du tube à choc ($t = 0s$).

| Condition à gauche ($x < 0$) | Condition à droite ($x > 0$) |
|--------------------------------|--------------------------------|
| $\rho = 1.18kg.m^{-3}$ | $\rho = 0.15kg.m^{-3}$ |
| $p = 101325Pa$ | $p = 10132.5Pa$ |
| $V = 0m.s^{-1}$ | |

Les solutions présentées dans la figure 2.23 sont une extraction 1D de l'axe longitudinal du tube à choc. Comme pour le cas de la tuyère à basse vitesse, les solutions obtenues par les différentes méthodes sont en bon accord avec la solution analytique (tableau 2.7), même si le résultat de Concha avec le flux HLLC et le limiteur Tu semble plus diffusif que les autres résultats au voisinage de $x = 2$. Pour ce cas aussi, les solutions obtenues avec *elsA* et FLUENT pour le flux Roe sont différentes, bien que théoriquement les méthodes soient les mêmes. La solution la plus précise par rapport à la solution analytique est obtenue avec la méthode volumes-finis et le flux Roe en utilisant le logiciel FLUENT.

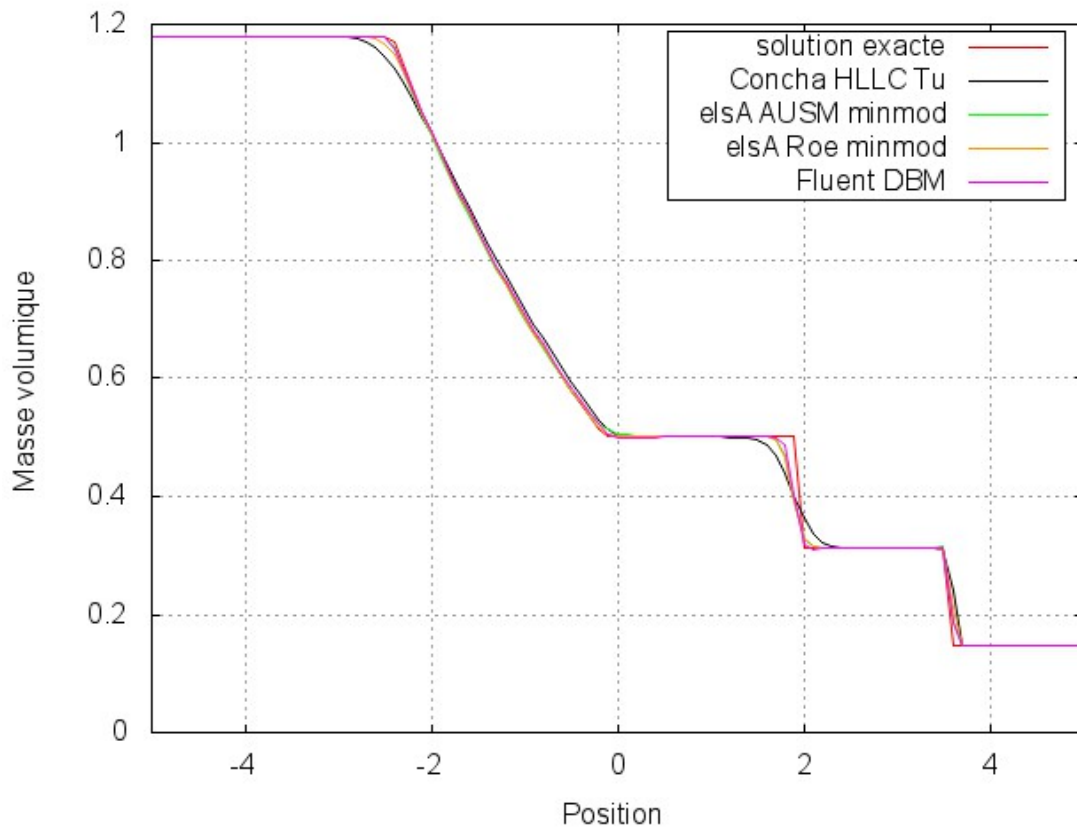


FIGURE 2.23 – Évolution de la masse volumique le long de l'axe longitudinal de ST avec Concha, *elsA* et FLUENT.

2.2.4 Vortex isentropique (ISV)

Le cas du vortex isentropique [19] est un écoulement transitoire à Mach 2.39. Le domaine de simulation est constitué d'un carré de $40m$ de coté, centré en 0. Les maillages utilisés sont structurés et vont de 6400 à 63504 quadrangles identiques. Le domaine est initialisé (figure 2.24) à partir des équations (2.13) à (2.20), avec une perturbation en $(x_0, y_0) = (-10, -10)$ à $t = 0s$. Ces mêmes équations permettent d'obtenir la solution analytique. Au bout de 10 secondes, la perturbation doit se retrouver à la position $(x_{10}, y_{10}) = (10, 10)$, sans avoir subi de dommage puisque les frottements sont négligés.

$$P = P_{inf} \left(\frac{T}{T_{inf}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.13)$$

$$V_x = u_{inf} - \frac{5(y - y_0)}{2\pi} e^{\frac{1}{2}(1-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2)} \quad (2.14)$$

$$V_y = v_{inf} + \frac{5(x - x_0)}{2\pi} e^{\frac{1}{2}(1-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2)} \quad (2.15)$$

$$T = T_{inf} - \frac{25(\gamma - 1)T_{inf}}{8\gamma\pi^2} e^{(1-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2)} \quad (2.16)$$

$$rho_{inf} = 1kg.m^{-3} \quad (2.17)$$

$$P_{inf} = 1Pa \quad (2.18)$$

$$u_{inf} = v_{inf} = 2m.s^{-1} \quad (2.19)$$

$$T_{inf} = \frac{P_{inf}}{\rho_{inf}R} \quad (2.20)$$

Afin d'obtenir une solution satisfaisante dans les différents cas, un maillage plus raffiné est utilisé avec les méthodes volumes-finis par rapport à la méthode éléments-finis DG. La figure 2.25 présente les solutions obtenues avec les méthodes volumes-finis sur un maillage de 63504 quadrangles, et la solution obtenue avec la méthode éléments-finis DG sur un maillage de 6400 quadrangles. En d'autres termes, il a fallu 2,4 fois plus d'inconnues en maillage pour les méthodes volumes-finis par rapport à la méthode éléments-finis DG pour obtenir une solution visuellement équivalente.

Afin de comparer les différents résultats à la solution analytique, un maillage de 16384 quadrangles est utilisé avec les différentes méthodes. La comparaison n'a pas pu être effectuée sur le maillage de 63504 quadrangles car la simulation avec une méthode éléments-finis DG d'ordre 1 sur ce maillage est trop coûteuse en mémoire. La figure 2.26 présente l'évolution de la masse volumique entre les points $(5, 5)$ et $(15, 15)$ à $t = 10s$, tandis que le tableau 2.8 regroupe la norme L^2 relative des différentes erreurs. Ces résultats montrent que pour ce cas test et ce maillage, la méthode éléments-finis DG est environ dix fois plus précise que les méthodes volumes-finis.

2.2.5 Cylindre à Mach 3 (CM3)

Le dernier cas étudié est un écoulement stationnaire à Mach 3 autour d'un cylindre [20]. Le domaine de simulation (figure 2.27) est un rectangle de $5m$ de long et $10m$ de haut. Au centre du domaine est placé un cylindre de diamètre $1m$. Ce cas ne possède pas de solution analytique mais il est largement étudié dans la littérature. Il est intéressant car la solution contient une diversité de phénomènes physiques complexes, dont en particulier, un choc frontal en amont du cylindre et une zone de raréfaction/recirculation cernée par des ondes de choc obliques en

TABLEAU 2.7 – Norme L^2 relative des erreurs par rapport à la solution analytique pour ST.

| | Masse volumique |
|-------------------------|-----------------|
| Concha HLLC Tu | $1.90e^{-1}$ |
| <i>elsA</i> AUSM minmod | $1.27e^{-1}$ |
| <i>elsA</i> Roe minmod | $1.35e^{-1}$ |
| FLUENT DBM | $1.11e^{-1}$ |

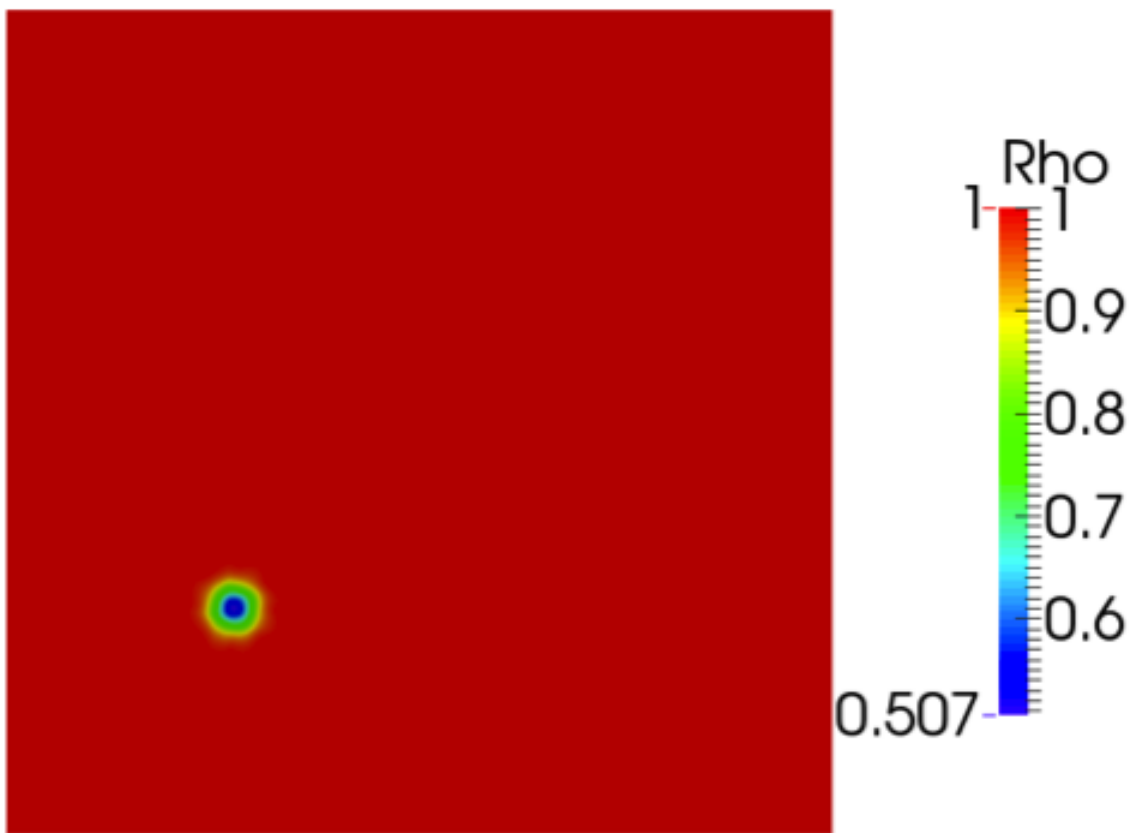


FIGURE 2.24 – Plan initial pour le ISV.

TABLEAU 2.8 – Norme L^2 relative des erreurs par rapport à la solution analytique pour ISV.

| | Masse volumique |
|-------------------------|-----------------|
| Concha HLLC Tu | $7.98e^{-4}$ |
| <i>elsA</i> AUSM minmod | $6.76e^{-3}$ |
| <i>elsA</i> Roe minmod | $6.63e^{-3}$ |
| FLUENT DBM | $7.51e^{-3}$ |

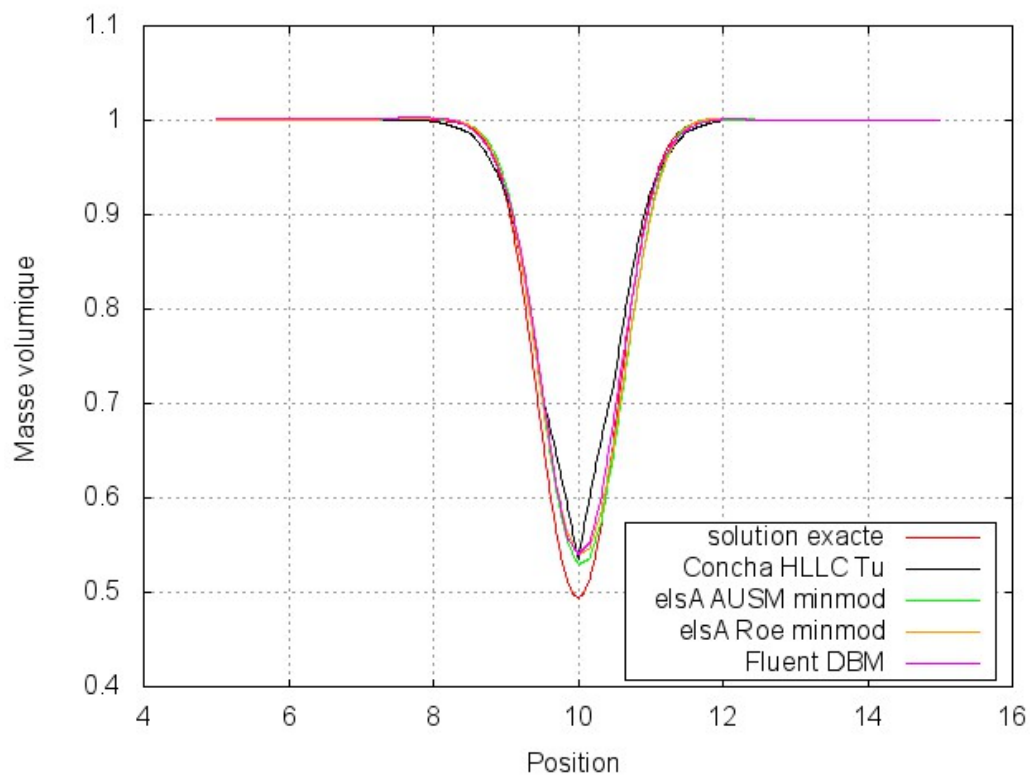


FIGURE 2.25 – Profil de la masse volumique le long de la diagonale à $t = 10s$, pour différents maillages. Concha (noir) : 6400 quads. *elsA* et FLUENT (vert, jaune, mauve) : 63504 quads.

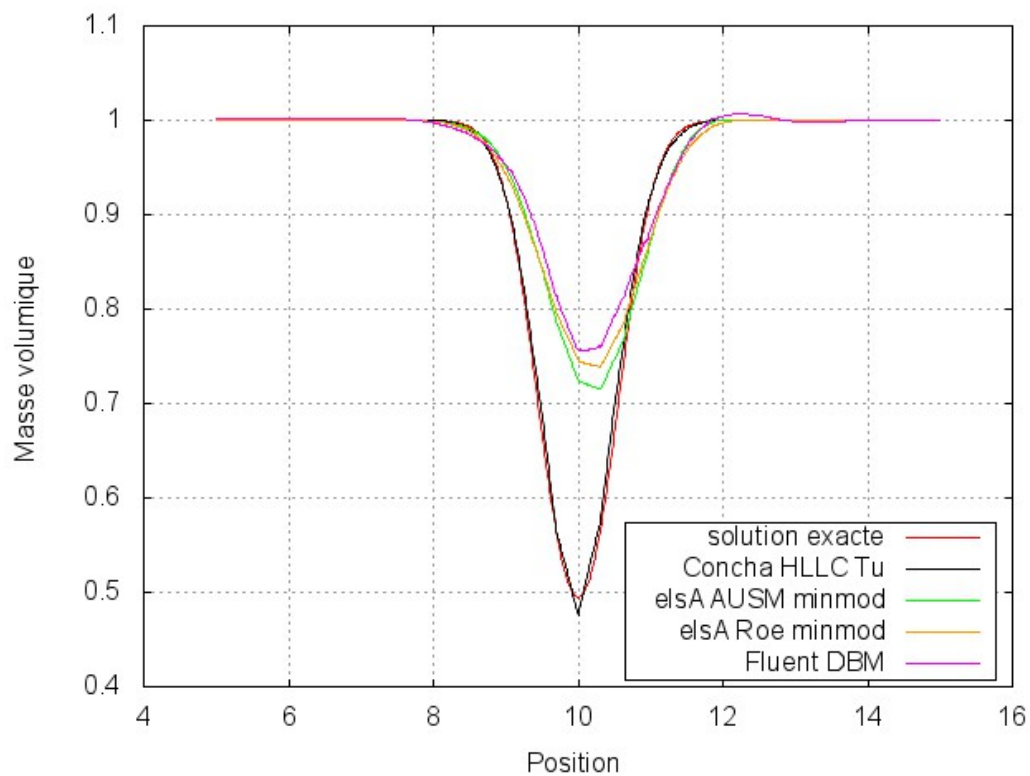


FIGURE 2.26 – Profil de la masse volumique le long de la diagonale à $t = 10s$. Pour un même maillage de 16384 quads.

aval.

Pour ce cas, le maillage est constitué de 1680 quadrangles structurés.

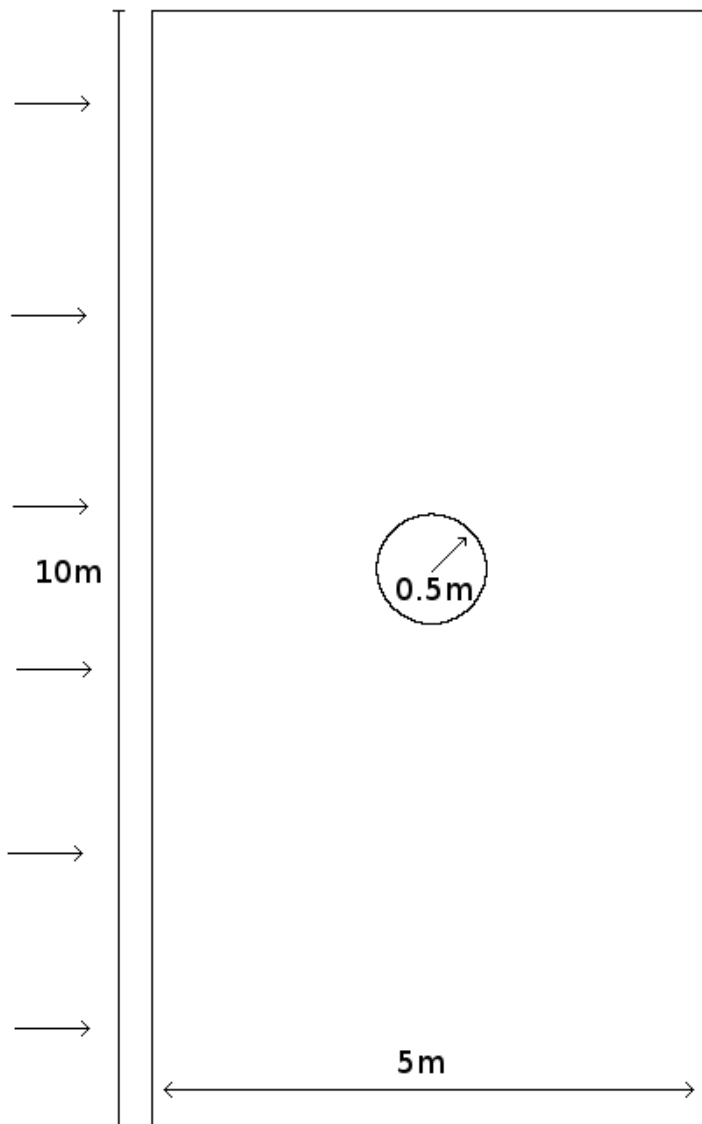


FIGURE 2.27 – Domaine de simulation pour CM3.

Malgré un nombre d'inconnues plus petit pour les méthodes volumes-finis par rapport aux méthodes éléments-finis DG, les résultats obtenus pour les deux solveurs (AUSM et Roe) sont à précision égale. Le choc en amont du cylindre est correctement capturé (figures 2.28 à 2.31), sans phénomène de Carbuncle. De même, un zoom en aval du cylindre permet de mieux visualiser la zone de raréfaction/recirculation de l'ensemble des solutions (figures 2.32 à 2.35). Celles-ci restent conformes à ce que l'on peut retrouver dans la littérature.

Une comparaison plus approfondie entre les différents résultats peut être réalisée en étudiant l'enthalpie totale dans le domaine. En effet, elle est supposée constante sur les différentes lignes de courant qui proviennent d'un même état. Les figures 2.36 à 2.39 montrent l'évolution de l'enthalpie totale sur les lignes de courant pour les différentes simulations. Dans les différents cas, elle reste constante sur les lignes de courant en dehors de la zone de recirculation. Les figures 2.40 à 2.43 et le tableau 2.9 présentent l'évolution de la norme L^2 relative des erreurs sur l'enthalpie totale par rapport à la valeur infini amont. Les différentes simulations perdent en précision sur l'enthalpie totale au niveau du choc amont et des zones de recirculations. Les

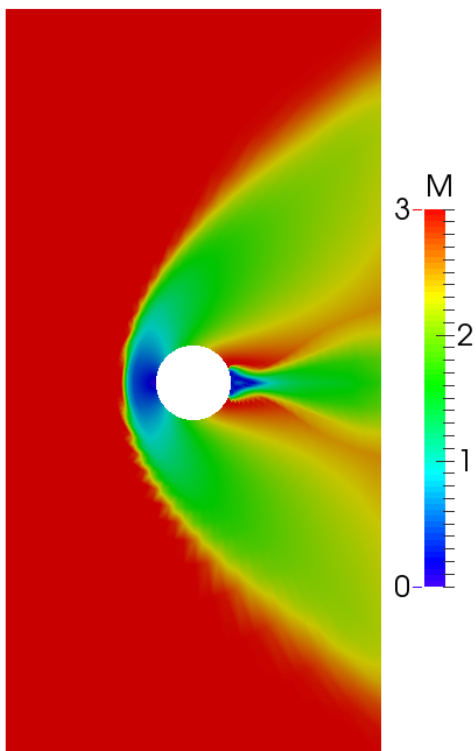


FIGURE 2.28 – Concha HLLC Tu.

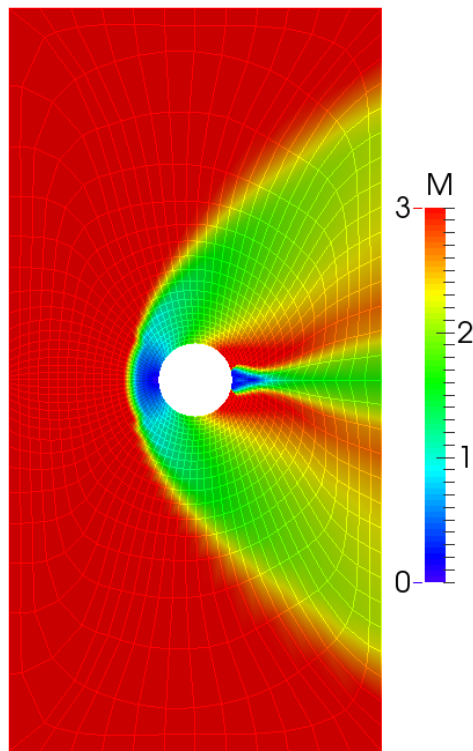
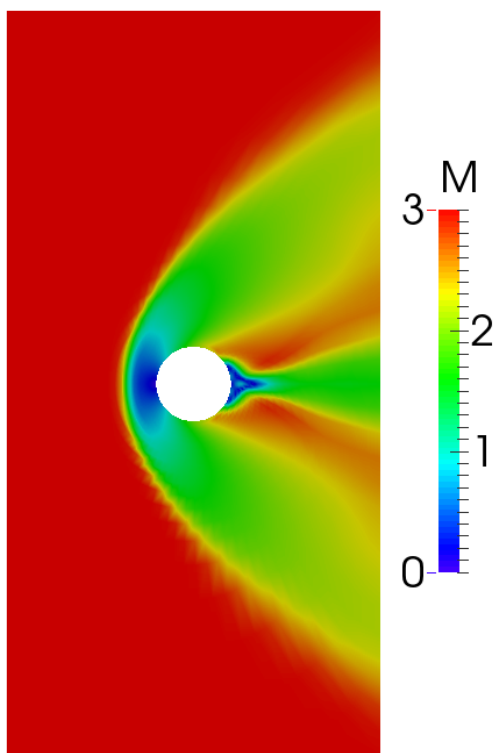
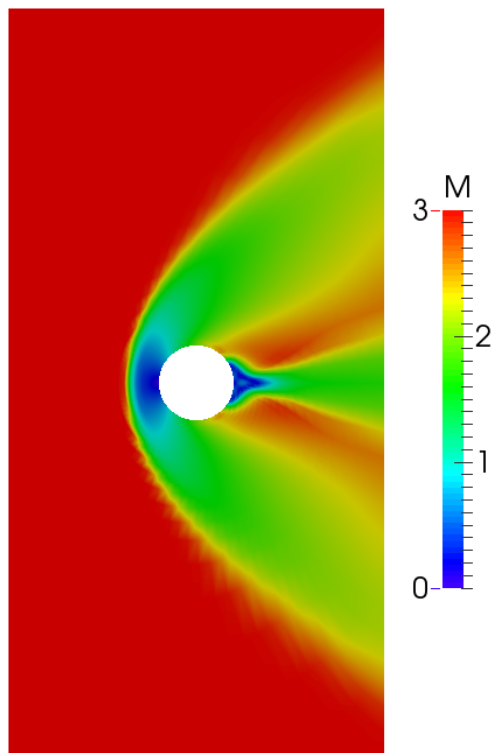


FIGURE 2.29 – FLUENT DBM.

FIGURE 2.30 – *elsA* AUSM minmod.FIGURE 2.31 – *elsA* Roe minmod.

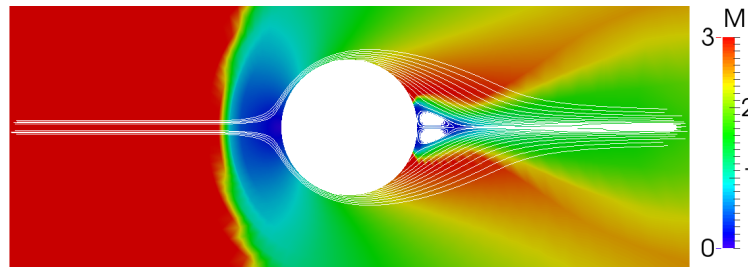


FIGURE 2.32 – Lignes de courant avec Concha HLLC Tu.

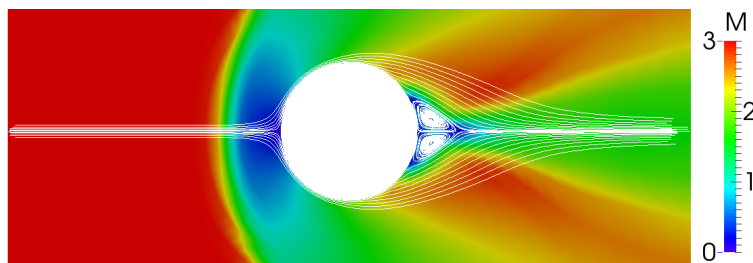
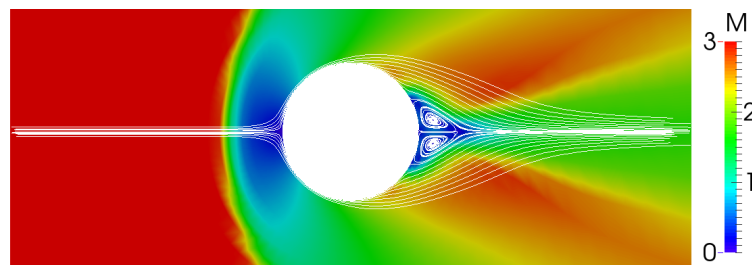
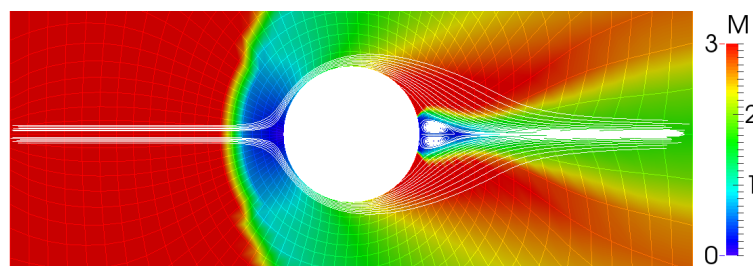
FIGURE 2.33 – Lignes de courant avec *elsA* AUSM minmod.FIGURE 2.34 – Lignes de courant avec *elsA* Roe minmod.

FIGURE 2.35 – Lignes de courant avec FLUENT DBM.

solutions qui semblent le mieux conserver cette grandeur sont la méthode éléments-finis DG avec le flux HLLC et la méthode DBM.

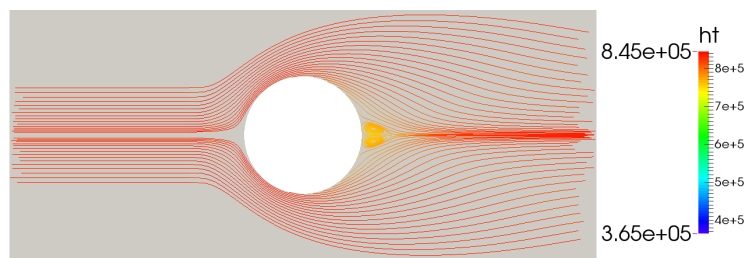


FIGURE 2.36 – Évolution de l'enthalpie totale sur les lignes de courant avec Concha HLLC Tu.

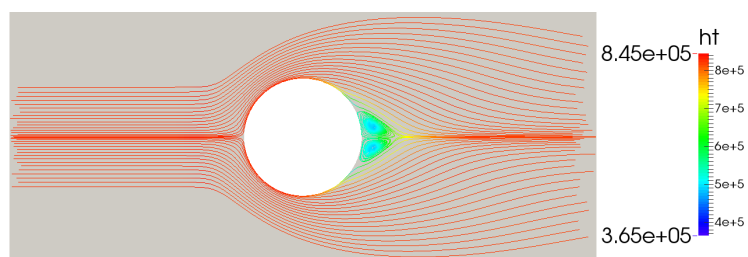


FIGURE 2.37 – Évolution de l'enthalpie totale sur les lignes de courant avec *elsA* AUSM minmod.

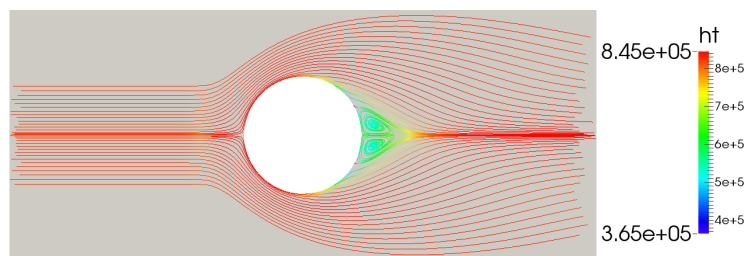


FIGURE 2.38 – Évolution de l'enthalpie totale sur les lignes de courant avec *elsA* Roe minmod.

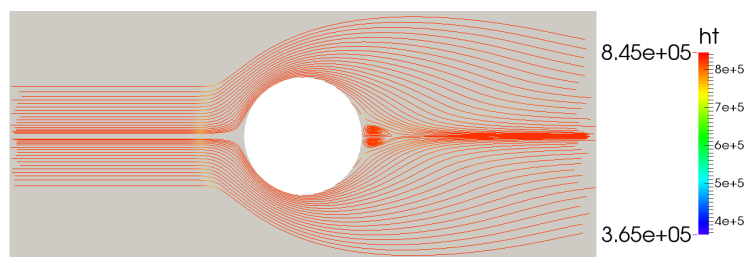


FIGURE 2.39 – Évolution de l'enthalpie totale sur les lignes de courant avec FLUENT DBM.

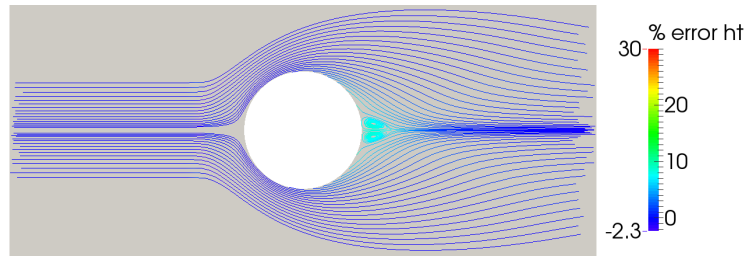


FIGURE 2.40 – Évolution de l'erreur de l'enthalpie totale sur les lignes de courant par rapport à la valeur infini amont, avec Concha HLLC Tu.

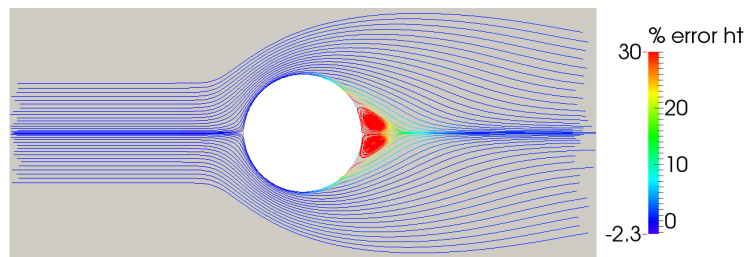


FIGURE 2.41 – Évolution de l'erreur de l'enthalpie totale sur les lignes de courant par rapport à la valeur infini amont, avec *elsA* AUSM minmod.

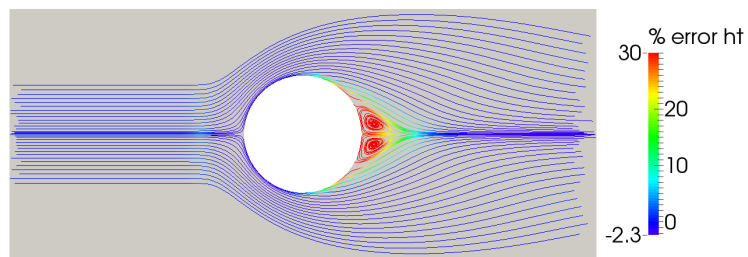


FIGURE 2.42 – Évolution de l'erreur de l'enthalpie totale sur les lignes de courant par rapport à la valeur infini amont, avec *elsA* Roe minmod.

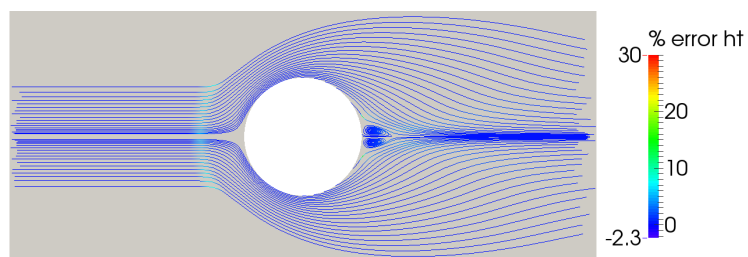


FIGURE 2.43 – Évolution de l'erreur de l'enthalpie totale sur les lignes de courant par rapport à la valeur infini amont, avec FLUENT DBM.

TABLEAU 2.9 – Norme L^2 relative des erreurs sur l'enthalpie totale par rapport à la valeur infini amont.

| | Minimum | Maximum |
|-------------------------|---------|---------|
| Concha HLLC Tu | -2.2% | 8.6% |
| <i>elsA</i> AUSM minmod | -1.3% | 41.9% |
| <i>elsA</i> Roe minmod | -2.2% | 55.6% |
| FLUENT DBM | 0.05% | 14.1% |

Chapitre 3

Étude thermique : Refroidissement d'un cylindre par impacts de jets à *Mach* 0.013

La seconde partie de ce travail de thèse traite de l'étude du refroidissement d'un cylindre de petite dimension par impacts de jets d'air. Ce cas test est issu d'un projet de recherche commencé en 2010 et labellisé par les trois pôles français de compétitivité en aéronautique : Aerospace Valley, ASTech et PEGASE.

Pour commencer, la section 3.1 présente le banc d'essai, mis en place à l'IUT génie thermique et énergie de Pau, par Mathieu Mory et Éric Schall. La section 3.2 présente la stratégie de simulation numérique en fonction du modèle choisi dans un premier temps et donne le développement des expressions des flux de chaleur pariétaux à différents ordres pour permettre la meilleure des comparaisons numérique-numérique et surtout numérique-expérience. La section 3.3 présente les conditions d'écoulement issues de l'expérience comme conditions aux limites pour les simulations numériques. Les résultats et les comparaisons sont présentés dans la section 3.4. Enfin, la section 3.5 présente une évolution technique du banc expérimental afin de réduire les erreurs de mesures dans le but d'améliorer les comparaisons numérique-expérience.

3.1 Présentation du banc expérimental

Le banc expérimental permet le refroidissement d'une surface cylindrique chauffée, de rayon $R_i = 5.4cm$, par quatre jets d'air plan, qui impactent le cylindre perpendiculairement. Comme on peut le voir sur la figure 3.1, les quatre jets impactants sont orientés Nord, Sud, Est et Ouest (flèches bleues). L'air réchauffé s'extrait par quatre fentes de sortie (flèches rouges), chacune sur la bissectrice entre deux entrées voisines. L'écoulement étudié se trouve confiné dans un domaine annulaire de rayon interne R_i et de rayon externe $R_f = 7cm$. La largeur des fentes d'entrée et de sortie est $S_f = 3.6mm$. La majorité des simulations numériques est menée en supposant l'écoulement 2D, c'est à dire qu'il n'y a pas de variation dans la direction Oz , perpendiculaire à la section A-A présentée dans la figure 3.1. La hauteur du cylindre est $L = 4.7cm$.

La photographie de la figure 3.2 montre le banc d'essai dans sa globalité hors ventilateur. Les quatre flèches bleues indiquent que la mise en mouvement du fluide fonctionne par aspiration d'air à travers quatre tubes rectangulaires menant au système de refroidissement, plus visibles sur la figure 3.3. Le fluide évolue dans le sens des flèches bleues (pour l'entrée) et rouge (pour la sortie). La flèche rouge indique le sens de l'écoulement qui s'extrait du système de refroidissement jusque dans un tube flexible qui est connecté, en aval, à un débitmètre (Eldridge 9700MPNH), un ventilateur et une vanne qu'on ne voit pas dans la figure 3.2. Il est impor-

tant de noter que l'unique sortie de la figure 3.2 est à la convergence des quatre sorties de la figure 3.1, grâce à une conception spécifique du module de refroidissement (voir la figure 3.3). Le cylindre modélisant le carter à refroidir est chauffé à l'aide d'une résistance électrique de $212W$, insérée dans un tapis en polyamide adhésif (appelé par la suite : tapis chauffant), collée à la surface intérieure du cylindre (en marron sur la figure 3.4). La température de surface du cylindre est mesurée à l'aide de thermocouples de type K repartis sur la circonférence comme l'indique la figure 3.1. Les fils de ces thermocouples (en vert sur la figure 3.4) traversent le tapis chauffant (trous d'épaisseur $2mm$) et les extrémités permettant les mesures pariétales sont plaquées contre la surface extérieure du cylindre. L'intégralité de la surface extérieure du cylindre est recouverte d'un film adhésif, résistant aux hautes températures permettant de maintenir les thermocouples contre la surface extérieure du cylindre. La figure 3.5 est une photo de l'extérieur du cylindre à refroidir et permet de visualiser la position des thermocouples aussi représentée sur le schéma de la figure 3.1. L'image inférieure rajoutée sur la figure 3.5 contenant un barre verticale bleue à l'extrémité droite et une barre verticale rouge à l'extrémité gauche, indique respectivement que les thermocouples 8, 9 et 12 se trouvent en face d'une fente d'impact d'air, alors que les thermocouples 1, 10 et 11 se trouvent en face d'une fente d'extraction d'air. L'image juste au-dessus de la précédente, contenant trois barres verticales rouges et quatre points bleus, correspond à une autre configuration de refroidissement non étudiée dans ce travail.

Les conditions expérimentales sont données par le débit d'air imposé et la puissance électrique P_{elec} fournie au tapis chauffant. Le régime d'écoulement étudié est stationnaire de façon à ce que la température de surface soit stable sur le cylindre à refroidir, ce qui correspond à un équilibre entre la puissance fournie et la puissance convective de refroidissement. Les études réalisées dans ce travail correspondent à des écoulements à relativement faible nombre de Reynolds, dans une géométrie complexe. Afin de satisfaire la condition d'équilibre des puissances, la puissance électrique délivrée a été réduite par rapport à la puissance électrique maximale ($420W$) afin de maintenir une température de surface inférieure à $100^{\circ}C$, température maximale que peut supporter le tapis chauffant. La puissance électrique délivrée est mesurée à l'aide d'un wattmètre. La puissance thermique convectée $\phi_{conv} = \dot{m}c_p(T_e - T_i)$ est estimée à partir de la différence des températures mesurées par deux thermocouples de type K placés respectivement dans un des tubes d'entrée (T_i) et à la sortie d'une fente d'extraction (T_e). Une estimation de la température de surface moyenne (T_{surf}) est obtenue à partir des thermocouples plaqués contre la surface du cylindre.

L'étude réalisée dans la suite permet de tester différents modèles numériques en comparant les flux de chaleur obtenus à relativement faible nombre de Reynolds. A partir de la mesure expérimentale réalisée pour un nombre de Reynolds fixé, on en déduit les conditions aux limites que l'on s'impose dans les simulations numériques. Il est alors possible de faire deux types de comparaisons : entre les méthodes numériques elles-mêmes et entre les méthodes numériques et l'expérience essentiellement sur le flux pariétal et flux connecté ϕ_{conv} sachant qu'on imposera la température pariétale comme condition de bord dans les codes.

3.2 Stratégie numérique et flux de chaleur.

Comme l'écoulement est à basse vitesse ($V = 4.37m.s^{-1}$, $M = 0.013$) dans une géométrie complexe, les hypothèses sur la compressibilité sont pertinentes mais pas évidentes à définir. En effet, il est bien connu que la simulation numérique des équations de Navier-Stokes est problématique lorsque le nombre de Mach tend vers 0 ($M \rightarrow 0$), en particulier à cause de la question liée au degré de compressibilité du fluide à prendre en compte. Nous avons d'un

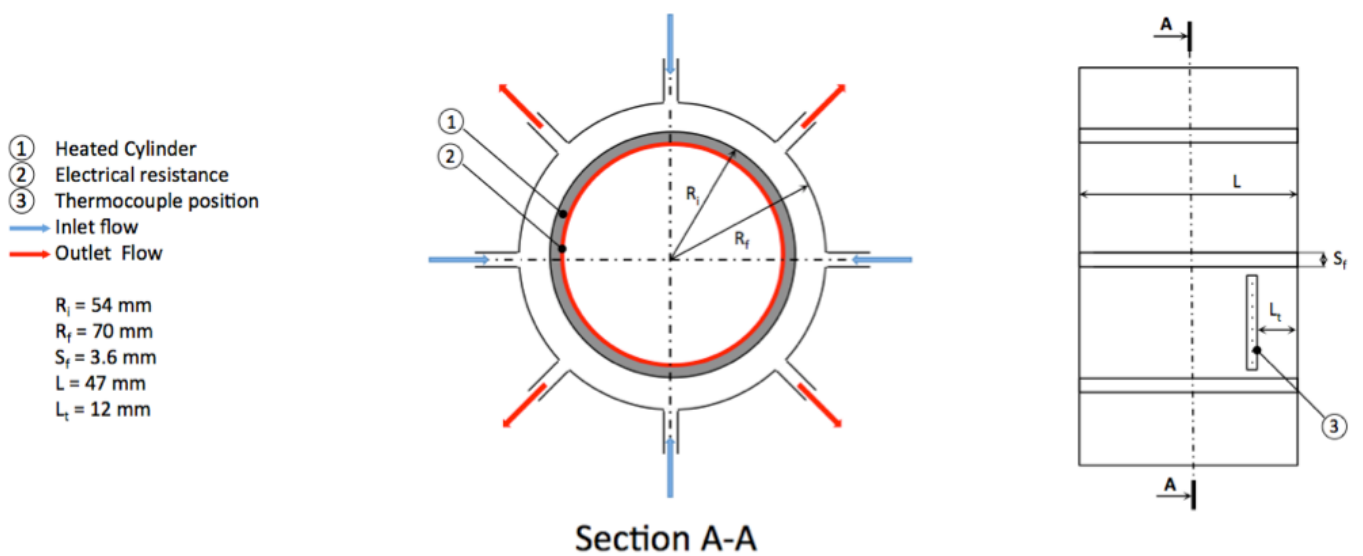


FIGURE 3.1 – Vue de côté et coupe du système de refroidissement avec le cylindre chauffé de rayon R_i .

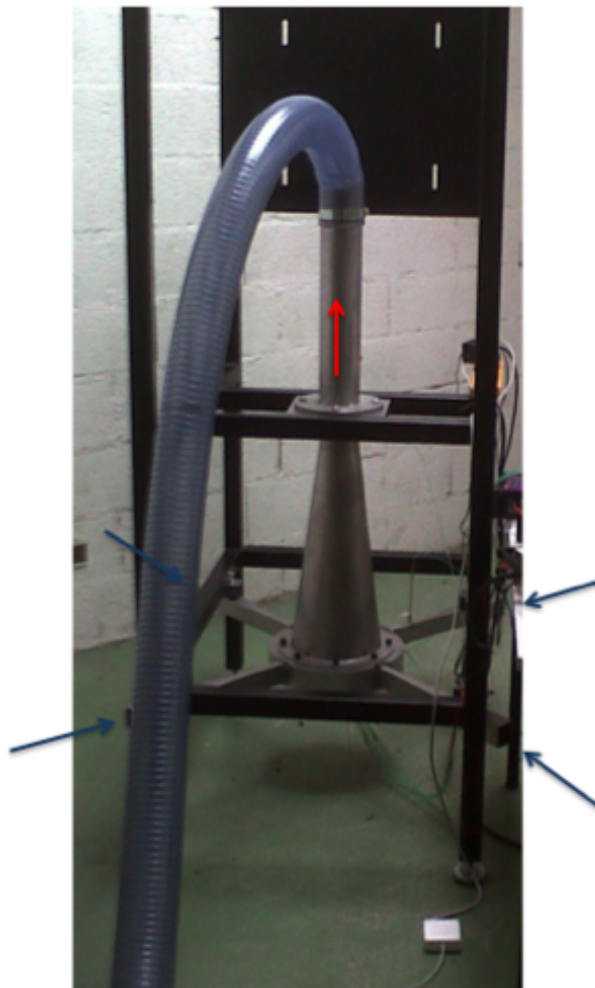


FIGURE 3.2 – Photographie du banc d'essai. Les flèches bleues indiquent les entrées d'air et la rouge représente la sortie.

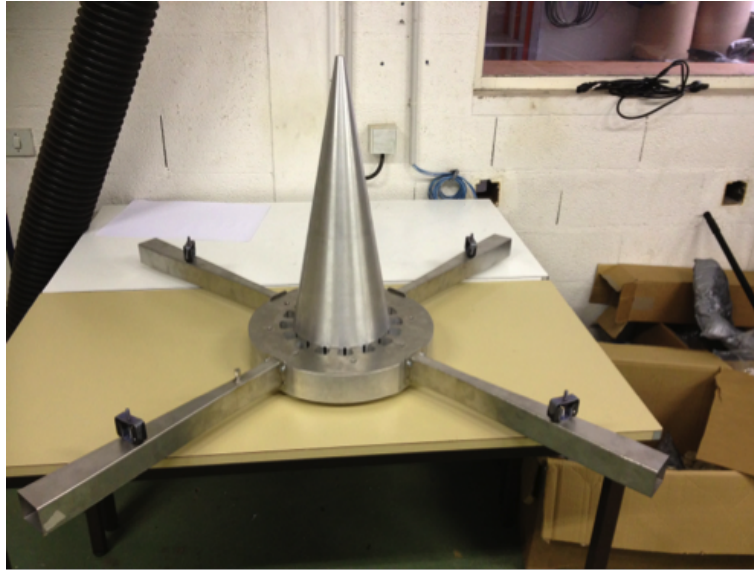


FIGURE 3.3 – Photographie du banc d'essai. Vue globale du système de refroidissement incluant les quatre branches d'où l'écoulement arrive.

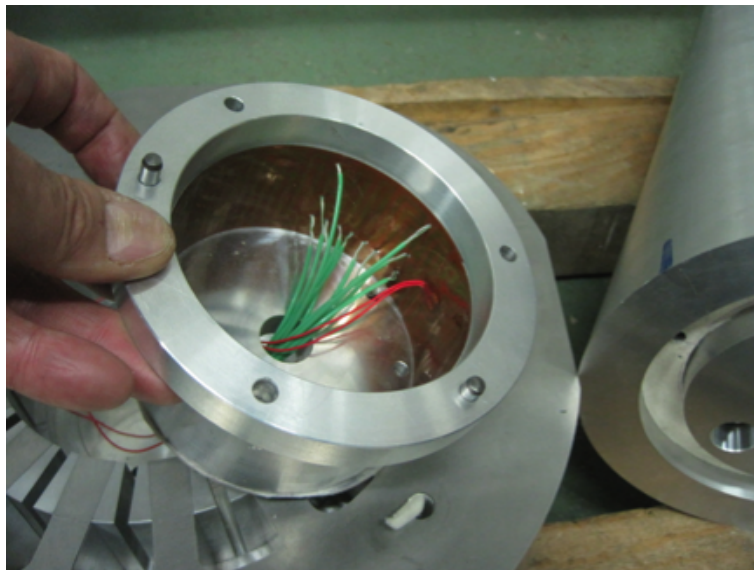


FIGURE 3.4 – Photographie de l'intérieur du cylindre à refroidir.

côté, une communauté de chercheurs travaillant sur les écoulements incompressibles qui essaie d'étendre les études à des domaines au moins faiblement compressibles. Les phénomènes acoustiques sont difficiles à prendre en compte dans le modèle incompressible car la divergence de la vitesse est nulle. D'un autre côté nous avons une autre communauté de chercheurs travaillant sur les écoulements compressibles et qui essaie de simuler aussi avec précision les écoulements à basse vitesse. Il est de notoriété que la simulation numérique des équations de Navier-Stokes compressibles donne des résultats précis pour des écoulements avec des problèmes d'interfaces (ondes de chocs, ondes de détentes...) mais amène des imprécisions dans le calcul du champ de pression lors des simulations à basse vitesse. C'est la raison pour laquelle ces deux modèles sont étudiés dans cette partie : le modèle incompressible avec le logiciel FLUENT, et le modèle compressible avec le logiciel *elsA*.

3.2.1 FLUENT pour le modèle incompressible

Historiquement, le logiciel FLUENT (voir [11] et <http://www.ansys.com/Products/Fluids/ANSYS-Fluent>) a été conçu pour résoudre le modèle incompressible. Du point de vue du modèle, les équations originelles de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles ont été modifiées de manière à filtrer tout phénomène acoustique. Cela est rendu possible en imposant que la dérivée totale ou partielle de la masse volumique est constante par rapport au temps, ce qui équivaut à dire que la divergence de la vitesse est nulle. Cette apparente simplification des équations ne signifie pas que la simulation numérique du système obtenu soit pour autant plus simple.

En utilisant la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés, le système d'équations aux dérivées partielles pour le modèle incompressible pris en compte dans le logiciel FLUENT pour un écoulement laminaire stationnaire, s'écrit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (3.2)$$

$$\rho c_P u_j \frac{\partial T}{\partial x_i} = \mu u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (3.3)$$

Avec respectivement u_i , ρ , T et p les composantes respectivement de la vitesse, de la masse volumique, de la température et de la pression. c_P et μ sont respectivement la chaleur spécifique à pression constante et la viscosité dynamique. q_i est la densité de flux de chaleur local obtenue avec la loi de Fourier : $q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$ où les x_i sont les composantes de la direction et k la conductivité thermique.

Dans cette étude, le solveur (ou méthode numérique) de FLUENT utilisé pour simuler les équations du modèle incompressible est le solveur nommé Pressure-Based (PB). Traditionnellement, les variations de pression sont obtenues par la simulation d'une équation qui est la combinaison de deux des trois équations de conservation : conservation de la masse (équation (3.1)), conservation de la quantité de mouvement (équation (3.2)), conservation de l'énergie (équation (3.3)). L'équation de Poisson est souvent utilisée à cet effet. Quel que soit le couple d'équations choisi parmi les équations de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie), un solveur ségrégué est souvent utilisé pour résoudre le système des équations (3.1) à (3.3) de manière dissociée. Dans le cas où les effets thermiques sont pris en compte, l'équation de l'énergie se résout de façon indépendante à l'issue du traitement des équations qui lient la pression à la vitesse.

3.2.2 *elsA* pour le modèle compressible

Le logiciel *elsA* (voir [8] et <http://elsa.onera.fr>) est une plate-forme de simulation numérique pour des applications en aérodynamique interne et externe pour des régimes d'écoulement allant du subsonique au supersonique. Le modèle étudié est constitué des équations de Navier-Stokes sans aucune modification préalable, ce qui permet la simulation d'écoulements compressibles. Par rapport à FLUENT, la résolution numérique des équations est complètement couplée. Le système d'équations aux dérivées partielles qui modélise le mouvement de fluides compressibles, est donné par les équations (3.4) à (3.6) avec la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés tel que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(c_V T + \frac{1}{2} u^2 \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho u_j \left(c_V T + \frac{1}{2} u^2 \right) \right) = -\frac{\partial p u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

Avec u le module de la vitesse, c_V la chaleur spécifique à volume constant et t le temps. τ_{ij} est le tenseur des contraintes visqueuses (équation (3.7)).

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (3.7)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker (équation (3.8)).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.8)$$

Cet ensemble d'équations est simulé avec différents solveurs approchés de Riemann basés sur des schémas upwind (décentrés) ou des schémas centrés. Plus précisément, les schémas de Roe [9] (upwind) et de Jameson [21] (centré) sont utilisés dans cette partie.

Une vue d'ensemble des deux logiciels indiquant les options retenues pour les simulations numériques est présentée dans le tableau 3.1. En particulier, ils utilisent tous les deux la méthode des volumes-finis en supposant l'écoulement laminaire avec une précision spatiale du second ordre. Dans le but de valider les résultats numériques, deux solveurs sont utilisés pour chaque modèle dans un souci de validation des résultats numériques indépendamment de la méthode numérique.

3.2.3 Le calcul du flux de chaleur

Dans le but de faire un bilan thermique, nécessaire pour réaliser les comparaisons simulations-expérience, les flux de chaleur pariétaux doivent être évalués. L'expression du flux de chaleur pariétal est donnée par l'équation (3.9).

$$\phi(x) = -\lambda \nabla T \quad (3.9)$$

avec λ la conductivité thermique du fluide et ∇T le gradient de température au voisinage du point x dans les directions spatiales prises en considération. Dans la suite, seule la variation

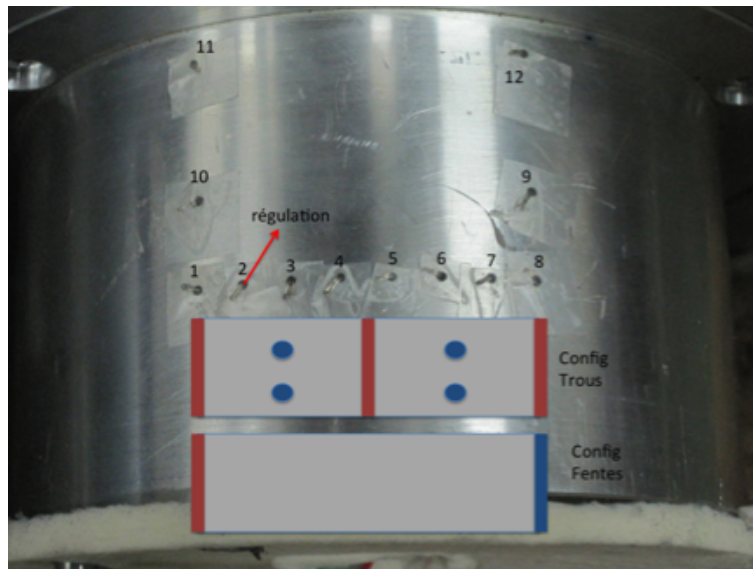


FIGURE 3.5 – Surface extérieure du cylindre à refroidir, présentant la position des thermocouples.

TABLEAU 3.1 – Vue d'ensemble de FLUENT et *elsA*

| | FLUENT | <i>elsA</i> |
|---------------------------|--|--|
| Version | R15.0.7 | v3.3-p2 |
| Solveur | Pressure-Based | Jameson et Roe |
| État | Stationnaire | Stationnaire |
| Schéma en temps | Aucun | Implicit - irs |
| Modèles | Energy - ON Viscous - Laminar | Navier-Stokes laminaire Viscosité de Sutherland |
| Couplage pression-vitesse | Scheme - Simple or Piso Gradient - Least Squares Cell Based | |
| Discretisation Spatiale | Pressure - Standard Density - Second Order Upwind Energy - Second Order Upwind | Centrée du second ordre ou flux upwind |

de température dans la direction normale à la paroi sera prise en compte. Par ailleurs, les développements suivants sont valables uniquement pour des maillages structurés au voisinage de la paroi. L'originalité du travail qui suit consiste à établir des expressions jusqu'à l'ordre 2 du flux de chaleur pariétal lorsque la variation de maille au voisinage de la paroi n'est pas constante. En effet, il faut savoir que dans la plupart des logiciels, le flux de chaleur restitué n'est calculé qu'à l'ordre un. L'erreur sur l'appréciation du flux sera d'autant plus importante que le maillage est grossier et/ou non régulier à l'approche de la paroi. De plus, pour les codes volumes-finis, l'obtention du flux de chaleur à l'ordre 1 s'effectuant souvent en situation de post-traitement des données, est rapidement déterminée à partir des seules valeurs que sont : l'épaisseur de première maille en paroi accompagnée de sa température. Le calcul des flux de chaleur pariétaux à l'ordre 2 apporte une garantie supplémentaire quant à sa véritable estimation. Les différences sur le calcul du flux entre l'ordre 1 et l'ordre 2 peuvent atteindre 20%. Un autre intérêt du travail effectué dans cette section est de pouvoir définir des expressions consistantes pour calculer des flux de chaleur à l'ordre 1 et 2 que ce soit à partir de valeurs aux nœuds ou à partir de valeurs aux centres des cellules.

Afin d'obtenir l'écriture des flux à différents ordres de grandeur, on utilise le principe du développement en série de Taylor. La figure 3.6 représente un maillage au voisinage d'une paroi. Elle permet de situer les différentes valeurs qui seront nécessaires au calcul du flux de chaleur. La première cellule (adjacente à la paroi) de longueur l , bornée par les points x (pariétal) et $x + l$, admet la température $T(i)$ en son centre. La seconde cellule de longueur h , bornée par les points $(x + l)$ et $(x + l + h)$, admet la température $T(i + 1)$ en son centre et ainsi de suite...

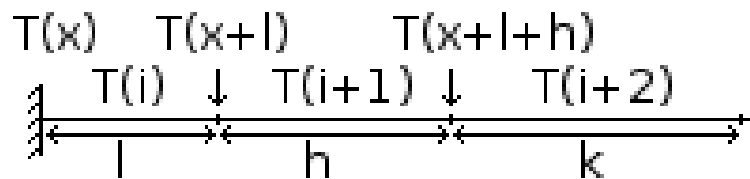


FIGURE 3.6 – Exemple de maillage structuré au voisinage d'une paroi.

Dans ce qui suit, on procède à l'établissement des flux de chaleur à l'ordre 1 et 2 pour des valeurs de la température connues aux nœuds puis aux centres des cellules.

Le développement en série de Taylor de $T(x + l)$ à l'ordre 1 (équation (3.10)), permet d'approcher la variation de température au voisinage de x (équation (3.11)) et donc d'évaluer le flux de chaleur en ce point (équation (3.12)) de la façon suivante :

$$T(x + l) = T(x) + l\Delta T(x) + o(l) \tag{3.10}$$

$$\Rightarrow \Delta T(x) \simeq \frac{T(x + l) - T(x)}{l} \tag{3.11}$$

$$\Rightarrow \phi(x) \simeq -\lambda \frac{T(x + l) - T(x)}{l} \tag{3.12}$$

L'équation (3.12) précédente traduit donc le flux de chaleur à l'ordre 1 à partir des valeurs de la température connues aux noeuds du maillage. Dans les simulations numériques utilisant les méthodes des volumes-finis, la température est le plus souvent calculée aux centres des cellules. Avec des cellules de longueur suffisamment faible, on peut supposer la variation de température linéaire sur une cellule et donc approcher les valeurs aux nœuds à partir de celles aux centres des cellules (équation (3.13)). La valeur en paroi $T(x)$ est souvent obtenue à partir la température T_p imposée par les conditions aux limites (équation (3.14)).

$$T(x+l) = \frac{\frac{h}{2}T(i) + \frac{l}{2}T(i+1)}{\frac{l+h}{2}} = \frac{h \times T(i) + l \times T(i+1)}{l+h} \quad (3.13)$$

$$T(x) = T_p \quad (3.14)$$

En injectant les équations (3.13) et (3.14) dans l'équation (3.12), l'expression du flux de chaleur à l'ordre 1 avec les valeurs centrées aux cellules donne l'équation suivante :

$$\phi(x) \simeq \frac{-\lambda}{2} \left(\frac{T(i+1) - T(i)}{\frac{l+h}{2}} + \frac{T(i) - T_p}{\frac{l}{2}} \right) \quad (3.15)$$

Les expressions obtenues des équations (3.12) et (3.15) donnent une valeur du flux de chaleur précise lorsque les cellules au voisinage de la paroi sont relativement de faible épaisseur et dans un rapport ($\frac{h}{l}$) proche de l'unité, ce qui n'est pas toujours possible en raison essentiellement des temps de calcul. Une solution qui permet de gagner en précision, quand le maillage est grossier au voisinage de la paroi, est d'augmenter l'ordre de précision du calcul du flux de chaleur. A cet effet, la connaissance de la température sur plus de points au voisinage de la paroi est nécessaire dans le but de pouvoir effectuer des développements en série de Taylor au moins à l'ordre 2 (équations (3.16) et (3.17)).

$$T(x+l) = T(x) + l\Delta T(x) + \frac{l^2}{2}\Delta^2 T(x) + o(l^2) \quad (3.16)$$

$$T(x+l+h) = T(x) + (l+h)\Delta T(x) + \frac{(l+h)^2}{2}\Delta^2 T(x) + o((l+h)^2) \quad (3.17)$$

Pour en déduire une expression de la variation de température à l'ordre 2 (équation (3.18)) et donc un flux de chaleur à l'ordre 2 (équation (3.19)), calculons : équation (3.17) - $\frac{(l+h)^2}{l^2}$ équation (3.16) :

$$\Delta T(x) \simeq \frac{T(x+l+h) - \frac{(l+h)^2}{l^2}T(x+l) - \left(1 - \frac{(l+h)^2}{l^2}\right)T(x)}{(l+h)\left(1 - \frac{l+h}{l}\right)} \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow \phi(x) \simeq -\lambda \frac{T(x+l+h) - \frac{(l+h)^2}{l^2}T(x+l) - \left(1 - \frac{(l+h)^2}{l^2}\right)T(x)}{(l+h)\left(1 - \frac{l+h}{l}\right)} \quad (3.19)$$

Comme pour le calcul à l'ordre 1, si les valeurs de la température sont données aux centres des cellules et qu'elles sont de faible épaisseur, on peut interpoler les différentes valeurs des noeuds à partir des valeurs aux centres des cellules :

$$T(x+l+k) = \frac{\frac{k}{2}T(i+1) + \frac{h}{2}T(i+2)}{\frac{h+k}{2}} = \frac{k \times T(i+1) + h \times T(i+2)}{h+k} \quad (3.20)$$

Ce qui donne après substitution dans l'équation (3.19), l'expression pour calculer le flux de chaleur pariétal, à l'ordre 2, à partir des valeurs aux centres des cellules :

$$\phi(x) \simeq -\lambda \left(-l \frac{T(i+2) - T(i+1)}{(h+k)(l+h)} + \frac{T(i+1) - T_p}{l+h} + \frac{T(i) - T_p}{l} \right) \quad (3.21)$$

3.3 Présentation du cas test

Le tableau 3.2 résume les conditions aux limites physiques, issues des différents appareils de mesures (présenté dans la section 3.1) dans les conditions du laboratoire. L'écoulement étudié est considéré comme stationnaire et laminaire. Plus d'informations techniques sur les options choisies dans chaque logiciel sont présentées dans le tableau 3.3.

TABLEAU 3.2 – Conditions aux limites physiques.

| Conditions d'entrée et de sortie | |
|-----------------------------------|----------------|
| Masse volumique | $1.2kg.m^{-3}$ |
| Pression | $104184.83Pa$ |
| Température d'entrée | $302.45K$ |
| Vitesse d'entrée | $4.37m.s^{-1}$ |
| Température - mur interne-chauffé | $370.65K$ |
| Température - mur externe | $342.45K$ |

TABLEAU 3.3 – Conditions de simulation avec FLUENT et *elsA*.

| | FLUENT | <i>elsA</i> |
|--|--|---|
| Conditions d'entrée | Massflow_inlet ¹ | Injmf1 ² |
| | Normal of inlets ³ =(0, -1, 0) ou (-1, 0, 0) | Normal of inlets ³ =(0, -1, 0) ou (-1, 0, 0) |
| | mass flux= $5.24kg.m^{-2}.s^{-1}$ | Surface mass flow= $5.24kg.m^{-2}.s^{-1}$ |
| | $p_{in} = 104184.83Pa$ $T_{in} = 302.45K$ | Stagnation enthalpy= $303872.42m^2.s^{-2}$ |
| Conditions de sortie | Pressure_outlet ¹ | Outpres ² |
| | $p_{out} = p_{in}$ $T_{out} = T_{in}$ | $p_{out} = p_{in}$ |
| Mur interne /chauffé | wall ¹ $T = 370.65K$ | wallisoth ² $T = 370.65K$ |
| Mur externe | wall ¹ $T = 342.45K$ | wallisoth ² $T = 342.45K$ |
| Mur supérieur et inférieur (3D uniquement) | wall ¹ T varie linéairement de $370.65K$ à $342.45K$ | wallisoth ² T varie linéairement de $370.65K$ à $342.45K$ |

Comme la géométrie du cas test présente plusieurs axes de symétrie : l'axe horizontal ($y = 0$), l'axe vertical ($x = 0$) et les axes diagonaux ($y = x$ et $y = -x$), les simulations numériques 2D et 3D sont réalisées sur un quart de la géométrie complète. Ce choix est fait dans le but de réduire les temps de calcul mais impose que la solution cherchée soit symétrique en quatre quarts. Pour des raisons également de gain en temps de calcul, les fentes d'injection ne sont pas représentées dans le maillage. En raison de la géométrie de la cavité par rapport aux axes : horizontaux, verticaux et les deux bissectrices, l'étude numérique aurait pu être réduite au huitième de tour plutôt qu'au quart. Ce degré de liberté supplémentaire pour le fluide a été choisi volontairement afin de vérifier la supposée symétrie du fluide par les différents modèles

1. Voir le guide utilisateur de FLUENT.
2. Voir le manuel de référence pour les utilisateurs d'*elsA*.
3. Dans la direction de l'écoulement.

et les différentes méthodes testés.

L'ensemble des conditions aux limites est représenté schématiquement par la figure 3.7.

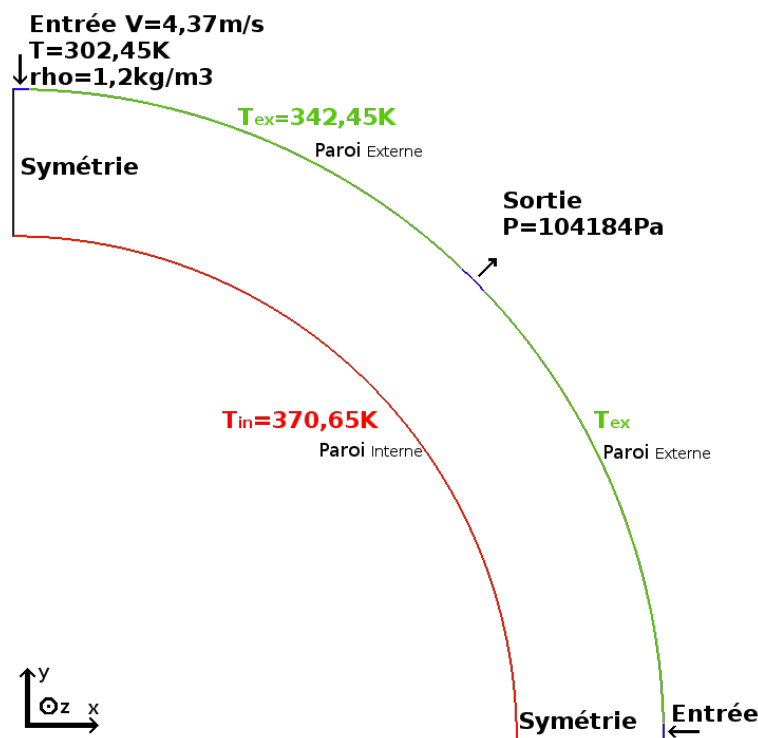


FIGURE 3.7 – Schéma du domaine de simulation avec les conditions aux limites.

Pour la réalisation de l'étude numérique, deux études de validation préalable des calculs sont réalisées :

La première permet de vérifier l'hypothèse 2D qui est faite par la suite sur l'écoulement. En effet, dans l'expérience, la hauteur de la cavité ($L = 4.7\text{cm}$) est du même ordre de grandeur que le rayon externe ($R_f = 7\text{cm}$), il est donc important de vérifier que la faible hauteur n'influence pas l'écoulement. Le maillage 3D est composé de 726388 ($229 \times 52 \times 61$) points et 697680 quadrangles (figure 3.8). Il est construit en utilisant 61 plans parallèles le long de l'axe Oz . Chaque plan reproduit le maillage 2D, qui est composé de 11908 (229×52) points et 11628 quadrangles. Le plan $z = 0\text{m}$ est le plan de symétrie qui est situé à mi-hauteur de la cavité. Cette étude n'est réalisée qu'en utilisant le logiciel *elsA*. L'historique des résidus : figure 3.9 pour le 2D et figure 3.10 pour le 3D indiquent que chaque simulation (*elsA-2D*, *elsA-3D*) a convergé. En effet, dans les deux simulations, les valeurs des résidus ont perdu au moins sept ordres de grandeur. A titre indicatif, le temps de simulation sur le maillage 3D avec quatre processeurs et pour 400000 itérations est de 13.5 jours CPU.

La seconde étude est une analyse de l'indépendance au maillage des simulations. Cette analyse permet de choisir la taille de maillage optimale nécessaire pour optimiser le temps de calcul tout en s'assurant d'un résultat suffisamment précis. La construction de six maillages a été nécessaire à cette étude allant de G0 à G5 (tableau 3.4), tous emboîtés en 2D. La hiérarchie de maillage construite est issue de raffinements successifs dans la direction perpendiculaire à la paroi uniquement à partir du maillage initial G0. Compte tenu de la symétrie de l'écoulement, on considère ici que le flux est principalement radial et/ou que la composante orthoradiale est négligeable. Les raffinements successifs des maillages conduisent au plus fin, G5 quasiment 32 fois plus important que le maillage le plus grossier G0. Tous ces maillages ont été testés avec les deux modèles et les quatre solveurs utilisés. La figure 3.11 présente l'évolution du flux de

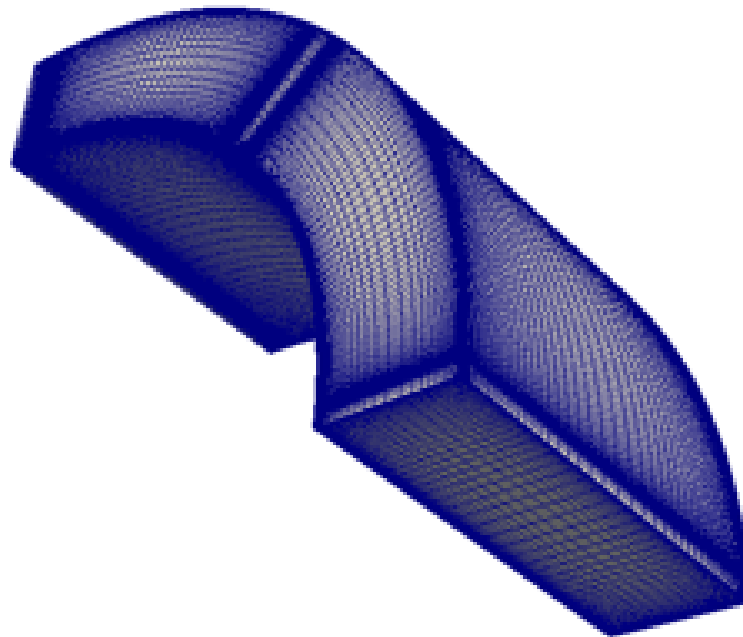


FIGURE 3.8 – Vue du maillage en 3D.

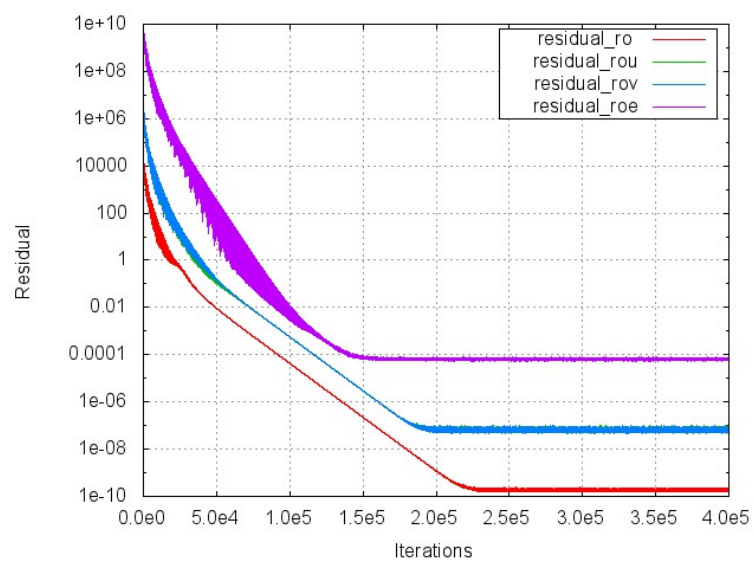


FIGURE 3.9 – Évolution des résidus lors d'une simulation 2D avec *elsA*.

chaleur moyen, le long de la paroi interne, après convergence des calculs. Les solutions sont considérées comme convergées lorsque les résidus baissent d’au moins cinq ordres de grandeur. Dans le cas des simulations FLUENT et avec les deux solveurs SIMPLE et PISO, les résidus baissent de cinq ordres de grandeur puis se stabilisent autour d’une valeur constante quel que soit le temps de simulation. Avec *elsA* et les solveurs de Roe et de Jameson, tous les résidus obtenus se comportent comme celui obtenu avec le maillage G3 de la figure 3.12. Après 100000 itérations, les résidus qui ont déjà perdu plus de 5 ordres de grandeur continuent de baisser pour atteindre une perte de plus de dix ordres de grandeur au bout de 400000 itérations.

TABLEAU 3.4 – Informations sur les maillages utilisés avec FLUENT et *elsA*.

| | G0 | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 |
|--------------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| Nombre de points | 3206 | 6183 | 11908 | 23587 | 46945 | 93661 |
| | 229×14 | 229×27 | 229×52 | 229×103 | 229×205 | 229×409 |
| Nombre de cellules | 2964 | 5928 | 11628 | 23256 | 46512 | 93024 |

La figure 3.11 indique l’évolution du flux pariétal moyen en fonction du nombre de cellules relativement aux maillages utilisés. A partir du maillage le plus grossier G0 vers le plus fin G6, on observe une décroissance brutale du flux qui semble se stabiliser à partir du maillage G3. Autrement dit, pour des maillages supérieurs à G3 en nombre d’éléments, le flux de chaleur pariétal moyen calculé reste constant. Afin d’optimiser les temps de calcul, c’est donc le maillage G3 qui sera utilisé pour toutes les simulations qui suivent. Plus de détails sur ce maillage sont présentés dans les figures 3.13 et 3.14 et le tableau 3.5. La répartition des éléments (ou cellules) sur les différentes parois de la cavité est réalisée à l’aide d’une suite géométrique.

TABLEAU 3.5 – Détails sur le maillage G3

| | FLUENT et <i>elsA</i> |
|--|----------------------------|
| Nombre de points | 23587 (229×103) |
| Nombre de cellules | 23256 |
| Tailles minimale et maximale des arêtes sur le bord interne (en m) | $3.1e^{-5}$ à $5.e^{-2}$ |
| Tailles minimale et maximale des arêtes sur le bord externe (en m) | $4.e^{-5}$ à $7.e^{-2}$ |

3.4 Résultats

3.4.1 Comparaison 2D-3D avec *elsA*-Jameson

La figure 3.15 présente les flux de chaleur sur la paroi interne-chauffée, issus de la simulation en 3D et sur trois arcs parallèles, de différentes hauteurs en z . Les positions $x = 0m$ et $x = 0.084m$ correspondent aux positions d’impacts de jets d’air, la position $x = 0.042$ correspond à la sortie. Les profils pour $z = -0.0195m$ et $z = 0.0195m$ se superposent parfaitement, ce qui indique que la simulation 3D est symétrique par rapport au plan $z = 0m$. La comparaison (figure 3.16) entre le flux de chaleur sur la paroi interne-chauffée pour la simulation 2D et celui du plan de symétrie ($z = 0m$) de la simulation 3D affiche des évolutions très semblables.

Les lignes de courant superposées à la température, obtenues avec la simulation 3D sont présentées sur la figure 3.17 pour le plan $x = 0m$. L’écoulement et les variations de température ressemblent à ce que l’on obtient par la simulation 2D représentée à la figure 3.18. Comme pour la comparaison des flux de chaleur pariétaux, cette correspondance globale des résultats entre la simulation 2D et le plan de symétrie de la simulation 3D ($z = 0$) permet de conclure que

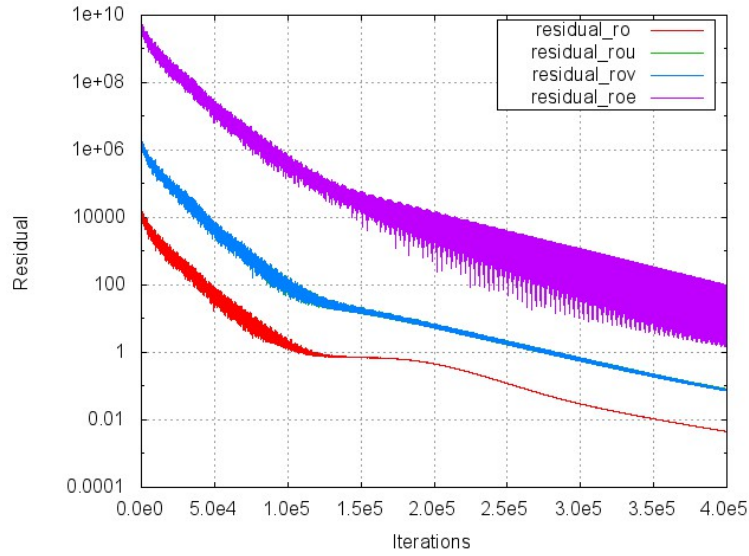


FIGURE 3.10 – Évolution des résidus lors d’une simulation 3D avec *elsA*.

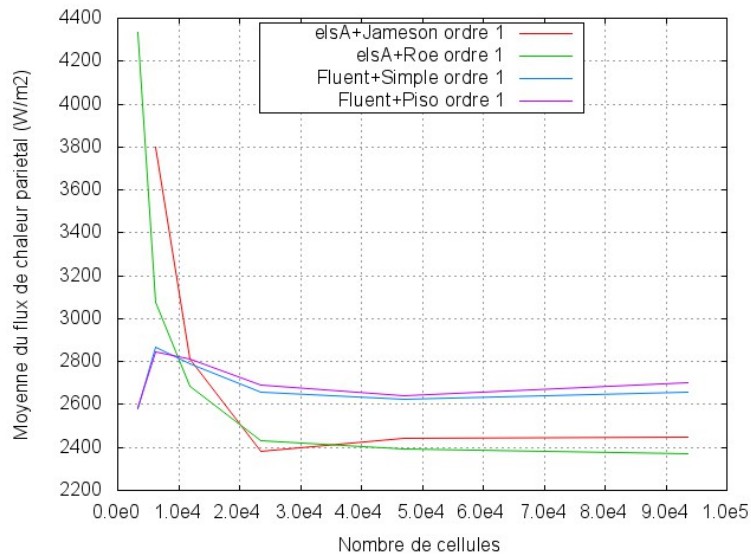


FIGURE 3.11 – Évolution de la moyenne du flux de chaleur sur les maillages de G0 à G5.

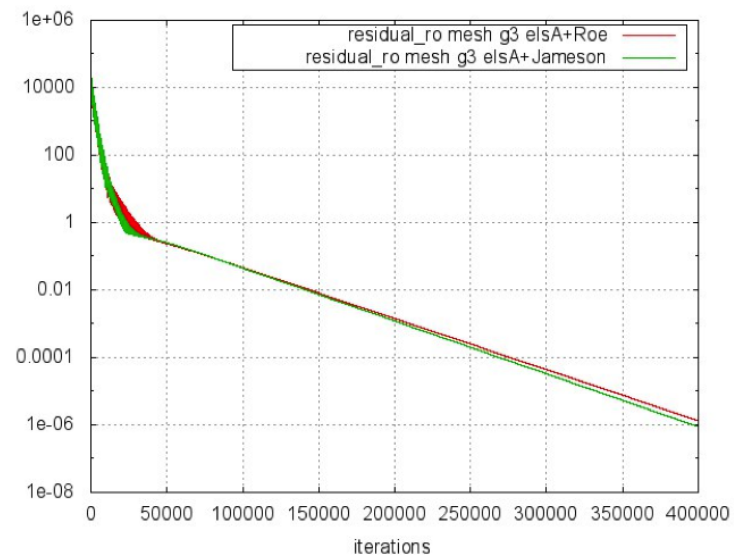


FIGURE 3.12 – Historique de la convergence en résidus avec le maillage G3 et le logiciel *elsA*.

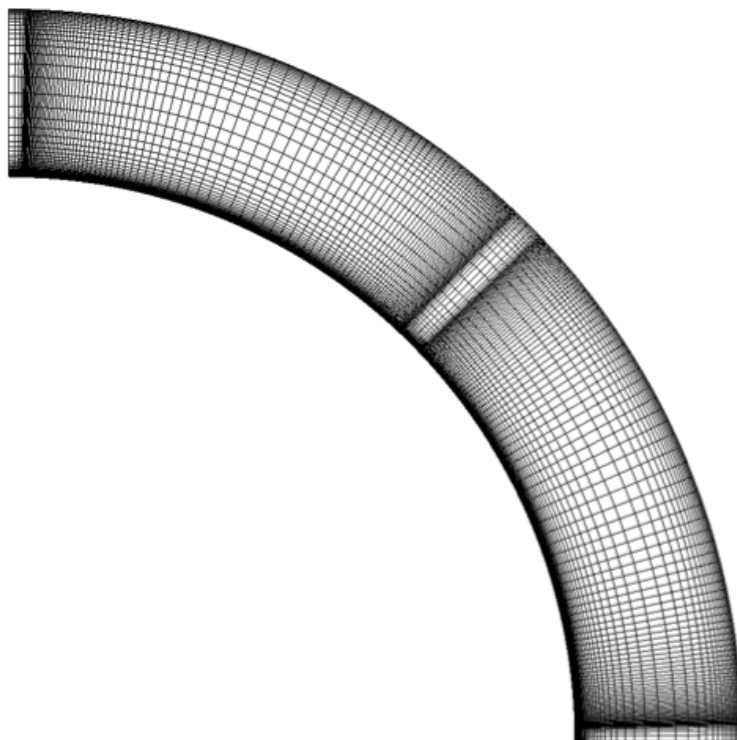


FIGURE 3.13 – Maillage G3.

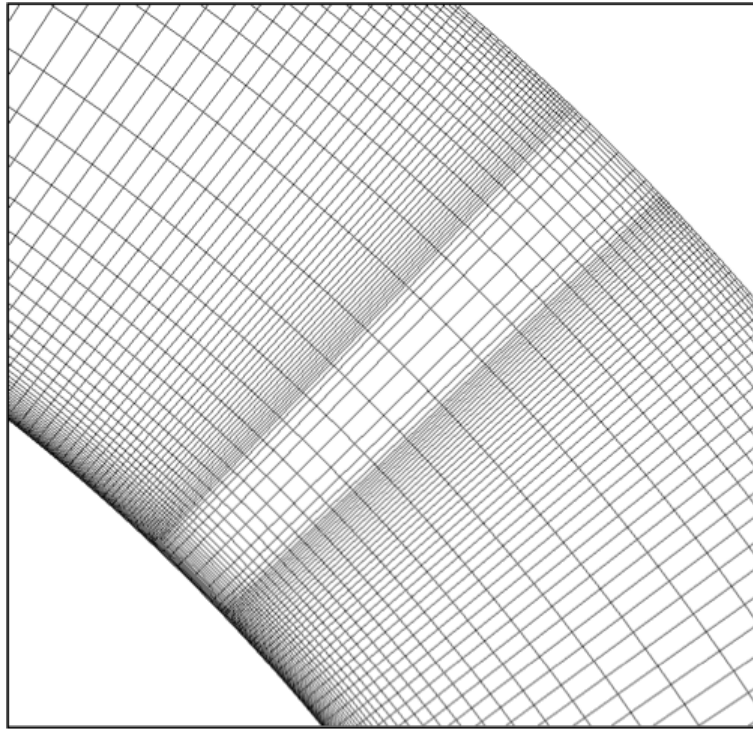


FIGURE 3.14 – Zoom sur la sortie dans le maillage G3.

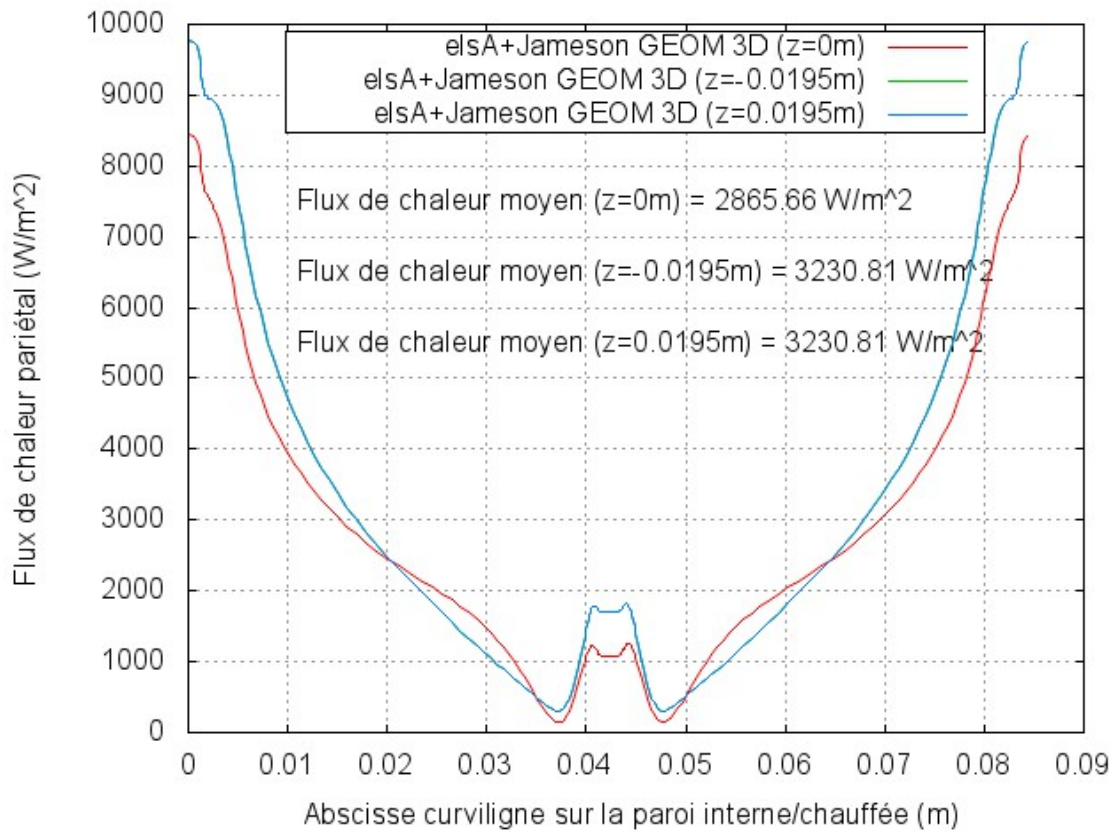


FIGURE 3.15 – Comparaison des flux de chaleur sur le bord interne-chauffé, de la simulation 3D, pour trois plans différents ($z = -0.0195m$, $z = 0m$ et $z = 0.0195m$).

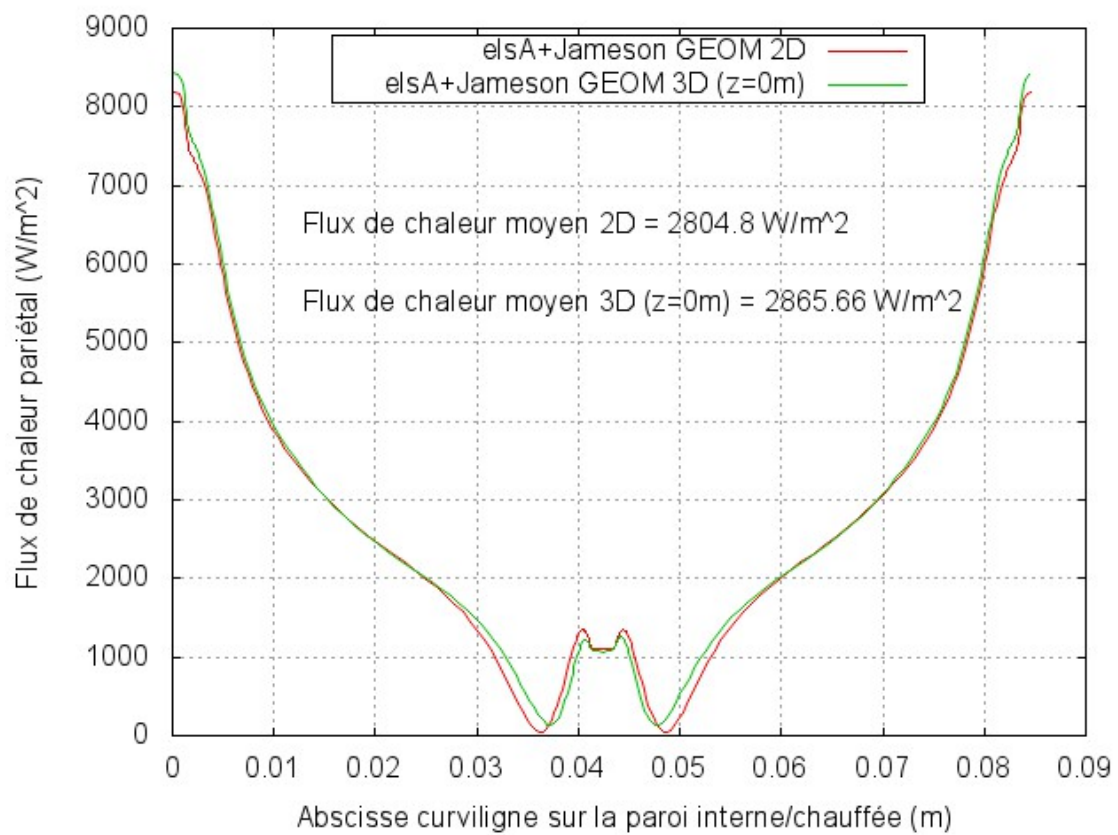


FIGURE 3.16 – Comparaison des flux de chaleur sur le bord interne-chauffé, pour la simulation 2D et pour le plan de symétrie de la simulation 3D.

l'étude en 2D reste valable en 3D dans une zone proche du centre de la cavité située en $z = 0$. Dans ce qui suit, nous allons donc approfondir les études en 2D à l'aide des deux logiciels que sont *elsA* et FLUENT.

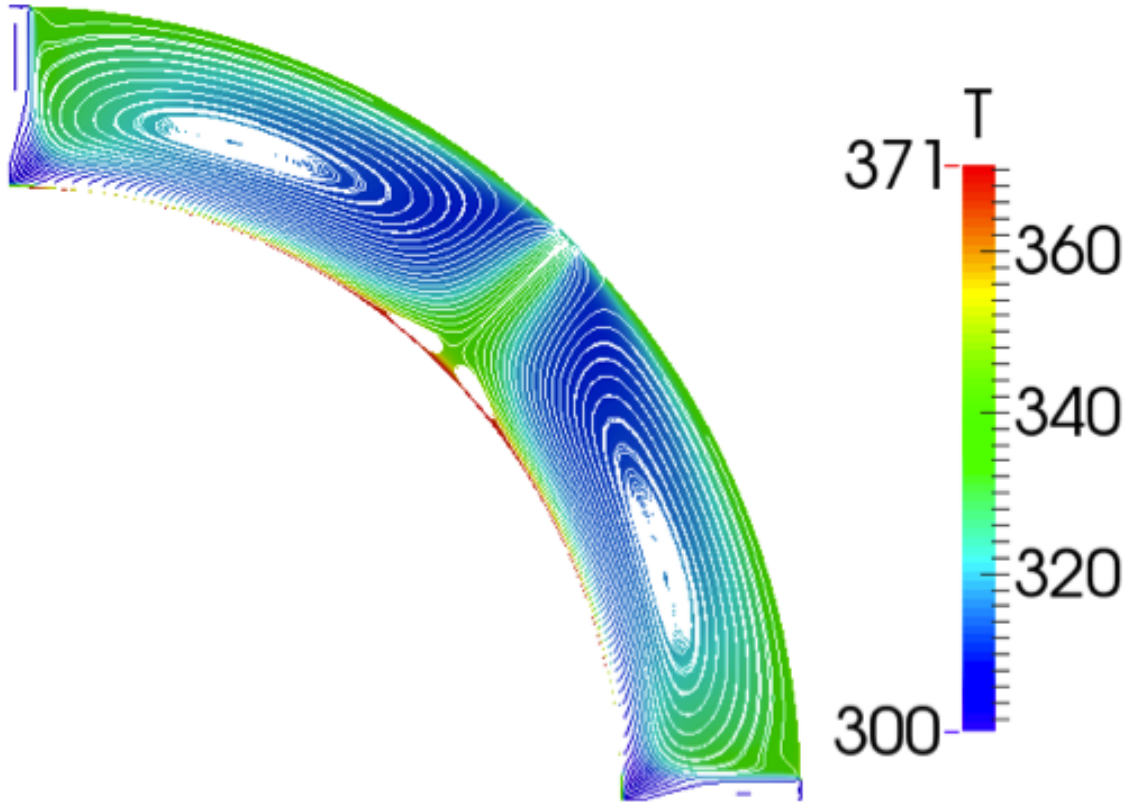


FIGURE 3.17 – Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation 3D avec *elsA*-Jameson, pour le plan $z = 0m$.

Les normes L^2 relatives aux erreurs de débit passant dans la cavité, par rapport au débit de l'expérience sont données dans le tableau 3.6. Elles sont inférieures à 0.4%. Dans le tableau 3.7, la puissance convectée est 3.9% fois plus précise avec la simulation *elsA* 3D qu'avec la simulation *elsA* 2D en comparaison de l'expérience. En effet, la différence entre la puissance convectée de l'expérience et de la simulation *elsA* 3D est de -1.4% alors qu'elle est de -5.3% entre l'expérience et la simulation *elsA* 2D. A 4% près, les résultats issus des calculs 2D et 3D sont les mêmes sur la valeur du flux convecté. Ceci, ajouté aux remarques précédentes, justifie tout à fait qu'un calcul préalable en 2D puisse être mené dans le but d'avoir déjà une bonne estimation de l'ensemble des grandeurs physiques telles que : la température, les lignes de courant, le flux pariétal ou convecté...

TABLEAU 3.6 – Norme L^2 relative des erreurs sur le débit pour *elsA* 2D et *elsA* 3D.

| | Expérience | <i>elsA</i> 2D-Jameson | <i>elsA</i> 3D-Jameson |
|---|--------------|------------------------|------------------------|
| Débit d'entrée ($kg.s^{-1}$) | $8.88e^{-4}$ | $8.84e^{-4}$ | $8.84e^{-4}$ |
| Norme L^2 relative des erreurs par rapport à l'expérience | | -0.4% | -0.4% |
| Débit de sortie ($kg.s^{-1}$) | $8.88e^{-4}$ | $8.86e^{-4}$ | $8.87e^{-4}$ |
| Norme L^2 relative des erreurs par rapport aux débits d'entrées | | 0.2% | 0.3% |

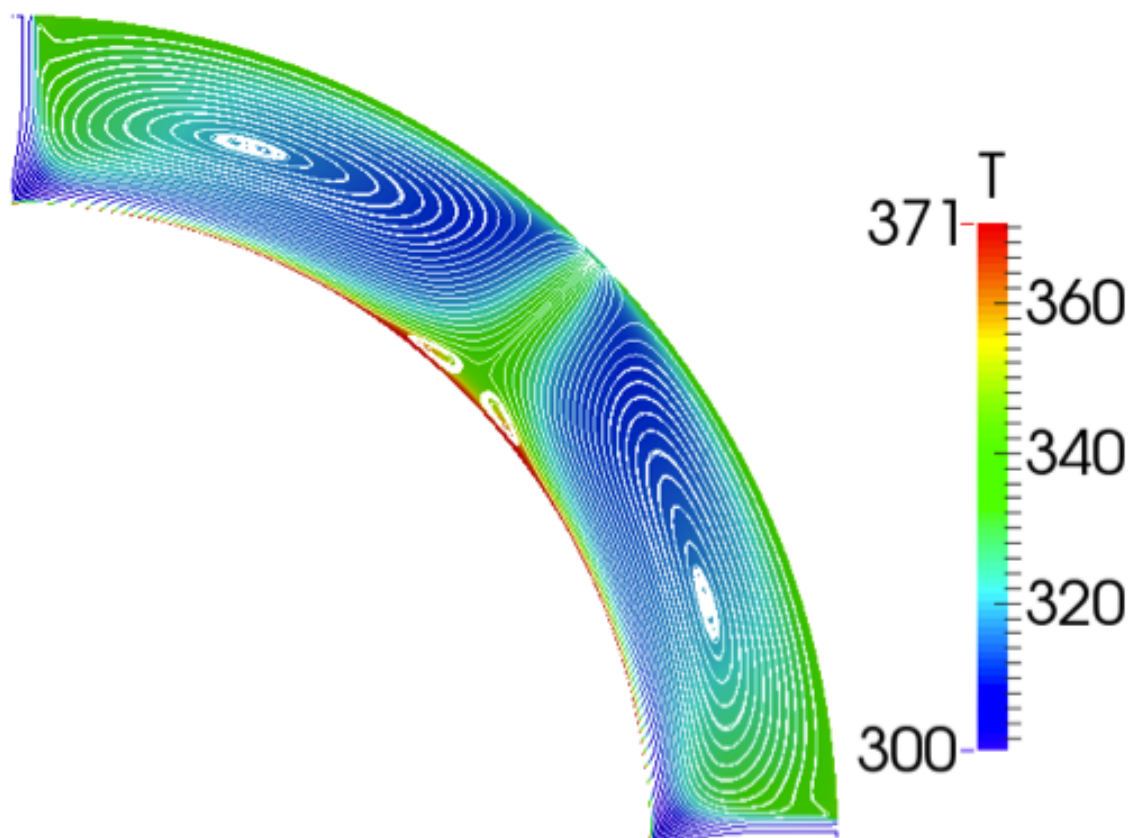


FIGURE 3.18 – Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation 2D avec *elsA*-Jameson.

TABLEAU 3.7 – Norme L^2 relative des erreurs sur la puissance convectée pour *elsA* 2D et *elsA* 3D.

| | Expérience | <i>elsA</i> 2D-Jameson | <i>elsA</i> 3D-Jameson |
|---|------------|------------------------|------------------------|
| Puissance convectée (W) | 20.00 | 18.93 | 19.72 |
| Norme L^2 relative des erreurs par rapport à l'expérience | | -5.3% | -1.4% |

3.4.2 Résultats avec FLUENT

Dans une première étape, en supposant le fluide incompressible, deux simulations numériques sont réalisées avec les deux schémas : Simple [12] et Piso [13]. Pour les deux simulations, le critère de convergence est satisfait après 300000 itérations. Une phase transitoire est observable pendant les 20000 premières itérations. Bien que les résidus ne perdent pas plus de cinq ordres de grandeur, un régime d'écoulement très lent plus ou moins stable se met en place dans la partie centrale de la cavité, en dehors des couches limites visqueuses. Ces instabilités qui consomment peu d'énergie sont visibles sur les figures 3.19 et 3.20 où les motifs d'écoulement sont visibles grâce aux lignes de courant (en blanc) superposées aux variations de température. Néanmoins, par rapport à la solution Simple, la solution obtenue avec Piso est plus stable. Sous la sortie, les deux jets provenant des deux entrées entrent en collision et forment une sorte de fontaine de refoulement constituée de deux tourbillons principaux (figure 3.19). Deux autres tourbillons, plus petits, se trouvent dans la zone de séparation contre le mur interne-chauffé.

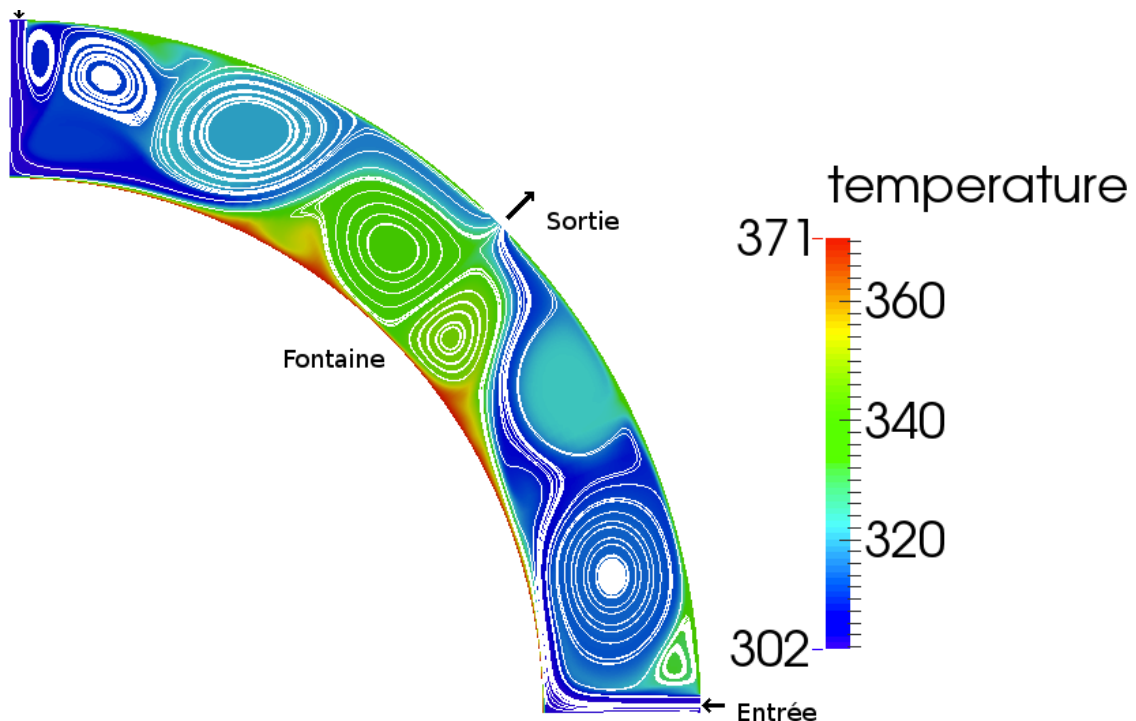


FIGURE 3.19 – Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation en 2D avec FLUENT-Simple

Les figures 3.21 et 3.22 montrent l'évolution du module de la vitesse dans la cavité (ou domaine de calcul), pour les deux solveurs incompressibles. Bien que ces solveurs soient légèrement différents et que les champs de vitesse observés soient différents, certaines caractéristiques de l'écoulement sont les mêmes pour les deux simulations. En effet, sur ces figures ainsi que sur les figures 3.19 et 3.20, les champs de vitesse et de température se différencient en trois zones distinctes : des zones de stagnation au centre de la cavité, des zones d'impacts de jets contre la paroi et une zone de fontaine ou de refoulement. Dans les zones de jets, le module de la vitesse est maximum, formant les lignes de courant principales (figures 3.19 et 3.20) à grand débit qui se dirigent vers les zones de stagnation et la sortie. Les détachements de jets en paroi, clairement visibles sur les figures 3.21 et 3.22, correspondent aux points de séparation qui se trouvent approximativement à mi-distance entre la fontaine et les zones de stagnation de part

et d'autre de la sortie. Seules les instabilités observées au niveau des zones de stagnation font que les deux calculs diffèrent dans une faible proportion cependant.

La figure 3.23 représente l'évolution du flux de chaleur pariétal transmis au fluide le long de la paroi externe du cylindre chauffé par conduction sur une faible épaisseur depuis sa paroi interne. Ce flux est la conséquence de la résistance électrique de $212W$ placée contre la surface interne du cylindre (figure 3.4). Les faibles différences relevées sur les figures précédentes concernant les évolutions des lignes de courant de la température et la vitesse (figures 3.19 à 3.22) se traduisent par des évolutions pariétales du flux de chaleur à la figure 3.23 qui sont légèrement différentes mais qui conduisent en moyenne à un flux identique à quelques pour cent près. Finalement, malgré la complexité de cet écoulement due essentiellement à des instabilités tourbillonnaires de faible amplitude, le profil de flux de chaleur pariétal varie peu en profil et en moyenne.

3.4.3 Résultats avec *elsA*

Pour cette seconde étape, en supposant le fluide cette fois compressible, deux simulations numériques sont réalisées avec deux solveurs capables de résoudre le problème de Riemann : Jameson [21] et Roe [9]. Le choix de ces deux solveurs s'est fait en raison de leur différence fondamentale au niveau du schéma. En effet, le schéma utilisé par Jameson dans sa méthode est centré tandis que Roe utilise un schéma décentré ou upwind. Ces deux solveurs caractérisent assez bien l'ensemble de toutes les méthodes numériques qui peuvent être utilisées pour résoudre le problème de Riemann dédié aux écoulements compressibles contenant tout type d'interface.

Les figures 3.24 et 3.25 relatives aux lignes de courant superposées à la température pour les deux calculs avec Jameson et Roe, confirment les résultats concernant la stabilité de l'écoulement observée à la section 3.4.1 à l'occasion de la comparaison des résultats entre les calculs 2D et 3D. La structure de l'écoulement est réduite à six recirculations en parfaite symétrie par rapport à un axe situé dans la direction de la sortie.

L'étude de l'évolution du module de la vitesse dans la cavité au regard des figures 3.26 et 3.27 présente de nombreuses similarités : en amplitude, en répartition, en symétrie... Les zones caractéristiques de l'amplitude max et min du module de la vitesse se trouvent aux mêmes endroits dans les deux simulations effectuées avec Jameson et Roe. Au regard des figures 3.24 et 3.25 comme des figures 3.26 et 3.27, on constate qu'il existe deux tubes de courants principaux parfaitement symétriques qui partent des entrées pour se diriger vers la sortie tout en esquivant deux zones tourbillonnaires de taille importante. L'entrée d'un jet dans la cavité crée une première zone tourbillonnaire nommée plus haut zone de stagnation. Après avoir impacté perpendiculairement le cylindre, le jet formant un tube de courant amorce un virage à 90 degrés de façon à s'écouler le long de la paroi chauffée pour se détacher après avoir approximativement parcouru 1/8ième de tour du cylindre pour se diriger vers la sortie tout en esquivant le "tourbillon de fontaine" évoqué à la section 3.4.2.

Les profils du flux de chaleur pariétal de la figure 3.28 issus des calculs avec les solveurs de Jameson et Roe sont similaires en amplitude et allure mais diffèrent légèrement au niveau de la zone de fontaine (en $x = 0.042m$) sous la sortie. Les moyennes des flux de chaleur diffèrent à moins de 2% près en erreur relative ce qui confirme la grande similitude entre ces deux écoulements. Comparés aux flux pariétaux obtenus à l'aide du modèle incompressible, les flux issus du modèle compressible ne présentent qu'un seul point de séparation de part et d'autre de la sortie.

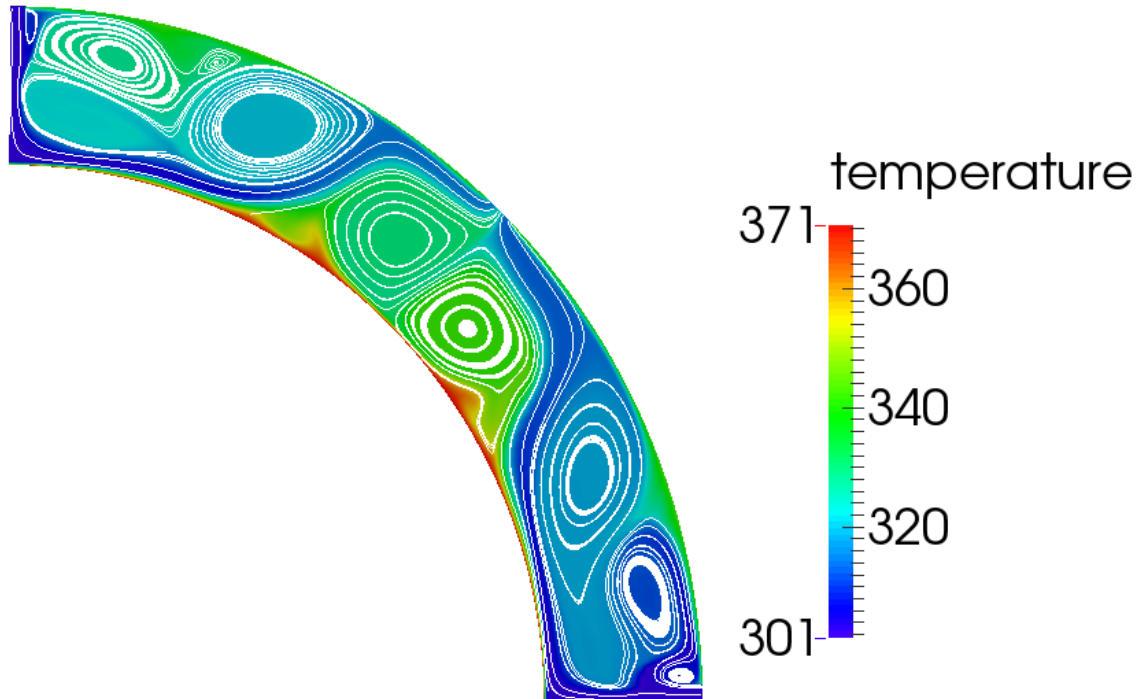


FIGURE 3.20 – Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation en 2D avec FLUENT-Piso

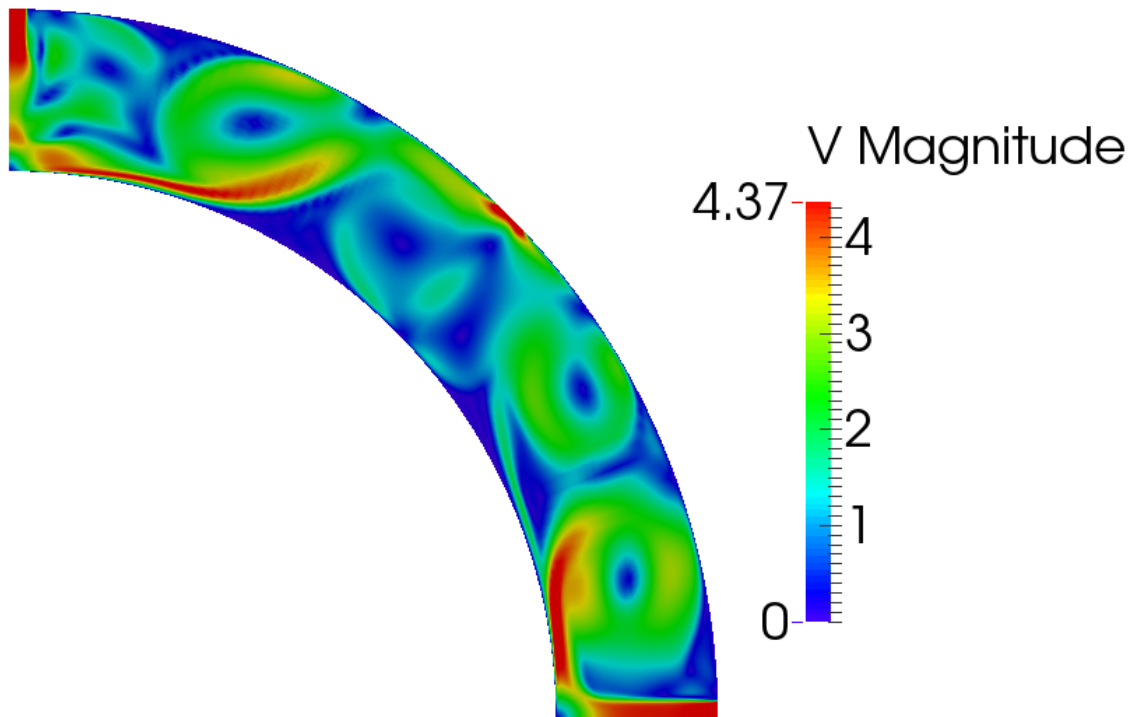


FIGURE 3.21 – Module de la vitesse dans le domaine de simulation avec FLUENT-Simple.

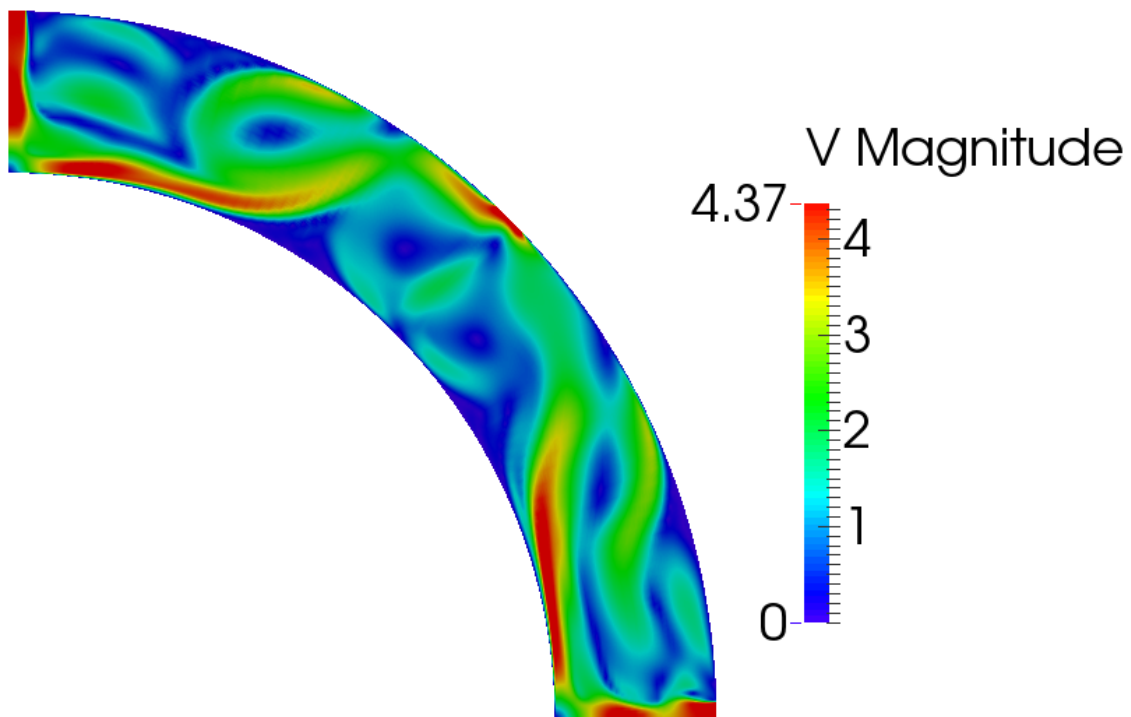


FIGURE 3.22 – Module de la vitesse dans le domaine de simulation avec FLUENT-Piso.

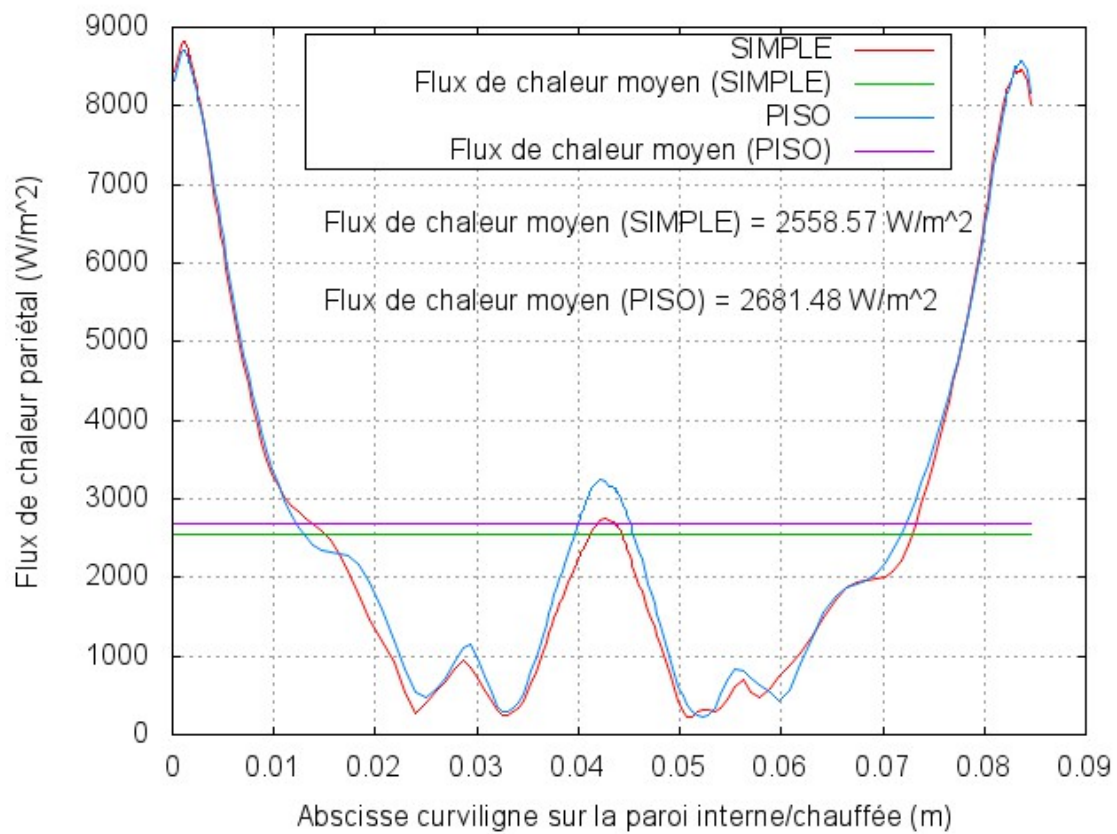


FIGURE 3.23 – Évolution du flux de chaleur pariétal sur la paroi interne-chauffée avec FLUENT.

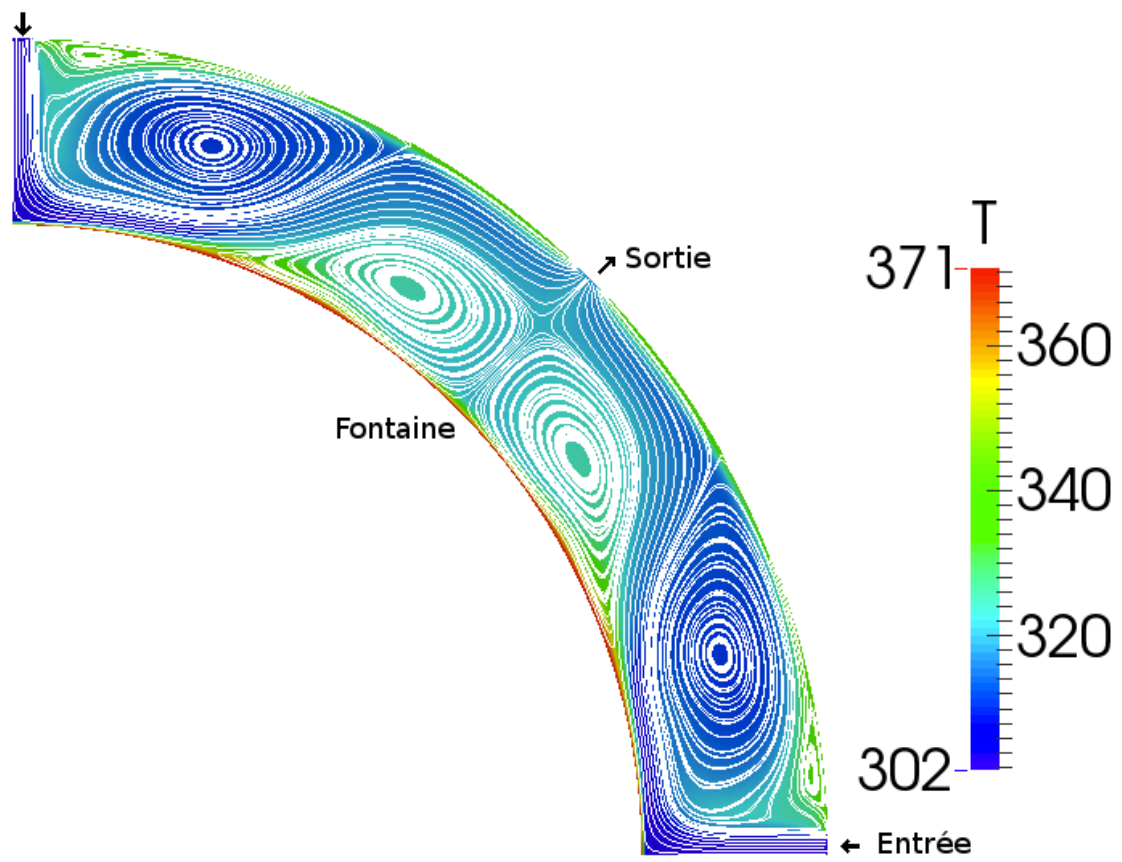


FIGURE 3.24 – Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation en 2D avec *elsA*-Jameson

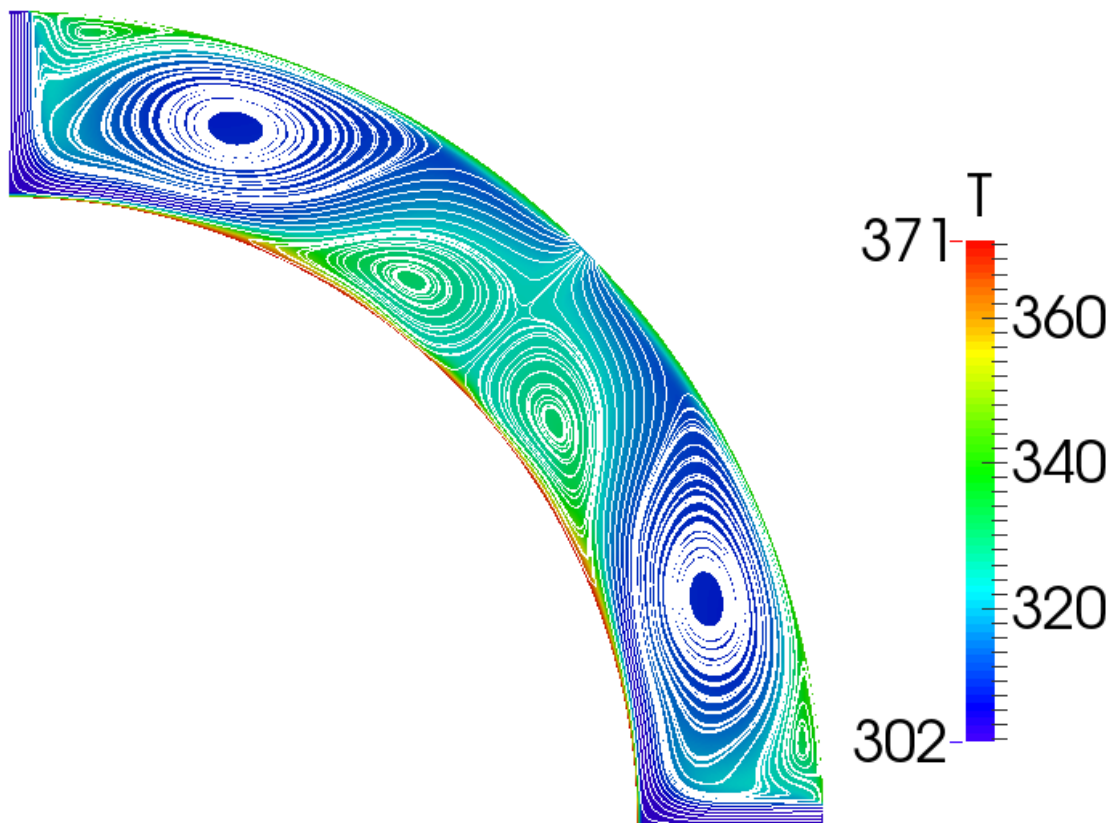


FIGURE 3.25 – Lignes de courant superposées aux variations de température. Simulation en 2D avec *elsA*-Roe

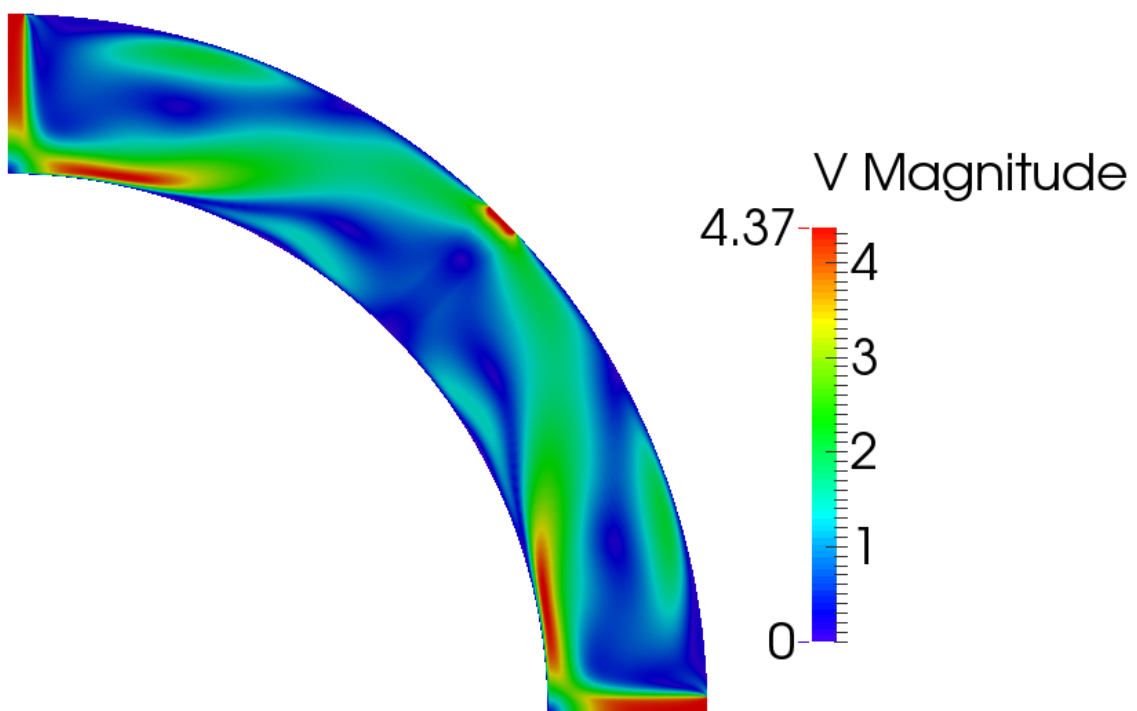


FIGURE 3.26 – Module de la vitesse dans le domaine de simulation avec *elsA*-Jameson.

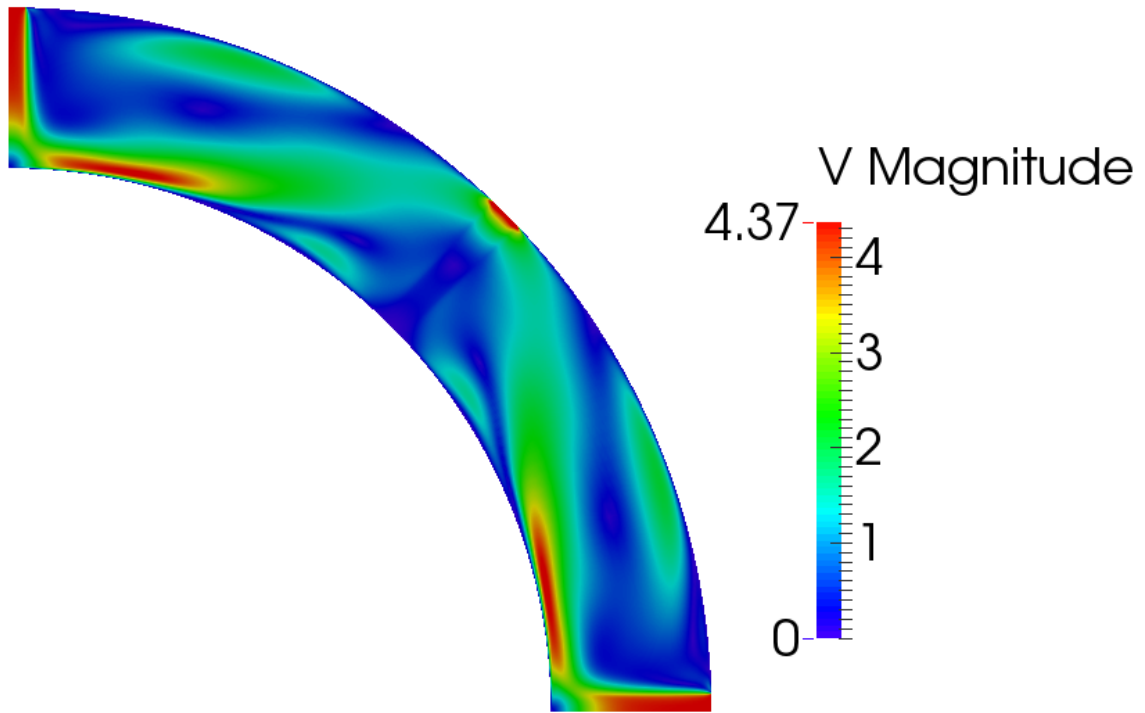


FIGURE 3.27 – Module de la vitesse dans le domaine de simulation avec *elsA*-Roe.

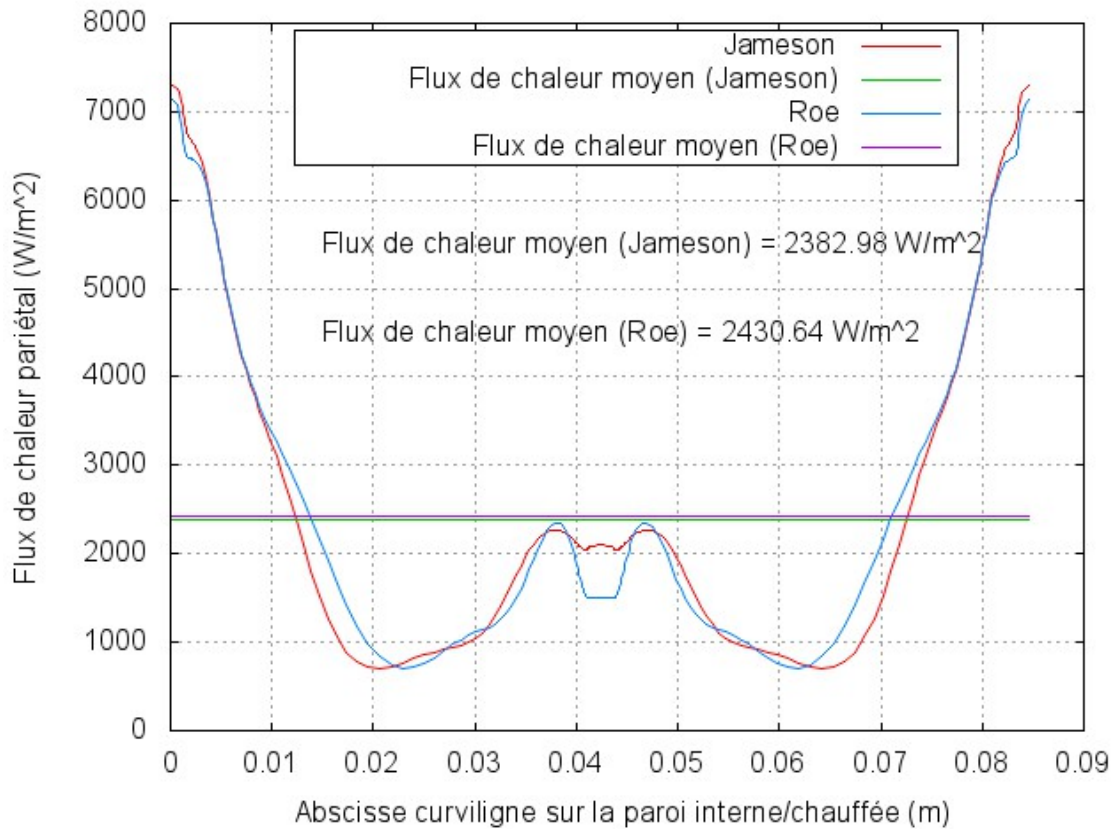


FIGURE 3.28 – Évolution du flux de chaleur pariétal avec *elsA*, sur la paroi interne-chauffée.

3.4.4 Comparaisons FLUENT/*elsA* et simulations/expérience

A travers les calculs faits par les logiciels FLUENT et *elsA*, on compare avant tout les résultats provenant des simulations numériques des modèles incompressibles et compressibles effectuées toutes deux par deux méthodes numériques différentes. Même si dans tout ce qui suit on parle de résultats FLUENT ou *elsA* par commodité de langage et d'écriture, ce sont bien les modèles et les méthodes que l'on compare mais pas les codes eux-mêmes.

Le tableau 3.8 donne l'erreur en pourcentage sur les débits pour les quatre simulations. Dans chaque cas, le débit d'entrée est pris comme débit de référence. Avec FLUENT, les erreurs vont de -0.5% à 1.5% avec Simple et Piso. La solution obtenue avec Piso est moins volatile, elle donne une meilleure estimation du débit de sortie que la solution obtenue avec Simple. Avec *elsA*, les erreurs sont de l'ordre de 0.5% et sont plus stables comparées aux solutions provenant de FLUENT.

TABLEAU 3.8 – Norme L^2 relative des erreurs sur les débits pour *elsA* et FLUENT.

| | Expérience | FLUENT avec Simple | FLUENT avec Piso | <i>elsA</i> avec Jameson | <i>elsA</i> avec Roe |
|---|--------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Débit entrant ($kg.s^{-1}$) | $8.88e^{-4}$ | $8.86e^{-4}$ | $8.86e^{-4}$ | $8.86e^{-4}$ | $8.85e^{-4}$ |
| Norme L^2 relative des erreurs par rapport à l'expérience | | -0.23% | -0.23% | -0.23% | -0.33% |
| Débit sortant ($kg.s^{-1}$) | $8.88e^{-4}$ | $8.82e^{-4}$ à $8.99e^{-4}$ | $8.88e^{-4}$ à $8.96e^{-4}$ | $8.90e^{-4}$ | $8.90e^{-4}$ |
| Norme L^2 relative des erreurs par rapport aux débits d'entrées | | -0.45% à 1.47% | 0.23% à 1.13% | 0.45% | 0.56% |

Dans le tableau 3.9, les puissances convectées ($\phi_{conv} = \dot{m}c_P(T_e - T_i)$) sont données pour *elsA* et FLUENT. Bien que la solution obtenue avec Simple soit moins stable que la solution Piso, elle est légèrement plus proche de la puissance convectée expérimentale. L'erreur sur la puissance convectée oscille entre -24% et -15% pour Simple et entre $-26,5\%$ et -17% pour Piso. Bien que les solutions *elsA* soient stables avec les deux solveurs (Jameson et Roe), elles produisent des erreurs différentes de la puissance convectée. Comparée à l'expérience, l'erreur est de -23% pour Roe tandis qu'elle n'est que de -17% pour Jameson. De nombreuses causes peuvent être à l'origine de cette différence. Citons en deux parmi elles. La première d'origine numérique, pourrait provenir de la nature des schémas numériques et des dissipations associées. Les schémas centrés (comme Jameson) ne fournissent pas de mécanisme de dissipation, ils requièrent l'ajout d'une dissipation artificielle qui peut être ajustée en fonction du degré de non-linéarité se produisant dans l'écoulement. D'un autre côté, les schémas upwind (comme Roe) disposent d'une certaine dissipation interne due aux différences unilatérales qu'il est en général difficile de modifier ou de réduire. Ces deux aspects non pris en compte pourraient faire l'objet d'une étude ultérieure. Comme seconde cause, on peut évoquer les erreurs de mesures provenant de la mesure expérimentale elle-même et de ses conditions d'utilisation. On verra dans la section suivante que le banc expérimental comporte de nombreuses fuites à la fois thermiques et massiques qui feront l'objet d'une étude pour améliorer les conditions de mesures. Ces pertes peuvent donc être aussi à l'origine d'une distorsion de la mesure expérimentale.

La figure 3.29 représente la comparaison finale de l'évolution des flux pariétaux sur la paroi interne-chauffée, entre *elsA* Roe et FLUENT Simple, tous deux calculés à l'ordre 1 et 2. Les profils pariétaux de ces courbes obtenus sont, en partie, la conséquence des différents motifs de

l'écoulement à l'intérieur de la cavité comme vu dans les paragraphes précédents. On rappelle que les positions $x = 0m$ et $x = 0.084m$ correspondent aux positions des deux entrées. Ces positions correspondent aux endroits d'impacts où le flux est maximum comme attendu excepté pour le cas incompressible où la valeur maximale est légèrement décalée vers l'intérieur de la cavité. En partant de ces extrémités pour se rapprocher de la bissectrice située sous la sortie en $x = 0.042m$, tous les flux diminuent globalement le long du cylindre avant d'augmenter en approchant de la zone de sortie. Bien que ces évolutions soient globalement symétriques par rapport au point $x = 0.042m$ on note essentiellement trois différences. La première concerne la valeur maximale du flux qui est de 20% supérieure dans le cas incompressible par rapport au cas compressible. La seconde différence concerne le nombre de points de séparation : 1 pour le modèle compressible et 2 points pour le modèle incompressible répartis de chaque côté de l'axe de symétrie. Enfin la troisième différence oppose les résultats parfaitement symétriques et stables des calculs compressibles alors que les calculs incompressibles montrent quelques instabilités consommant peu d'énergie au sein de la cavité. Malgré les différences citées et bien que les profils de flux de la figure 3.29 soient différents, les moyennes calculées du flux de chaleur sont relativement proches avec moins de 6% de différence.

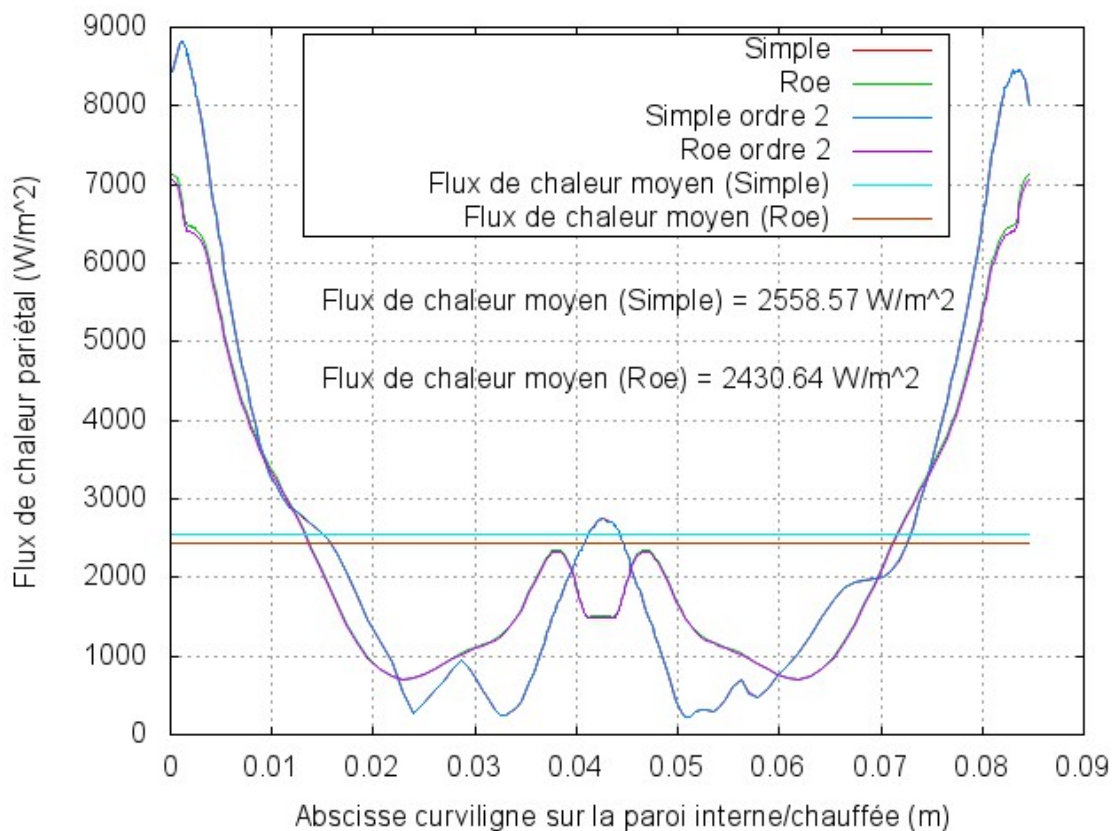


FIGURE 3.29 – Évolution du flux de chaleur pariétal avec *elsA* Roe et FLUENT Simple, sur la paroi interne-chauffée.

3.5 Amélioration de l'expérience

Le banc expérimental pour tester le refroidissement d'un cylindre de petite taille par impacts de jets d'air a été mis en place dans le cadre d'un projet de recherche en 2010. Dans le cadre

de ce projet, la vitesse d'entrée de l'air était de l'ordre de $40m.s^{-1}$. Cette thèse s'intéresse à la simulation numérique des équations de Navier-Stokes à tout nombre de Mach, et en particulier aux simulations bas-Mach avec une approche compressible. Il est donc intéressant de pouvoir disposer de mesures à basse vitesse ($V=4.37m.s^{-1}$ et $M = 0.013$), ce qui de plus permet de renforcer la supposition d'un écoulement laminaire, le nombre de Reynolds étant faible. Étant donné que la vitesse de rotation des pales du ventilateur reste constante, la variation du débit n'est possible que sur une faible plage via la manipulation d'un clapet. Compte tenu du diamètre du flexible d'aspiration du banc, les valeurs de vitesse moyenne envisagées avoisinent les $50m.s^{-1}$. Afin d'obtenir seulement quelques mètres par seconde comme débit d'air nous avons choisi d'obstruer partiellement les 4 entrées d'air. Cependant, cette mise en œuvre expérimentale comporte un certain nombre de défauts et rend difficile le côté reproductible de l'expérience nécessaire pour une validation. La première difficulté relative à ce procédé d'obstruction est qu'on la maîtrise mal sur les quatre branches, ce qui ne garantit pas un débit d'aspiration constant et identique à chaque branche. Par ailleurs, nous nous sommes rendus compte que le système mis en place comportait un risque de fuites d'air à certains endroits notamment au niveau de la connexion entre certaines pièces. Dans ce qui suit, on montre les modifications apportées pour limiter les fuites et pour pouvoir contrôler le débit d'air dans le circuit même à petite vitesse sans pour autant avoir à obstruer les entrées.

3.5.1 Contrôle du débit dans le système

Le débit d'air imposé par le ventilateur se traduit directement sur la vitesse d'entrée du jet dans la cavité qui a pour objectif de refroidir la paroi cylindrique interne chauffée. Le ventilateur ne pouvant modifier sa vitesse de rotation des pales qui le composent conduit à un débit quasi constant ou variable mais dans une trop faible proportion. Afin de pouvoir régler le débit d'air au niveau du système de refroidissement à des vitesses même très petites nous avons imaginé et conçu une pièce à rajouter entre le débitmètre et le ventilateur. Cette pièce est représentée sur la figure 3.30 comporte deux entrées d'air provenant d'une part du module de refroidissement et provenant d'autre part de l'extérieur. Ces deux entrées sont réglables soit par une vanne papillon soit par une vanne à clapet pivotant. Les deux entrées se rejoignent directement dans une sortie commune reliée au conduit d'aspiration du ventilateur. Ainsi le débit d'air constant aspiré par le ventilateur provient de deux endroits : l'extérieur et le module de refroidissement. En jouant sur les deux vannes il est alors possible de favoriser une entrée d'air plutôt que l'autre rendant possible les petits débits provenant de la cavité où se produit le refroidissement du cylindre chauffé. Le réglage de ces deux vannes et de celles qui se trouvent à la sortie du ventilateur permet de contrôler le débit dans la zone de mesures et d'avoir des vitesses allant de $0.02m.s^{-1}$ à $74.18m.s^{-1}$.

3.5.2 Suppression des aspirations d'air non souhaitées

Au cours de la série de mesures servant de référence pour les résultats présentés dans ce chapitre, des zones d'aspiration intrusives d'air (ou fuites) ont été identifiées entre différentes pièces du banc d'essai. La solution retenue au cours des mesures était d'isoler ces zones en les entourant de scotch. Cette solution n'est pas acceptable à long terme car elle empêche le démontage et n'est pas pérenne. Une solution acceptable est d'ajouter des joints aux différents endroits de raccord situés en amont du débitmètre. La figure 3.31 permet de visualiser la position des nouveaux joints. Le premier et le troisième joints permettent d'éviter toute aspiration extérieure de l'air vers le conduit d'évacuation. Toute intrusion d'air à ces endroits aurait comme conséquence de fausser la mesure du débit dans la zone d'étude et fausserait

également la température de sortie. La mise en place du joint 2 permet d'éviter le passage d'air intrusif dans la cavité qui aurait eu pour conséquence de modifier le débit d'air. Par ailleurs, une autre entrée d'air dans la cavité en dehors des entrées prévues à cet effet modifierait le champ de vitesse et les températures pariétales mesurées.

Ces deux améliorations permettent de réduire les erreurs de mesures expérimentales et devraient donc permettre de meilleures comparaisons avec les simulations numériques. La campagne d'essais actuelle permettra d'acquérir une base de donnée suffisamment large qui on l'espère pourra nous donner une meilleure connaissance sur la nature exacte de ce type d'écoulements confinés afin d'apprécier en particulier son niveau d'efficacité au refroidissement.

TABLEAU 3.9 – Comparaison des puissances convectées entre *elsA* et FLUENT. L'expérience est la référence.

| | Expérience | FLUENT avec Simple | FLUENT avec Piso | <i>elsA</i> avec Jameson | <i>elsA</i> avec Roe |
|-------------------------|------------|-----------------------|----------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Puissance convectée (W) | 20.00 | 15.17 à 17.01 | 14.72 à 16.65 | 16.56 | 15.44 |
| Erreur relative | | -24.15% à -14.95% | -26.40% à -16.75% | -17.20% | -22.80% |

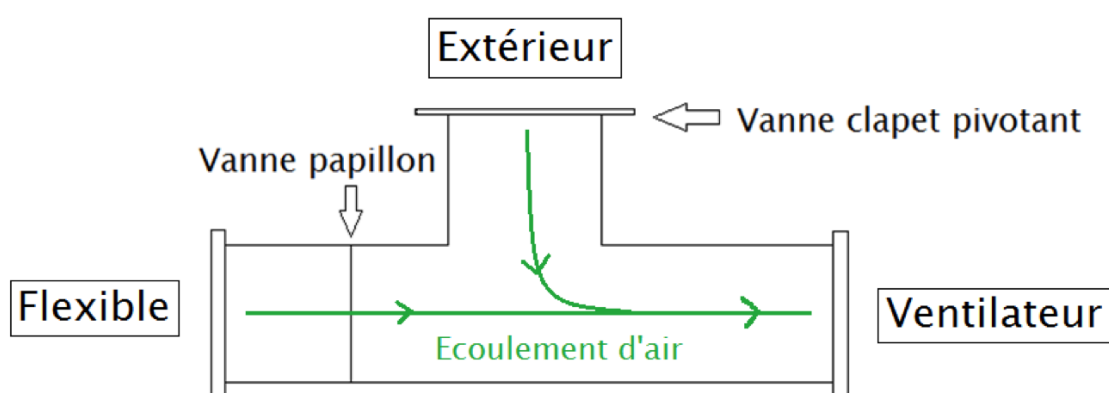


FIGURE 3.30 – Schéma du té, qui permet de mieux gérer le débit dans le système.

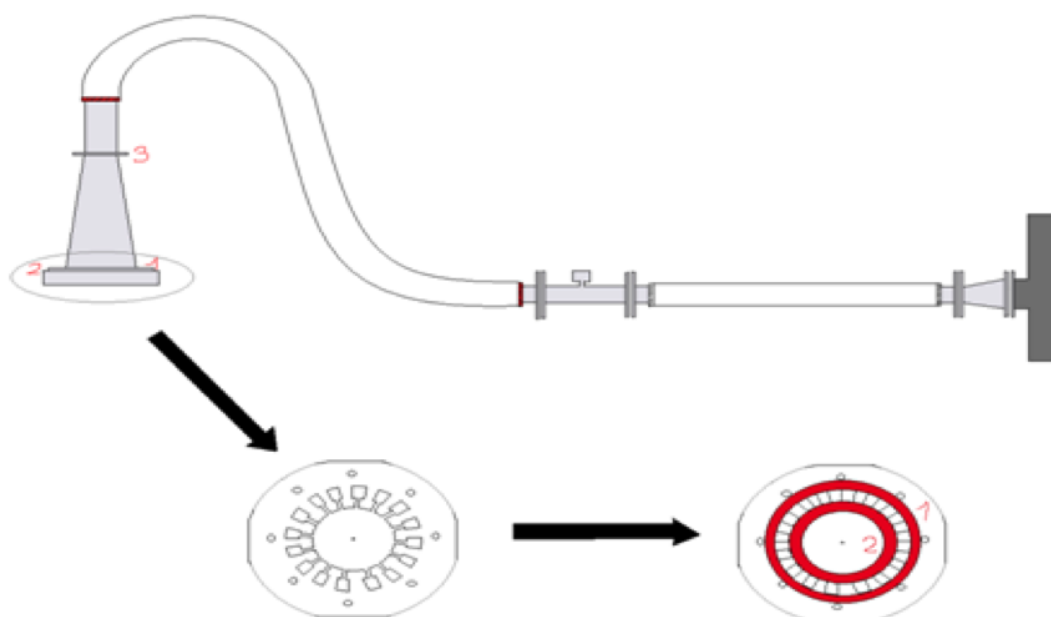


FIGURE 3.31 – Positions des joints ajoutés.

Chapitre 4

Simulation des équations d'Euler avec différents jeux de variables

4.1 Intérêt du changement de variables

Considérons les équations d'Euler pour un gaz parfait $\frac{p}{\rho} = RT$. Soit ρ , V , p , T et E respectivement la densité, la vitesse, la pression, la température et l'énergie totale. Alors le système des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie est :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) &= 0 \\ \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V \otimes V) + \nabla p &= 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V E) + \operatorname{div}(pV) &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

Il est possible d'écrire ce système comme un système d'équations hyperboliques avec les variables conservatives suivantes :

$$u = (\rho, \rho V, \rho E)^\top\tag{4.2}$$

A l'aide de l'utilisation d'une fonction de flux lisse $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, ($A \subset \mathbb{R}^m$) $1 \leq i \leq d$, le système des équations 4.1 s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i(u)}{\partial x_i} = 0\tag{4.3}$$

avec les conditions initiales :

$$u(0) = u_0\tag{4.4}$$

et des conditions de bord appropriées. La forme quasi linéaire de l'équation (4.3) utilise la jacobienne du flux $A_i(u) = Df_i(u)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d A_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0\tag{4.5}$$

L'équation (4.3) est comprise au sens faible, puisque les solutions sont en général non différentiables et même discontinues (formation de chocs). D'un point de vue mathématique, il est

possible de considérer une formulation faible, où toutes les dérivées sont mises sur des fonctions tests lisses par intégration par parties.

Le problème de Cauchy ($\Omega = \mathbb{R}^n$) se lit par exemple : trouver $u \in L^1([0; +\infty[\times \mathbb{R}^n)$ tel que pour toute fonction test ϕ compacte et lisse :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^d f_i(u) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \phi(0) \quad (4.6)$$

La théorie mathématique sur les systèmes hyperboliques dans plusieurs dimensions d'espace est encore incomplète. La situation est plus satisfaisante pour les équations scalaires. Dans le but de prouver l'unicité de la solution faible, il est nécessaire de satisfaire une condition supplémentaire sur l'entropie.

Si u est une solution lisse par morceaux avec une surface de discontinuité Γ , la formulation faible implique la condition de Rankine-Hugoniot qui détermine la vitesse du choc s :

$$s[u] = [f_n(u)] \quad (4.7)$$

Le système est hyperbolique si la Jacobienne $A_n = Df_n(u) = \sum_{i=1}^d A'_i(u)n_i$ admet une décomposition spectrale :

$$A_n(u) = R_n(u)\Lambda_n(u)R_n(u)^{-1} \quad (4.8)$$

avec une matrice diagonale de valeurs propres réelles $\Lambda(u)$ et une matrice régulière $R_n(u)$ composée de vecteurs propres pour tout vecteur $n \in \mathbb{R}^d$.

L'hyperbolicité se conserve pour un changement de variables lisse $u = \Phi(w)$. Le système quasi-linéaire devient :

$$D\Phi(w) \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^d A_i(u(w)) D\Phi(w) \frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad (4.9)$$

Le système est symétrique si $D\Phi(w)$ est symétrique définie positive et que les matrices $A_i(u(w))D\Phi(w) = g'_i(w)$, $g_i(w) := f_i(u(w))$ sont symétriques.

Le système admet une entropie mathématique s'il existe une paire de fonctions lisses (U, F) $U : A \rightarrow \mathbb{R}$, $F_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq d$, $A \subset \mathbb{R}^m$) telle que U est strictement convexe et pour tout i tel que :

$$DU(u)Df_i(U) = DF_i(u) \quad (4.10)$$

L'existence d'une entropie pour les équations d'Euler est cruciale et découle de la thermodynamique, ce qui implique l'hyperbolicité et la possibilité de symétriser le système. Imposons que l'entropie soit une fonction décroissante du temps (l'entropie physique qui est plus ou moins son opposée, est croissante) :

$$\frac{\partial U(u)}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_i(u)}{\partial x_i} \leq 0 \quad (4.11)$$

Comme les solutions peuvent contenir des chocs, l'équation (4.11) doit encore être comprise au sens faible. Comme précédemment, on retrouve une condition sur l'entropie :

$$s[U(u)] \leq [F_n(u)] \quad (4.12)$$

Pour une solution lisse, nous retrouvons une égalité dans l'équation (4.11) grâce à l'équation (4.10) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(u)}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_i(u)}{\partial x_i} &= DU(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d DF_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &= DU(u)^\top \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d DU(u) Df_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &= DU(u)^\top \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i(u)}{\partial x_i} \right) = 0 \end{aligned}$$

4.1.1 Les variables entropiques

La transformée de Legendre-Fenchel de $U(u)$, $U^*(v)$ est définie par $U^*(v) = \sup_u (u \cdot v - U(u)) = u(v) \cdot v - U(u(v))$ avec $DU(u(v)) = v^\top$ et est appelée potentiel d'entropie. Ce qui donne :

$$DU^*(v) = u(v)^\top + v^\top \frac{\partial u}{\partial v} - DU \frac{\partial u}{\partial v} = u(v)^\top \quad (4.13)$$

Comme le conjugué d'une fonction convexe lisse est une fonction convexe lisse, on peut dire que $M := M(v) = \frac{\partial u}{\partial v} = D^2U^*(v)$ est symétrique définie positive et A_n est similaire à :

$$M^{-1/2} A_n M^{1/2} = M^{-1/2} (A_n M) M^{-1/2} \quad (4.14)$$

qui est symétrique, puisque $A_n M$ est symétrique comme ce sera montré plus bas, et l'hyperbolicité du système suit.

La transformation $v \rightarrow u(v)$ est un changement de variables spécial et $v = DU^\top$ sont nommées les variables entropiques en comparaison des variables conservatives u . Clairement $V(u) = U(u(v))$ est convexe puisque $D^2V = I$.

Soit $g_i(v) := f_i(u(v))$, et $G_i(v) := F_i(u(v))$. alors :

$$DG_i(v) = DF_i(u(v))M(v) = DU(u(v))Df_i(u(v))M(v) = DU(v)Dg_i(v). \quad (4.15)$$

Ce changement de variables transforme la forme quasi-linéaire (équation (4.5)) en :

$$M(v) \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^d C_i(v) \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \quad \text{sur } \Omega, \quad (4.16)$$

avec $M(v)$ symétrique définie positive et $C_i(v) := Dg_i(v) = Df_i(u(v))M(v)$ symétrique, comme ce sera montré en suivant. Les variables entropiques symétrisent donc le système. L'équivalence entre la généralisation de l'entropie et la symétrisation des équations a été montrée par Mock [22] et Godunov [23].

Il reste à prouver la symétrie des Jacobiennes en variables entropiques. Le potentiel entropique $F_i^*(v)$ est défini de manière que :

$$F_i(u) + F_i^*(v) = f_i(u) \cdot v \quad \text{resp.} \quad G_i(v) + F_i^*(v) = g_i(v) \cdot v \quad (4.17)$$

Il découle de l'équation (4.15) que :

$$DF_i^*(v) = g_i(v)^\top + v^\top C_i(v) - DG_i(v) = g_i(v)^\top \quad (4.18)$$

De cette égalité, on retrouve la symétrie de $C_i(v) = Dg_i(v) = D^2F_i^*(v)$.

En plus de symétriser le système, l'utilisation de variables entropiques permet d'éviter les problèmes de définition des Jacobiennes quand le nombre de Mach tend vers 0. En effet, Hauke et Hughes [24] montrent que la limite des Jacobiennes n'est pas définie en variables conservatives quand le nombre de Mach tend vers 0. Par exemple, en 1D :

$$\lim_{M \searrow 0} A_1(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ +\infty & \mp \frac{0}{0} & \pm \frac{0}{0} \\ \pm \infty & -\frac{0}{0} & \pm \frac{0}{0} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

alors que l'on ne retrouve pas ce problème en variables entropiques.

Dans la suite, le vecteur entropique correspondra au vecteur suivant :

$$v = \begin{pmatrix} \tilde{\mu} - \frac{1}{2}|V|^2 \\ \frac{T}{V} \\ \frac{-1}{T} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

avec $\tilde{\mu} = h - Ts$ le potentiel chimique du fluide, V la vitesse et T la température. h est l'enthalpie et s l'entropie. Pour un gaz parfait, les variables entropiques peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$v = \begin{pmatrix} \frac{c_p T(1 - \ln(T)) + RT(\ln(p) - \ln(R)) - \frac{1}{2}|V|^2}{T} \\ \frac{T}{V} \\ \frac{-1}{T} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

avec p la pression, c_p chaleur spécifique à pression constante et R la constante des gaz parfait.

4.1.2 Les variables physiques en pression

Un autre ensemble de variables permet d'éviter le problème de définition des Jacobiennes quand le nombre Mach tend vers 0, mais ne permet pas de symétriser le système. Ce sont les variables physiques de pression :

$$y = \begin{pmatrix} p \\ V \\ T \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

4.2 Discrétisation des équations d'Euler avec un changement de variables

Afin d'obtenir la discrétisation des équations d'Euler avec différents jeux de variables, reprenons la discrétisation présentée en section 1.3.2 pour les variables conservatives u .

$$\left\langle \frac{\partial u_h}{\partial t}, \phi_h \right\rangle + a_h(u_h)(\phi_h) = 0 \quad \forall \phi_h \in D_h^k. \quad (4.23)$$

Soit w un jeu de variables : entropiques $v = DU(u)^T$ ou physiques en pression y . Afin de simplifier les notations, le changement de variables est noté $u(w)$.

La demi-discrétisation cherche $w_h \in D_h^k$ tel que :

$$\left\langle \frac{\partial u(w_h)}{\partial t}, \phi_h \right\rangle + a_h(u(w_h))(\phi_h) = 0 \quad \forall \phi_h \in D_h^k \quad (4.24)$$

$$a_h(u(w_h))(\phi_h) := - \int_{\mathcal{K}_h} \sum_{i=1}^d f_i(u(w_h)) \cdot \frac{\partial \phi_h}{\partial x_i} + \int_{S_h^{\text{int}}} f_{n_S}^\Sigma(w_h^{\text{in}}, w_h^{\text{ex}}) \cdot [\phi_h] + \int_{S_h^\partial} f_{n_S}^\partial(w_h^{\text{in}}, w^{\text{D}}) \phi_h \quad (4.25)$$

La première observation qu'il est possible de faire est que la dérivée en temps devient non linéaire :

$$\left\langle \frac{\partial u(w_h)}{\partial t}, \phi_h \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u(w_h)}{\partial w} \frac{\partial w_h}{\partial t}, \phi_h \right\rangle \quad (4.26)$$

Dans les simulations réalisées par la suite, une méthode Euler implicite est utilisée et chaque itération en temps sera calculée avec une méthode de Newton, présentée en section 4.2.2.

La seconde observation concerne le flux interne :

$$f_n^\Sigma(w^{\text{in}}, w^{\text{ex}}) = \{f_n(u(w))\} + D^\Sigma(w^{\text{in}}, w^{\text{ex}})[w] \quad (4.27)$$

$$= \frac{1}{2} (f_n(u(w^{\text{in}})) + f_n(u(w^{\text{ex}}))) + D^\Sigma(w^{\text{in}}, w^{\text{ex}})(w^{\text{in}} - w^{\text{ex}}) \quad (4.28)$$

Différents choix sont possibles pour la matrice de diffusion D^Σ . Les choix utilisés dans le cadre de cette thèse sont présentés dans la section 4.2.1.

4.2.1 Le flux numérique

De manière à obtenir une stabilité en entropie, nous aimerions choisir (quel que soit le jeu de variables), la fonction test $\phi_h = v(w_h)$. Cette forme est particulièrement intéressante pour le choix des variables entropiques, puisque $\phi_h \in D_h^k$. Pour les autres choix, ce n'est possible que si $k = 0$. De plus, pour $w = v$, la diffusion agit directement sur l'entropie et un bon choix théorique (voir Barth [25, 26]) est :

$$D^\Sigma(v^{\text{in}}, v^{\text{ex}}) = \int_0^1 R_n(v_s) |\Lambda_n(v_s)| R_n(v_s)^\top ds \quad (4.29)$$

avec $v_s := (1 - s)v^{\text{in}} + sv^{\text{ex}}$. En pratique, l'intégrale est approchée par intégration numérique. Dans le cas des variables physiques (et même pour les variables conservatives) pour $k = 0$, le flux entropique est retrouvé grâce à une transformation en variables entropiques :

$$D^\Sigma(w^{\text{in}}, w^{\text{ex}}) = D^\Sigma(v^{\text{in}}, v^{\text{ex}}) \int_0^1 \frac{\partial v(w_s)}{\partial w} ds \quad (4.30)$$

La méthode d'intégration numérique utilisée a aussi une importance. Afin de ne pas avoir de problème au cours des simulations, il est nécessaire d'utiliser la méthode de Simpson avec trois points d'intégration pour calculer l'équation (4.29) et d'utiliser une méthode à deux points d'intégration pour calculer $\int_0^1 \frac{\partial v(w_s)}{\partial w} ds$.

Si par exemple, on cherche à faire le cas de la simulation du cylindre à Mach 3 et que l'on n'utilise pas les méthodes d'intégration numérique précisées au paragraphe précédent, les solutions obtenues, s'il y en a, pourront contenir le phénomène de Carbuncle. Il s'agit d'une instabilité qui se forme dans la zone du choc droit, en amont du cylindre sur l'axe de symétrie. En variables entropiques, avec une méthode de Simpson pour chaque intégrale, la solution obtenue sur la figure 4.1 montre bien la présence de ce phénomène. Par contre, en utilisant les méthodes d'intégrations proposées, la solution sur la figure 4.2 ne présente pas de Carbuncle.

Ce flux entropique avec les méthodes d'intégration numérique associées est celui qui sera utilisé pour les simulations 2D. Pour les simulations 1D, c'est le flux de Lax-Friedrich, modifié par Barth [25] et repris par Pesch et van der Vegt [27] qui est utilisé.

$$f_n^\Sigma(w^{\text{in}}, w^{\text{ex}}) = \{f_n(u(w))\} + D^\Sigma(w^{\text{in}}, w^{\text{ex}})[w] \quad (4.31)$$

$$D^\Sigma(w^{\text{in}}, w^{\text{ex}}) = |\Lambda|_{\text{max}} \int_0^1 \frac{\partial v(w_s)}{\partial w} ds \quad (4.32)$$

L'intégrale est évaluée avec une méthode d'intégration numérique à deux points.

4.2.2 Le solveur de Newton

Afin de calculer w_h^n pour chaque instant n de l'équation non linéaire :

$$\left\langle \frac{u(w_h^n) - u(w_h^{n-1})}{\Delta t}, \phi_h \right\rangle + a_h(w_h^n)(\phi_h) = 0 \quad \forall \phi_h \in D_h^k \quad (4.33)$$

$$a_h(w_h^n)(\phi_h) := - \int_{\mathcal{K}_h} \sum_{i=1}^d f_i(u(w_h^n)) \cdot \frac{\partial \phi_h}{\partial x_i} + \int_{\mathcal{S}_h^{\text{int}}} f_{n_S}^\Sigma((w_h^n)^{\text{in}}, (w_h^n)^{\text{ex}}) \cdot [\phi_h] + \int_{\mathcal{S}_h^\partial} f_{n_S}^\partial((w_h^n)^{\text{in}}, w^{\text{D}}) \phi_h \quad (4.34)$$

une méthode de Newton globale est utilisée.

Pour cela, il est nécessaire de faire un développement en série de Taylor des termes à l'instant n .

$$\begin{aligned} u(w_h^n) &= u(w_h^{n-1}) + \frac{\partial u(w_h^{n-1})}{\partial w} (w^n - w^{n-1}) \\ &= u(w_h^{n-1}) + A_0(w_h^{n-1}) \Delta w_h^n \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} f_i(u(w_h^n)) &= f_i(u(w_h^{n-1})) + \frac{\partial f_i(u(w_h^{n-1}))}{\partial w} (w^n - w^{n-1}) \\ &= f_i(u(w_h^{n-1})) + A_i(w_h^{n-1}) \Delta w_h^n \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ces développements en série de Taylor impliquent le calcul de différentes Jacobiennes $A_i(w_h^{n-1})$ dont le détail pour chaque jeu de variables est présenté en annexe A.

L'équation qui sera donc calculée par le solveur de Newton devient donc :

$$\left\langle \frac{A_0(u(w_h^{n-1})) \Delta w_h^n}{\Delta t}, \phi_h \right\rangle + a_h(\Delta w_h^n)(\phi_h) = \left\langle \frac{u(w_h^{n-1})}{\Delta t}, \phi_h \right\rangle - a_h(w_h^{n-1})(\phi_h) \quad \forall \phi_h \in D_h^k \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} a_h(\Delta w_h^n)(\phi_h) &:= - \int_{\mathcal{K}_h} \sum_{i=1}^d A_i(u(w_h^{n-1})) \Delta w_h^n \cdot \frac{\partial \phi_h}{\partial x_i} \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}_h^{\text{int}}} f_{n_S}^\Sigma((\Delta w_h^n)^{\text{in}}, (\Delta w_h^n)^{\text{ex}}) \cdot [\phi_h] + \int_{\mathcal{S}_h^\partial} f_{n_S}^\partial((\Delta w_h^n)^{\text{in}}, w^{\text{D}}) \phi_h \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} a_h(w_h^{n-1})(\phi_h) &:= - \int_{\mathcal{K}_h} \sum_{i=1}^d f_i(u(w_h^{n-1})) \cdot \frac{\partial \phi_h}{\partial x_i} \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}_h^{\text{int}}} f_{n_S}^\Sigma((w_h^{n-1})^{\text{in}}, (w_h^{n-1})^{\text{ex}}) \cdot [\phi_h] + \int_{\mathcal{S}_h^\partial} f_{n_S}^\partial((w_h^{n-1})^{\text{in}}, w^{\text{D}}) \phi_h \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.3 Résultats numériques

Afin de pouvoir évaluer l'apport réel de l'utilisation des variables physiques et entropiques par rapport aux variables conservatives, une nouvelle comparaison des méthodes est réalisée. Cette étude est réalisée avec uniquement la méthode éléments-finis discontinus de Galerkin et va permettre de comparer les résultats avec le flux de HLLC, utilisé précédemment à la nouvelle formulation présentée au début de ce chapitre. Cette comparaison est effectuée sur les différents cas test présentés dans le chapitre 2 et sur deux cas test 1D (sections 4.3.1 et 4.3.4), avec le flux de Lax-Friedrich modifié. Dans ce chapitre, l'algorithme utilisé pour le pas de temps est un schéma d'Euler Implicite.

4.3.1 Le transport d'une onde

Le premier cas test utilisé pour tester le changement de variables est un écoulement monodimensionnel dans un domaine de $10m$ de long avec des conditions de bord périodiques. Dans ce cas test, le déplacement d'une onde de masse volumique est étudié en fonction du temps. Le domaine est initialisé à $t = 0s$ à partir des équations (4.40) à (4.42), le fluide est par ailleurs considéré comme un gaz parfait. Les résultats de simulation sont étudiés à $t = 1s$, avec un pas de temps fixe de $dt = 1.e^{-4}s$. Différentes valeurs de la vitesse ont été étudiées, allant de $\frac{1}{880}m.s^{-1}$ à $10m.s^{-1}$ mais seule la vitesse la plus faible correspondant à un nombre de Mach de 0.01 est présentée. Les résultats étant similaires pour toutes les vitesses, pour toutes les variables, on ne représente ici que le cas à plus basse vitesse : cas le plus critique pour un code compressible.

$$p = 1Pa \quad (4.40)$$

$$V = \frac{1}{880}m.s^{-1} \quad (4.41)$$

$$\forall t, \forall x \in [0, 10], \rho(x, t) = 1.1 + 0.1 \sin\left(\frac{2\pi(x + Vt)}{10}\right) kg.m^{-3} \quad (4.42)$$

Une étude de dépendance au maillage est réalisée sur des maillages allant de 8 à 100 éléments de taille identique. Pour les différents maillages, les solutions obtenues correspondent à la solution analytique, comme il est possible de le voir sur la figure 4.3 pour un maillage de 12 éléments.

Le tableau 4.1 regroupe les normes L^2 relatives des erreurs par rapport à la solution analytique, sur les différents maillages et pour des simulations d'ordre 1 (DG0) ou 2 (DG1). Les erreurs obtenues sont équivalentes à moins de 0.1%, l'utilisation des variables physiques ou entropiques n'entraîne donc pas de perte de précision sur ce cas test mais ne permet pas d'en gagner. Pour le cas entropique DG1 et sur les maillages grossiers (8 et 12 éléments), les solutions sont moins précises de 1 ordre de grandeur, par rapport aux variables conservatives ou physiques mais les erreurs restent acceptables de l'ordre de 10^{-4} .

4.3.2 Le cas de Fraenkel (FTC)

L'étude du cas de Fraenkel est réalisée uniquement sur le domaine complet, comme dans la section 2.2.1.2. C'est un cas 2D, stationnaire et incompressible avec un nombre de Mach allant de 0 à $5.e-4$. Dans ce cas, le profil de vitesse en entrée est cisailé de manière symétrique par

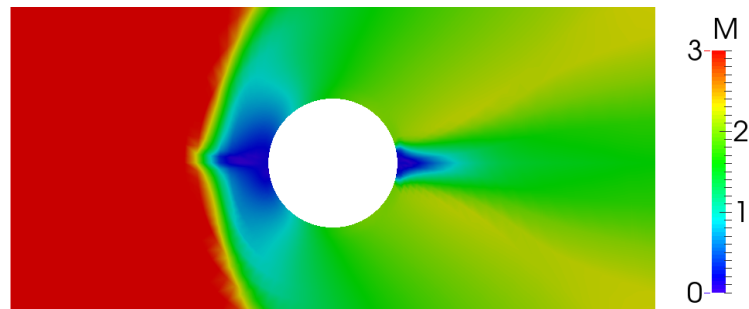


FIGURE 4.1 – Simulation du cylindre à Mach 3 avec les variables entropiques et la méthode Simpson pour chaque intégration numérique du flux entropique.

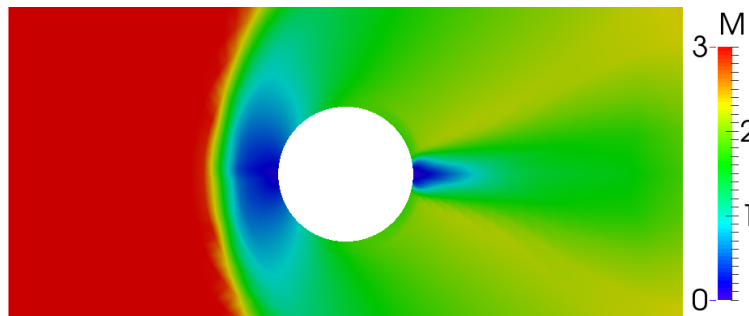


FIGURE 4.2 – Simulation du cylindre à Mach 3 avec les variables entropiques et les bonnes méthodes d'intégration numérique pour le flux entropique.

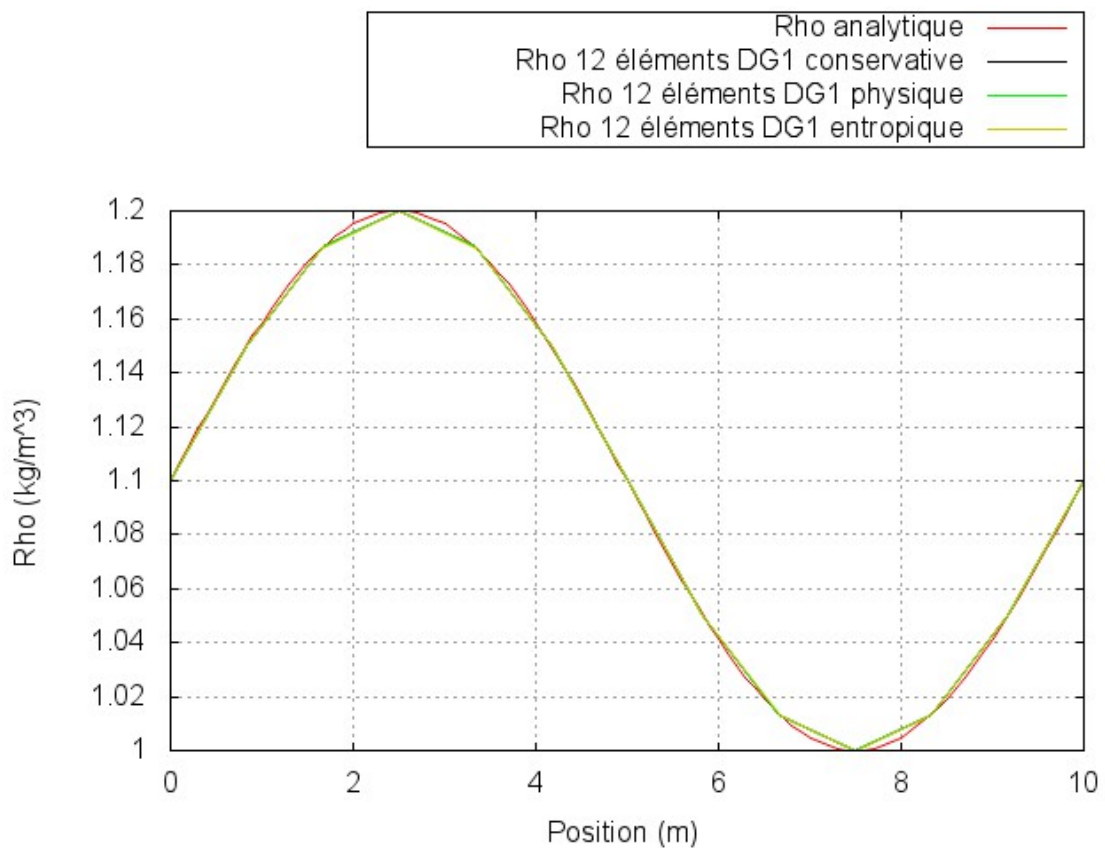


FIGURE 4.3 – Masse volumique dans le domaine après 1s.

rapport à l'axe horizontal du cylindre qu'il impacte.

La figure 4.4 présente l'écoulement obtenu dans le domaine avec les variables entropiques. Il est identique à ceux obtenus avec les autres jeux de variables. La comparaison des solutions est réalisée à partir du module de la vitesse sur la paroi du cylindre. La figure 4.5 présente cette évolution pour l'ensemble des variables et le tableau 4.2 regroupe les normes L^2 relatives des erreurs de chaque simulation par rapport à la solution analytique.

Dans les différents cas, la structure de l'écoulement correspond à celle décrite dans la solution analytique de Fraenkel. On retrouve bien deux recirculations en amont et deux en aval du cylindre qui sont symétriques par rapport à l'axe horizontal $y = 0$. Le module de la vitesse en paroi du cylindre est le même pour les trois jeux de variables. L'utilisation des différents jeux de variables permet donc d'obtenir un degré de précision identique sur ce cas test.

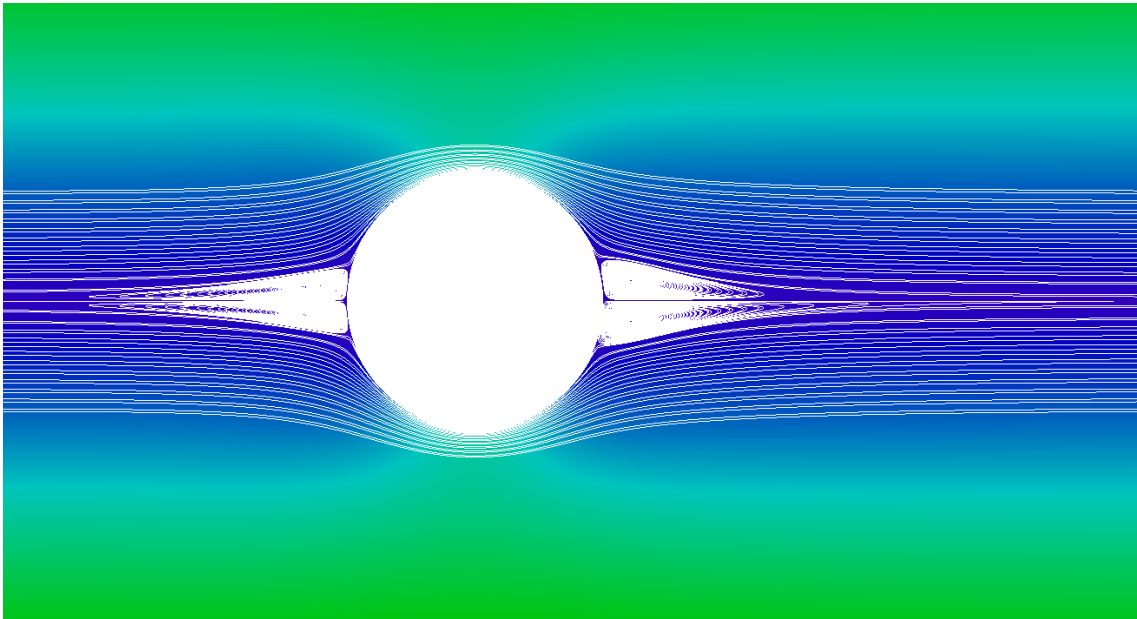


FIGURE 4.4 – Lignes de courant sur la vitesse dans le domaine avec Concha et les variables entropiques.

4.3.3 La tuyère à basse vitesse (ISLN)

Pour le cas de l'écoulement dans une tuyère convergente-divergente, le nombre de Mach en entrée est de 0.036, donc très petit devant 1. Comme dans la section 2.2.2, la tuyère étudiée fait $1m$ de long et $0,1m$ de diamètre au niveau de l'entrée et de la sortie. Le diamètre au col est de $0.09m$. Le maillage utilisé est structuré, constitué de 1000 quadrangles.

Les résultats (figures 4.6 et 4.7 et le tableau 4.3) obtenus sont tous en bon accord avec la solution analytique, les différentes courbes sont superposées. On peut remarquer que la solution avec les variables entropiques est la plus précise en terme de nombre de Mach et de pression, mais le gain est inférieur à 1%.

4.3.4 Le tube à choc (ST)

Le cas du tube à choc étant un écoulement 1D quasi 2D, deux études sont réalisées avec le changement de variables. Une première étude est menée avec le code 1D sur un maillage de 200 éléments identiques. Ensuite, une seconde étude est menée avec Concha sur le maillage de

TABLEAU 4.1 – Normes L^2 relatives des erreurs sur la masse volumique à $t = 1s$, pour différents maillages.

| Nombre d'éléments | 8 | 12 | 25 | 50 | 100 |
|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Conservative DG0 | $1.510e^{-2}$ | $1.075e^{-2}$ | $5.477e^{-3}$ | $2.806e^{-3}$ | $1.421e^{-3}$ |
| Physique DG0 | $1.511e^{-2}$ | $1.076e^{-2}$ | $5.478e^{-3}$ | $2.806e^{-3}$ | $1.421e^{-3}$ |
| Entropique DG0 | $1.511e^{-2}$ | $1.075e^{-2}$ | $5.477e^{-3}$ | $2.806e^{-3}$ | $1.421e^{-3}$ |
| Conservative DG1 | $9.066e^{-5}$ | $9.134e^{-5}$ | $9.158e^{-5}$ | $9.160e^{-5}$ | $9.160e^{-5}$ |
| Physique DG1 | $9.069e^{-5}$ | $9.134e^{-5}$ | $9.158e^{-5}$ | $9.160e^{-5}$ | $9.160e^{-5}$ |
| Entropique DG1 | $3.097e^{-4}$ | $1.557e^{-4}$ | $9.637e^{-5}$ | $9.193e^{-5}$ | $9.163e^{-5}$ |

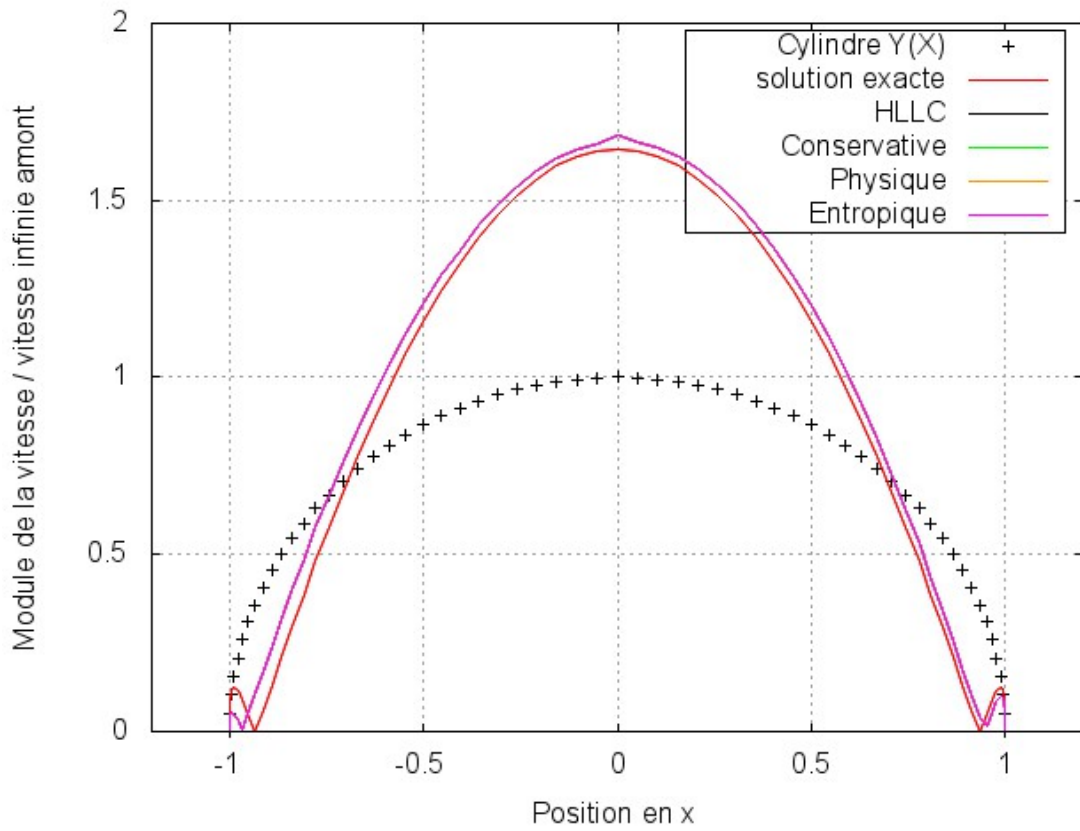


FIGURE 4.5 – Vitesse sur la paroi du cylindre de FTC avec Concha et les différents jeux de variables.

TABLEAU 4.2 – Normes L^2 relatives des erreurs par rapport à la solution analytique pour FTC.

| | Vitesse (% par rapport aux variables conservatives) |
|--------------|--|
| HLLC | $5.946e^{-2}$ |
| Conservative | $5.946e^{-2}$ |
| Physique | $5.946e^{-2}$ (0%) |
| Entropique | $5.947e^{-2}$ (-0.02%) |

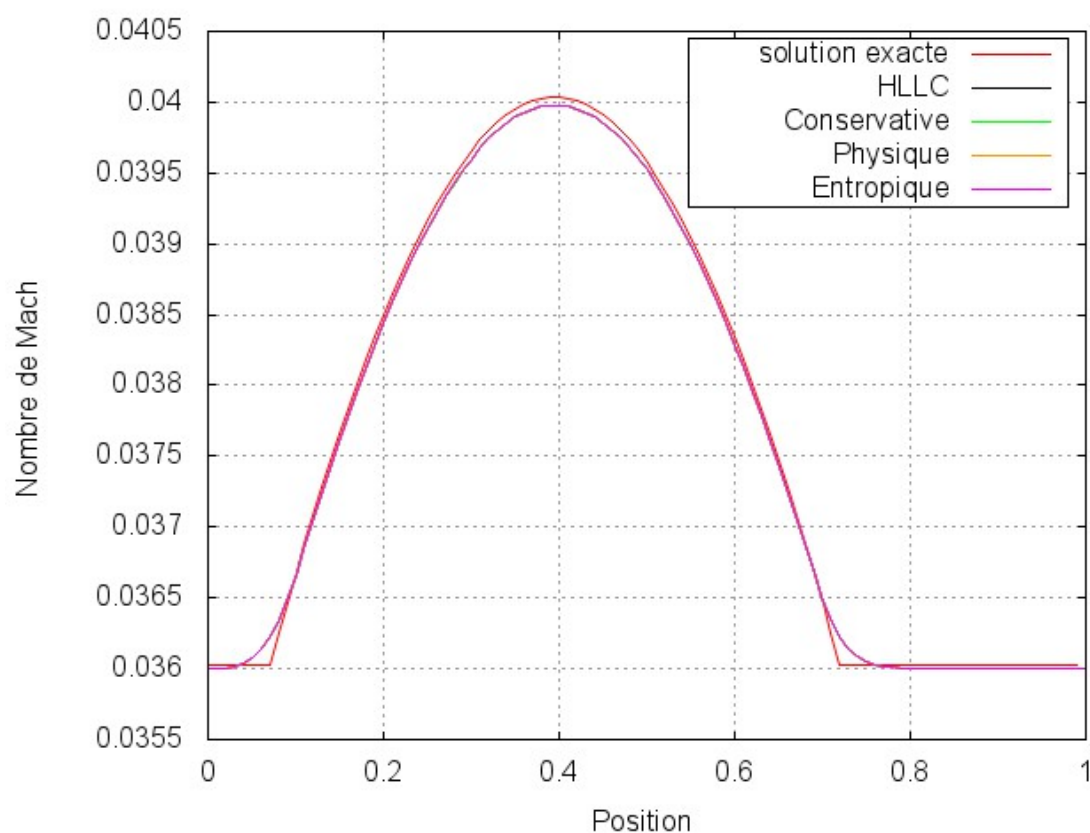


FIGURE 4.6 – Nombre de Mach sur l’axe vertical ($y = 0$) de ILSN avec Concha et les différents jeux de variables.

TABLEAU 4.3 – Normes L^2 relatives des erreurs par rapport à la solution analytique pour ILSN.

| | Nombre de Mach (% par rapport aux variables conservatives) | Pression (% par rapport aux variables conservatives) |
|-------------|--|--|
| HLLC | $1.523e^{-3}$ | $2.109e^{-2}$ |
| Conservatif | $1.523e^{-3}$ | $2.110e^{-2}$ |
| Physique | $1.516e^{-3}$ (0.49%) | $2.108e^{-2}$ (0.07%) |
| Entropique | $1.515e^{-3}$ (0.54%) | $2.106e^{-2}$ (0.19%) |

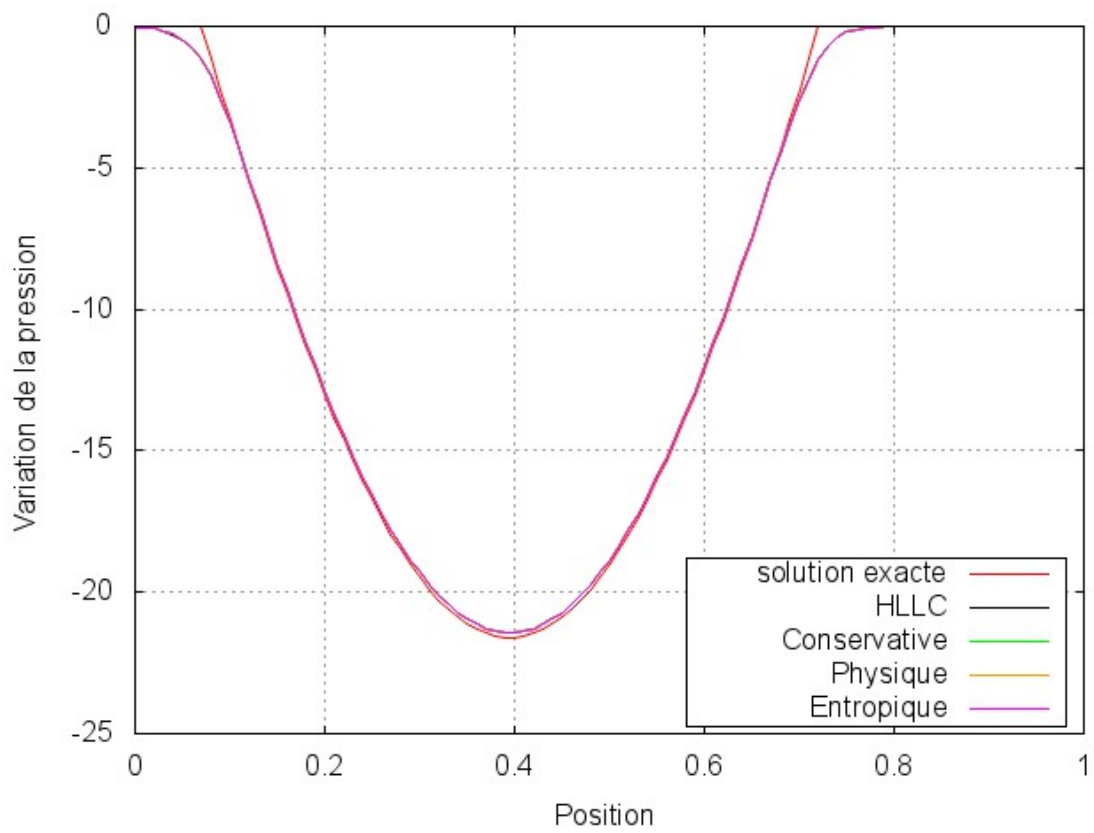


FIGURE 4.7 – Variation de pression sur l'axe vertical ($y = 0$) de ILSN avec Concha et les différents jeux de variables.

1580 quadrangles identiques.

Dans les deux cas, les conditions initiales sont celles présentées dans la section 4.3.4 et rappelées dans le tableau 4.4. La solution est étudiée après $t = 0.007s$.

TABLEAU 4.4 – Conditions initiales du tube à choc ($t = 0s$).

| Condition à gauche ($x < 0$) | Condition à droite ($x > 0$) |
|--------------------------------|--------------------------------|
| $\rho = 1.18kg.m^{-3}$ | $\rho = 0.15kg.m^{-3}$ |
| $p = 101325Pa$ | $p = 10132.5Pa$ |
| $V = 0m.s^{-1}$ | |

Les solutions obtenues en 1D étant identiques, quel que soit le jeu de variables utilisé, seules les solutions 2D sont présentées (figure 4.8 et le tableau 4.5). Comme pour le cas de tuyère à basse vitesse, l'utilisation des variables entropiques permet de gagner moins de 1% en précision par rapport aux variables conservatives.

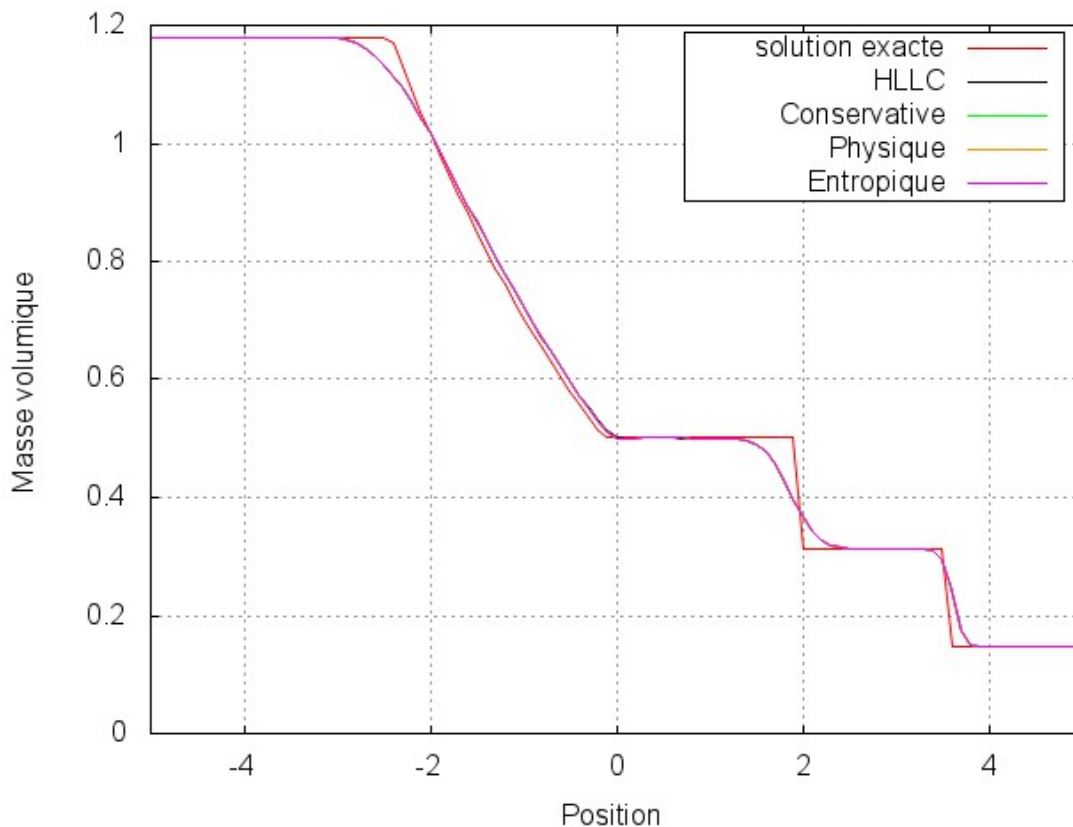


FIGURE 4.8 – Évolution de la masse volumique le long de l'axe longitudinal de ST avec Concha et les différents jeux de variables.

4.3.5 Le vortex isentropique (ISV)

Pour le cas du vortex qui est un écoulement transitoire isentropique à Mach 2.39 présenté dans la section 2.2.4, on rappelle que le domaine d'étude est un carré de $40m$ de côté. Le maillage est constitué de 6400 quadrangles identiques. Les mêmes équations (équations (2.13) à (2.20)) servent à initialiser le vortex en $(x_0, y_0) = (-10, -10)$ et on va étudier la solution après $10s$.

Les résultats présentés dans les figures 4.9 et 4.10 et le tableau 4.6 montrent que dans ce cas, l'utilisation des variables physiques et entropiques donnent une solution plus diffusive par rapport à l'utilisation des variables conservatives. Cependant les comparaisons sont faites sur un maillage très grossier. En effet, sur la figure 4.10, il n'y a qu'un seul point pour représenter les trois calculs. Les différences affichées des erreurs au tableau 4.6 restent relatives à la grossièreté du maillage.

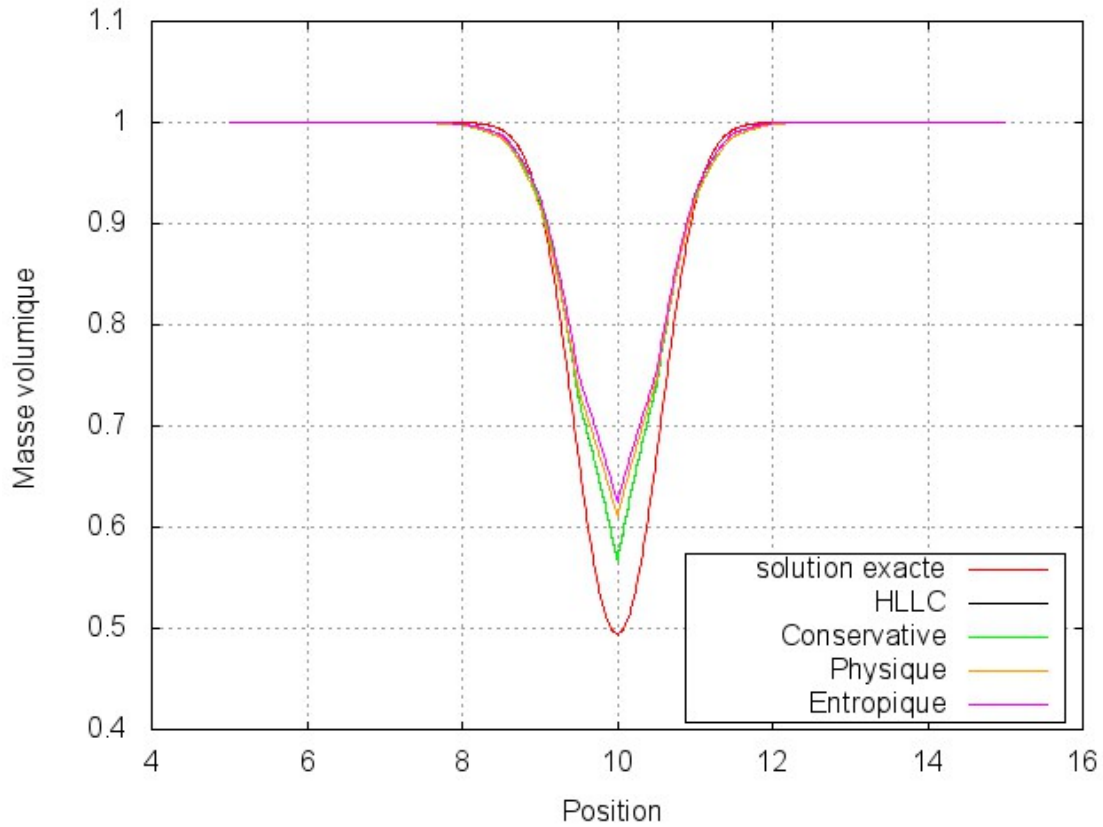


FIGURE 4.9 – Évolution de la masse volumique le long de la diagonale de ISV avec Concha et les différents jeux de variables.

TABLEAU 4.5 – Normes L^2 relatives des erreurs par rapport à la solution analytique pour ST.

| | Masse volumique (% par rapport aux variables conservatives) |
|--------------|--|
| HLLC | $2.878e^{-2}$ |
| Conservative | $2.877e^{-2}$ |
| Physique | $2.876e^{-2}$ (0.03%) |
| Entropique | $2.876e^{-2}$ (0.03%) |

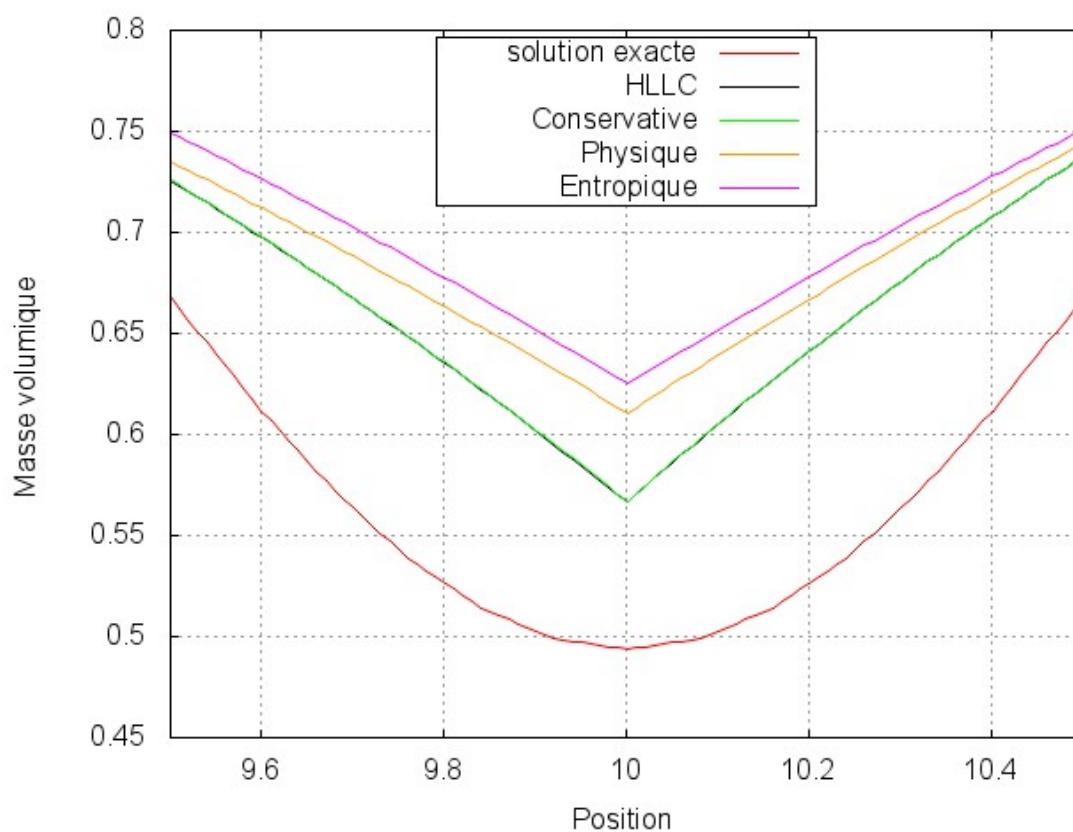


FIGURE 4.10 – Zoom sur l'évolution de la masse volumique le long de la diagonale de ISV avec Concha et les différents jeux de variables.

TABLEAU 4.6 – Normes L^2 relatives de l'erreur par rapport à la solution analytique pour ISV sur la coupe présentée, entre les points (5, 5) et (15, 15).

| | Masse volumique (% par rapport aux variables conservatives) |
|--------------|--|
| HLLC | $3.548e^{-2}$ |
| Conservative | $3.552e^{-2}$ |
| Physique | $4.333e^{-2}$ (-22%) |
| Entropique | $4.804e^{-2}$ (-35%) |

4.3.6 Le cylindre à Mach 3 (CM3)

Ce dernier cas test concerne l'écoulement stationnaire autour d'un cylindre à Mach 3 présenté dans la section 2.2.5. Le domaine de simulation est un rectangle de $5m$ de long et $10m$ de haut avec un cylindre d'un mètre de diamètre au centre. Le maillage utilisé est constitué de 1680 quadrangles structurés.

Les résultats obtenus avec les différents jeux de variables (figures 4.12 à 4.14 et 4.16 à 4.18) sont identiques et en accord avec la solution obtenue en utilisant le flux HLLC (figures 4.11 et 4.15). Dans les différents cas, on ne retrouve pas de recirculation en aval du cylindre car les simulations sont réalisées en DG0.

L'étude de la conservation de l'enthalpie totale le long des lignes de courant, présentée dans le tableau 4.7 et les figures 4.16 à 4.18 montrent que les différents jeux de variables conservent l'enthalpie totale sauf dans la zone du choc en amont du cylindre et la zone de recirculation en aval. Ce qui correspond au résultat obtenu avec le flux HLLC.

TABLEAU 4.7 – Normes L^2 relatives des erreurs sur l'enthalpie totale par rapport à la valeur à l'infini amont.

| | Minimum | Maximum |
|---------------------|---------|---------|
| Concha HLLC | -23.1% | 2.4% |
| Concha conservative | -27.6% | 4.9% |
| Concha physique | -27.6% | 5.0% |
| Concha entropique | -27.6% | 4.9% |

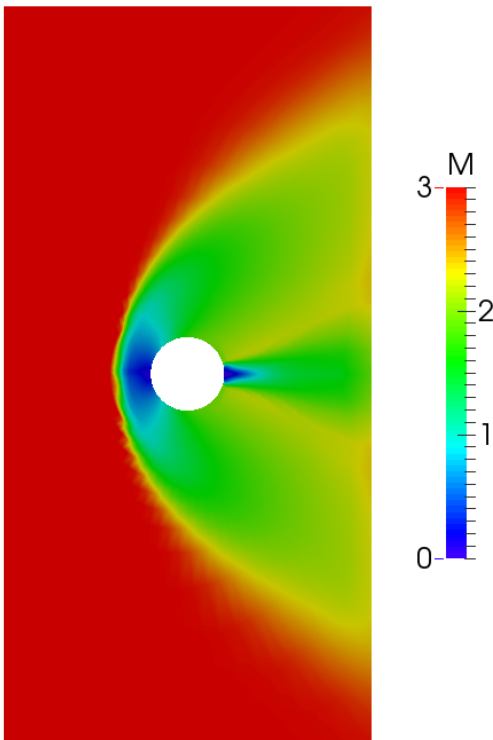


FIGURE 4.11 – Concha HLLC.

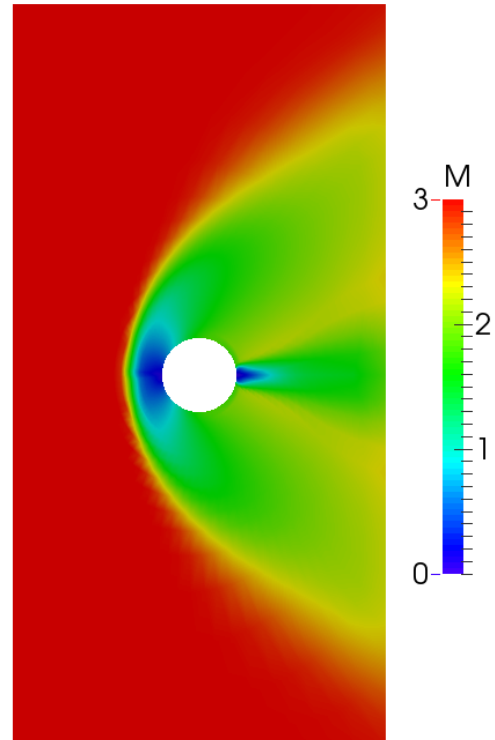


FIGURE 4.12 – Concha conservative.

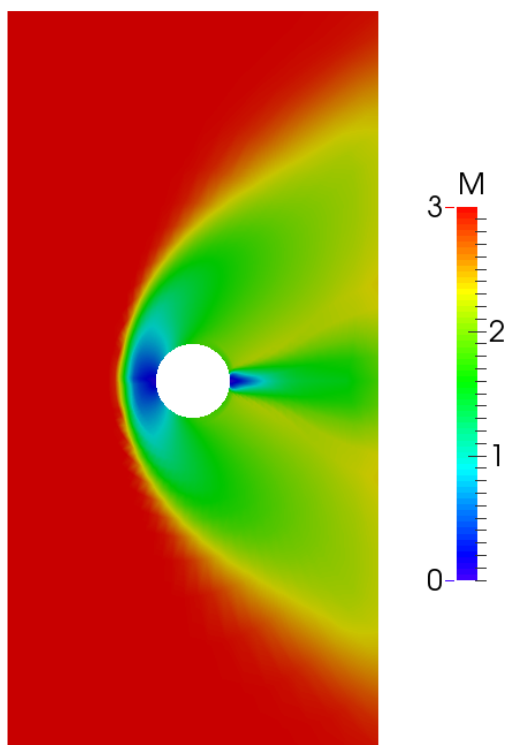


FIGURE 4.13 – Concha physique.

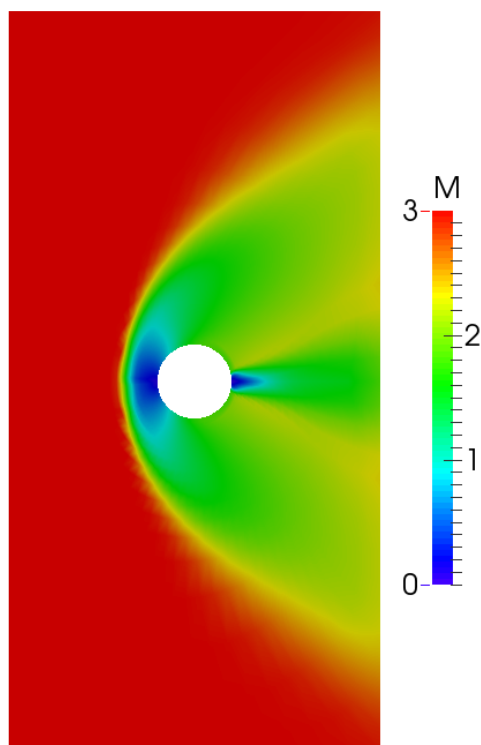


FIGURE 4.14 – Concha entropique.

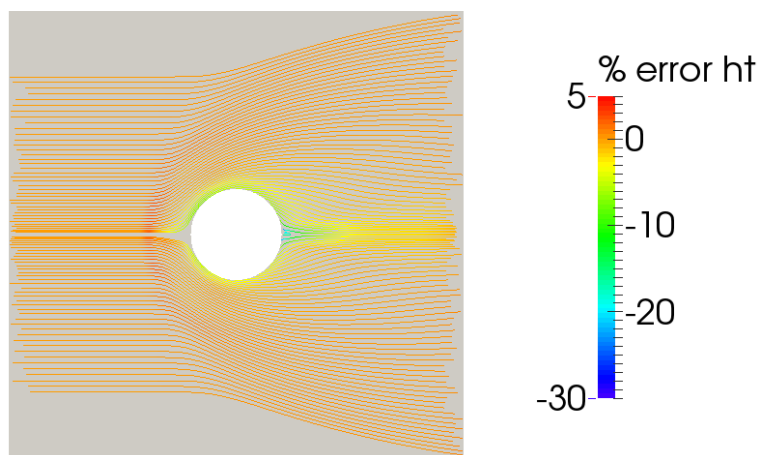


FIGURE 4.15 – Erreur relative sur l'enthalpie totale le long des lignes de courant pour Concha HLLC.

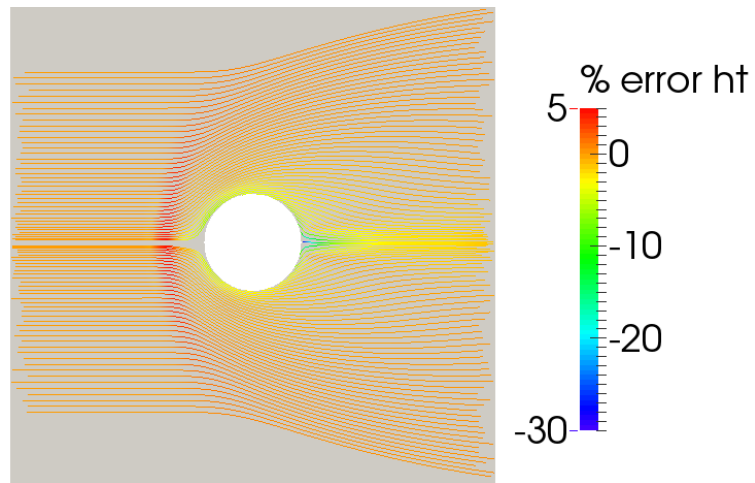


FIGURE 4.16 – Erreur relative sur l'enthalpie totale le long des lignes de courant pour Concha conservative.

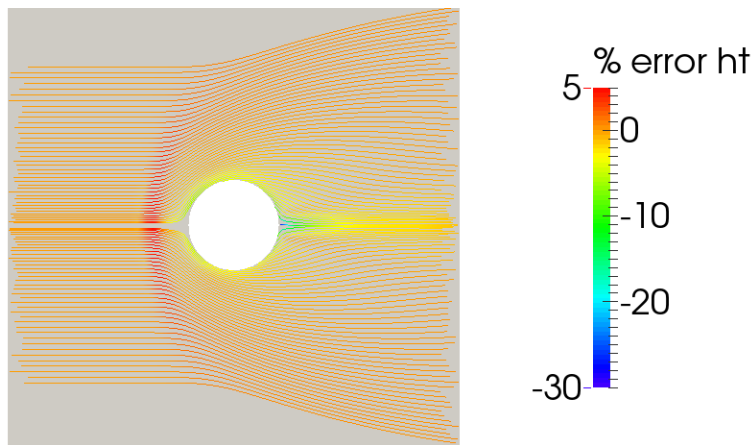


FIGURE 4.17 – Erreur relative sur l'enthalpie totale le long des lignes de courant pour Concha physique.

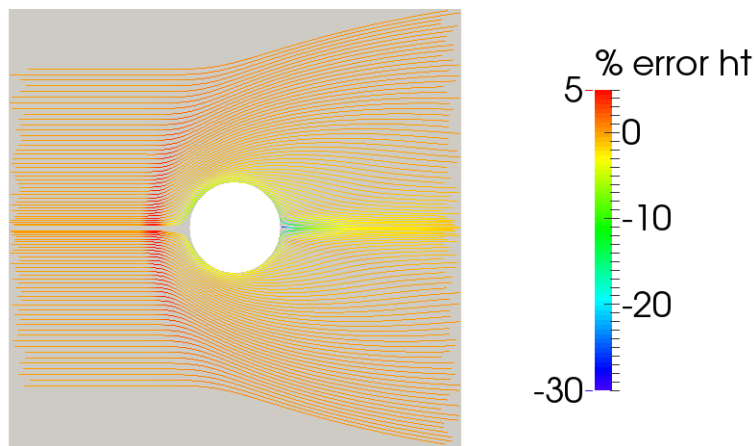


FIGURE 4.18 – Erreur relative sur l'enthalpie totale le long des lignes de courant pour Concha entropique.

Chapitre 5

Conclusions et Perspectives

Il n'existe aucune méthode numérique capable de résoudre avec précision à la fois les modèles incompressible et compressible. L'idée du "tout Mach" serait de se diriger vers une méthode numérique pouvant donner des résultats précis de simulations numériques à grand nombre de Mach en compressible comme à bas nombre de Mach jusqu'à l'incompressible. La première étude, au chapitre 2 de cette thèse, fait le point sur les limites atteintes par les méthodes numériques actuelles pour résoudre les modèles incompressible et compressible. Cinq cas test Euler (dépourvus d'effet visqueux et diffusif) dont on connaît pour la plupart une solution analytique sont mis à l'épreuve pour les deux modèles à isomaillage dans le but de comparer les méthodes. Ces cas test couvrent une large plage de nombre de Mach allant de 0 à 3 et présentent un panel global des difficultés que les écoulements peuvent rencontrer à ces vitesses telles que : ondes de chocs (droite et oblique), ondes d'expansions ou de raréfaction, zones tourbillonnaires... Une première phase a consisté à étudier la comparaison des résultats obtenus par les méthodes volumes-finis et appliquées aux modèles incompressible et compressible pour chacun des cas test. Plus récemment, les méthodes éléments-finis discontinus de Galerkin ont été développées pour résoudre le modèle compressible. Ces méthodes peuvent plus facilement monter en ordre, sans étendre le domaine de dépendance numérique. En résumé, tous les cas test ont été simulés de trois façons différentes :

- avec le modèle incompressible simulé par la technique des volumes finis à l'aide des solveurs "Simple" et "Piso" en utilisant le logiciel FLUENT,
- avec le modèle compressible simulé par la technique des volumes-finis à l'aide des solveurs "Jameson" et "Roe" en utilisant le logiciel *elsA*,
- avec le modèle compressible simulé par la technique des éléments-finis discontinus de Galerkin en utilisant le logiciel Concha.

Le tableau 5.1 regroupe les résultats obtenus. Pour chaque cas test et pour chaque logiciel, les noms des méthodes qui permettent d'obtenir une solution satisfaisante sont écrits. Pour les cas : de la tuyère à basse vitesse, du tube à choc, du vortex isentropique et du cylindre à Mach 3, des solutions satisfaisantes obtenues avec différentes méthodes ont été trouvées avec une précision plus ou moins équivalente. On notera cependant qu'il n'est pas possible de résoudre le cas du cylindre à Mach 3 ou du tube à choc avec le modèle incompressible, il faut utiliser le solveur DB (Density Based) qui résout le modèle compressible avec le solveur de Roe chez FLUENT pour avoir un résultat correct. Pour le cas de Fraenkel, le plus bas en nombre de Mach, les différentes méthodes utilisées avec le logiciel FLUENT donnent une solution instable qui ne correspond pas à la solution analytique de Fraenkel, quel que soit le modèle utilisé. Il est curieux de constater que ce cas, *a priori* incompressible ne puisse pas être résolu par les méthodes "Simple" ou "Piso". Par ailleurs, comme avec *elsA*, le solveur Roe de FLUENT n'est pas non plus capable de résoudre correctement le modèle compressible sur le cas test de

Fraenkel. Avec *elsA* et sa résolution du modèle compressible, seule l'utilisation du flux AUSM permet de retrouver des solutions satisfaisantes pour tous les cas. Cette réussite a cependant nécessité un ajustement spécifique de paramètres à chacun des cas. Seule la résolution du modèle compressible par la méthode éléments-finis discontinus de Galerkin avec le flux HLLC a permis d'obtenir une solution satisfaisante pour tous les cas test étudiés sans aucune adaptation spécifique. La méthode des éléments-finis DG résolvant le modèle compressible semble être en bonne voie pour répondre au "tout-Mach". Il est cependant un peu trop tôt pour conclure. En effet, l'étude présente n'est qu'un début restreint à des écoulements non visqueux et non diffusifs en deux dimensions, encore loin de pouvoir représenter les écoulements d'air dans n'importe quelle configuration.

TABLEAU 5.1 – Tableau récapitulatif des résultats obtenus dans le chapitre 2

| | Ω^+ | FTC ¹ | ILSN ² | ST ³ | ISV ⁴ | CM3 ⁵ |
|------------------------------|------------|--------------------------------------|------------------------------------|-----------------|------------------|------------------|
| | | Ω | | | | |
| Concha Éléments-finis DG | HLLC | HLLC | HLLC | HLLC | HLLC | HLLC |
| <i>elsA</i> Volumes-finis | AUSM | ✘ AUSM (Avec les bons paramètres) | AUSM Roe | AUSM Roe | AUSM Roe | AUSM Roe |
| FLUENT Volumes-finis | ✘ | ✘ | DB ⁶ PB ⁷ | DB ⁶ | DB ⁶ | DB ⁶ |

Le chapitre 3 s'intéresse à la simulation numérique des modèles compressible et incompressible appliquée au cas d'un écoulement laminaire cette fois visqueux et diffusif par la méthode des volumes-finis. Les modèles incompressible et compressible étant respectivement résolus avec les méthodes issues des logiciels FLUENT et *elsA*. Le cas étudié concerne la mise en place d'un dispositif de refroidissement d'un petit cylindre chauffé par impacts de jets d'air confiné. Un procédé original a été imaginé et mis en œuvre à travers un banc expérimental installé à l'Université de Pau à l'occasion d'un programme labellisé AESE (Aéronautique, Espace et Systèmes Embarqués). Un écoulement impactant à relativement bas nombre de Mach ($Mach = 0.013$) a été expérimenté. Une partie de la mesure expérimentale a permis d'en extraire les conditions de bords nécessaires à la simulation numérique. Avec comme unique mesure la température à certains endroits et un débitmètre pour la vitesse, d'un point de vue expérimental uniquement, il est difficile de se rendre compte précisément de la nature de l'écoulement et de son efficacité quant au refroidissement. Aussi, la simulation numérique peut être une source d'informations intéressante, précieuse et complémentaire pour autant qu'elle soit proche de la réalité. La simulation numérique apporte une description fine de l'évolution de l'écoulement dans la cavité, ce qui permet d'en comprendre mieux les mécanismes. La comparaison des résultats numériques entre les modèles compressible et incompressible montre un certain nombre de différences et de similitudes. Des structures tourbillonnaires apparaissent bien dans les deux cas, mais sont instables en incompressible tandis qu'elles sont stables en compressible. Bien que l'évolution de ces structures d'écoulement soient différentes, l'analyse globale des résultats montre aussi certaines similitudes à l'intérieur de la cavité. Dans les deux cas, l'écoulement est constitué d'un

-
1. Le cas de Fraenkel (section 2.2.1)
 2. La tuyère à basse vitesse (section 2.2.2)
 3. Le tube à choc (section 4.3.4)
 4. Le vortex isentropique (section 2.2.4)
 5. Le cylindre à Mach 3 (section 2.2.5)
 6. Méthode Density-Based
 7. Méthode Pressure-Based

tube de courant allant de la zone d'entrée d'air à la sortie, en longeant une partie équivalente du cylindre à refroidir, avec une recirculation sous la sortie et une structure tourbillonnaire au dessus du tube. Au niveau des flux de chaleur pariétaux, bien que les niveaux d'impacts comme les évolutions le long du cylindre soient différents, les valeurs moyennes des flux sont les mêmes à moins de 6% près pour les deux modèles. La comparaison des mesures expérimentales avec les résultats de simulations montre que les débits utilisés correspondent (moins de 1% de différence) mais l'écart sur la puissance convectée reste de 20%, ce qui semble important. Cet écart peut s'expliquer au moins de deux manières : il existe des erreurs dans les prises de mesures expérimentales et la configuration numérique mérite d'être affinée. De plus, d'un point de vue de l'expérience, le moyen utilisé pour l'isolation, loin d'être idéal, est la cause probable de certaines fuites. Une étude spécifique a été menée afin d'améliorer l'isolation du système à certains endroits. Dans le même temps, un procédé a également été mis en place afin de pouvoir réaliser des écoulements à très basse vitesse dans un domaine proche de l'incompressible. Ces deux points devraient nous permettre de réaliser des écoulements laminaires à basse vitesse tout en minimisant les fuites et autres erreurs dans le but de peut-être pouvoir faire converger la simulation numérique des deux modèles avec les mesures expérimentales dans un travail en cours. Cette étude a aussi permis le développement d'une méthode de post-traitement plus précise des flux de chaleur pariétaux jusqu'à l'ordre 2 pour des maillages structurés non réguliers au voisinage de la paroi.

Enfin au chapitre 4, ce travail de thèse a permis d'étendre la méthode numérique des éléments-finis DG pour résoudre le modèle compressible des équations d'Euler à plusieurs jeux de variables. Initialement résolue avec comme seule inconnue le vecteur conservatif, la résolution a été étendue aux variables physiques et entropiques. Dans la recherche d'un solveur tout Mach pour la résolution du modèle compressible, il est important de noter que, d'un point de vue des mathématiques, il est prouvé qu'une méthode numérique utilisant les variables entropiques est mieux adaptée qu'une méthode basée sur les variables conservatives lorsque l'écoulement tend vers l'incompressible. Les différents cas test présentés dans le chapitre 2 sont réutilisés afin de pouvoir comparer les résultats de simulations en variables conservatives, physiques ou entropiques et avec la formulation présentée en début de chapitre 4. Les résultats de chaque cas sont regroupés dans le tableau 5.2. La première colonne représente le gain des variables physiques par rapport aux variables conservatives et la seconde représente le gain des variables entropiques. Dans la majorité des cas, la différence entre l'utilisation des variables conservatives et les autres variables est de moins de 1%. Pour le cas du vortex isentropique, l'utilisation des variables physiques engendre une perte de 22% en précision et les variables entropiques une perte de 35%. Pour ce cas test, la méthode semblerait plus diffuse avec ces variables qu'avec les variables conservatives. Cette conclusion est cependant un peu trop hâtive compte tenu du fait d'une part que le maillage est très grossier et d'autre part que le calcul de l'erreur ne s'effectue que sur la coupe présentée de la masse volumique.

TABLEAU 5.2 – Tableau récapitulatif des gains obtenus au chapitre 4, par rapport aux variables conservatives

| | Gain en variables physiques | Gain en variables entropiques |
|---------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| Le transport d'une onde | 0% | 0% |
| Le cas de Fraenkel | 0% | -0.02% |
| La tuyère à basse vitesse | 0.49% | 0.54% |
| Le tube à choc | 0.03% | 0.03% |
| Le vortex isentropique | -22% | -35% |
| Le cylindre à Mach 3 | 0% | 0% |

Ce bémol mis à part, bien que la simulation utilisant les variables physiques comme entropiques donne de bons résultats sur tous les cas test, aucune amélioration n'est notable par rapport au cas utilisant les variables conservatives. La précision du solveur DG initialement programmée avec le vecteur conservatif comme inconnu donne déjà satisfaction pour tous les cas test ; le résultat n'est finalement pas surprenant. La précision spatiale naturelle d'ordre élevé de la méthode éléments-finis DG gomme sans doute toutes les différences et se suffit à elle-même quel que soit le jeu de variables. Pour s'en rendre compte, il serait d'une part intéressant de tester la résolution éléments-finis-DG en variables entropiques (et physiques) sur davantage de cas bas Mach plus complexes d'un point de vue de l'écoulement. En effet, seuls deux cas à bas Mach ont été testés dans ce travail dont le cas d'un écoulement dans une tuyère à géométrie très faiblement variable où les lignes de courant restent quasiment rectilignes. D'autre part, l'implémentation du changement de variable dans une méthode volumes-finis pourrait également être intéressante à tester dans l'espoir de trouver un solveur tout Mach pour ce type de méthode.

Annexe A

Les Jacobiennes

Dans cette annexe, les Jacobiennes sont présentées pour les différents jeux de variables étudiés dans cette thèse et utilisés dans la section 4.2.2. Ces expressions sont données en 2D pour un gaz parfait.

Les notations suivantes seront utilisées pour les grandeurs physiques : ρ , $V = (V_1, V_2)^\top$, T et p pour respectivement : la masse volumique, la vitesse, la température et la pression. L'énergie totale sera notée $E = e + \frac{1}{2}|V|^2$ avec e l'énergie interne et l'enthalpie H . c_p , c_V et R sont respectivement la chaleur massique à pression constante, la chaleur massique à volume constant et la constante des gaz parfaits. Ces termes de transport, au même titre que la viscosité dynamique et le coefficient de diffusion de la chaleur sont considérés constants d'une itération de calcul sur l'autre. Bien qu'ils ne fassent pas partis des inconnues du problème, certains d'entre eux peuvent être cependant réactualisés en fonction de la température à chaque itération.

A.1 Les Jacobiennes en variables physiques

La jacobienne du changement de variables vers les variables conservatives est :

$$A_0(y) = \frac{\partial u(y)}{\partial y} = \frac{1}{RT} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-p}{T} \\ V_1 & p & 0 & \frac{-pV_1}{T} \\ V_2 & 0 & p & \frac{-pV_2}{T} \\ E & pV_1 & pV_2 & \frac{-p|V|^2}{2T} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Les Jacobiennes des flux d'Euler sont :

$$A_1(y) = \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = \frac{1}{RT} \begin{pmatrix} V_1 & p & 0 & \frac{-pV_1}{T} \\ V_1^2 + RT & 2pV_1 & 0 & \frac{-pV_1^2}{T} \\ V_1V_2 & pV_2 & pV_1 & \frac{-pV_1V_2}{T} \\ V_1H & p(H + V_1^2) & pV_1V_2 & \frac{-pV_1|V|^2}{2T} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$A_2(y) = \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} = \frac{1}{RT} \begin{pmatrix} V_2 & 0 & p & \frac{-pV_2}{T} \\ V_1V_2 & pV_2 & pV_1 & \frac{-pV_1V_2}{T} \\ V_2^2 + RT & 0 & 2pV_2 & \frac{-pV_2^2}{T} \\ V_2H & pV_1V_2 & p(H + V_2^2) & \frac{-pV_2|V|^2}{2T} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Les Jacobiennes en variables entropiques

Le calcul des Jacobiennes est plus facile après avoir calculé celles du changement de variables vers les variables entropiques. Il faut tout d'abord commencer par calculer son inverse :

$$\frac{\partial v(y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{R}{p} & \frac{-V_1}{T} & \frac{-V_2}{T} & \frac{-H+|V|^2}{T^2} \\ 0 & \frac{1}{T} & 0 & \frac{-V_1}{T^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{T} & \frac{-V_2}{T^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

donc

$$\frac{\partial y(v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{p}{R} & \frac{pV_1}{R} & \frac{pV_2}{R} & \frac{pH}{R} \\ 0 & T & 0 & V_1T \\ 0 & 0 & T & V_2T \\ 0 & 0 & 0 & T^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

La jacobienne du changement de variables vers les variables conservatives est donc :

$$A_0(v) = \frac{\partial u(v)}{\partial v} = \frac{p}{R^2T} \begin{pmatrix} 1 & V_1 & V_2 & E \\ & V_1^2 + RT & V_1V_2 & V_1H \\ \text{sym} & & V_2^2 + RT & V_2H \\ & & & HE + \frac{1}{2}|V|^2RT \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Les Jacobiennes des flux d'Euler sont :

$$A_1(v) = \frac{\partial f_1(v)}{\partial v} = \frac{p}{R^2T} \begin{pmatrix} V_1 & V_1^2 + RT & V_1V_2 & V_1H \\ & V_1(V_1^2 + 3RT) & V_2(V_1^2 + RT) & V_1^2(RT + H) + RT H \\ \text{sym} & & V_1(V_2^2 + RT) & V_1V_2(RT + H) \\ & & & V_1H(RT + H) \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$A_2(v) = \frac{\partial f_2(v)}{\partial v} = \frac{p}{R^2T} \begin{pmatrix} V_2 & V_1V_2 & V_2^2 + RT & V_2H \\ & V_2(V_1^2 + RT) & V_1(V_2^2 + RT) & V_1V_2(RT + H) \\ \text{sym} & & V_2(V_2^2 + 3RT) & V_2^2(RT + H) + RT H \\ & & & V_2H(RT + H) \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Annexe B

Publications

B.1 Article dans des revues internationales

- Nicolas CHAUCHAT, Eric SCHALL, Mathieu MORY, Marta de la LLAVE PLATA, and Vincent G. COUAILLIER. Cooling of a heating cylinder by confined impacting air jets. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 26(7):2013–2032, September 2016

B.2 Communications dans des congrès internationaux

- Nicolas CHAUCHAT, Eric SCHALL, Nicolas LANTOS, and Gilles LEROY. A contribution to the way of the all-Mach number in aerodynamics. In *3AF international conference on Applied Aerodynamics*, March 2015
- Nicolas CHAUCHAT, Eric SCHALL, Mathieu MORY, Marta de la LLAVE PLATA, and Vincent COUAILLIER. Study of a cooling device of confined impacting air jets on a heating cylinder. In *3AF international conference on Applied Aerodynamics*, March 2015
- Eric SCHALL, Nicolas CHAUCHAT, and Mathieu MORY. Moving toward green aircraft: More onboard electricity with an efficient cooling system. In *the 28TH international conference on efficiency, cost, optimization, simulation and environmental impact of energy systems*, January 2015

Cooling of a heating cylinder by confined impacting air jets

Cooling of a heating cylinder

Nicolas Chauchat and Eric Schall

IUT-GTE, University of Pau and Pays de l'Adour, Pau, France

Mathieu Mory

ENSGTI, University of Pau and Pays de l'Adour, Pau, France, and

Marta de la Llave Plata and Vincent G. Couaillier

The French Aerospace Lab, ONERA, Châtillon, France

2013

Received 6 October 2015
Revised 22 January 2016
25 January 2016
5 February 2016
Accepted 6 February 2016

Abstract

Purpose – The purpose of this paper is to investigate a new cooling process of a heated cylinder with confined impacting air jet.

Design/methodology/approach – To do this the authors used experience-numerical and numerical-numerical comparisons. The experimental facility, designed and built at the Pau University, consists in air jets impacting around a heated circular cylinder. As the inlet velocity magnitude is low ($V_{in} = 4.37$ m/s – Machin = 0.0125), using a compressible solver for numerical simulations presents a number of difficulties. For this low Mach number configuration, the authors compare the performance of three different solvers in this paper. Two of them are compressible, one based on the finite volume approach and the other on a discontinuous Galerkin method, and the third one is an incompressible solver. Some of the numerical results are compared to experimental data.

Findings – Comparisons between the results from 3D and 2D computations support the relevance of 2D models. Some of the numerical results are compared to experimental data.

Research limitations/implications – The confined aspect of the set-up reduces experimental measurement to intrusive measures. It should be noted that the temperature measurement given by thermocouples is always considered as “global” or “average”.

Originality/value – Future aircraft technology will increasingly rely on electrical power. The substitution of mechanical energy by electrical energy will lead to an increasing amount of heat power that need be evacuated. Innovative cooling processes have to be set up according to constraints imposed by the technological design.

Keywords Compressible-incompressible simulations, Experimental cooling system device, Heated cylinder, Impacting air jets, Wall and convected heat fluxes

Paper type Research paper

Nomenclature

| | | | |
|-------------|--|------------|--|
| C_p | specific heat $J.kg^{-1}.K^{-1}$ | p | polynomial degree of the DG method (–) |
| DG | discontinuous Galerkin method (–) | P | pressure Pa |
| H | $R_e - R_i$ m | P_{conv} | thermal convective power W |
| k | air conductivity $W.m^{-1}.K^{-1}$ | P_{elec} | electrical Power W |
| $k^{(2)}$ | second order dissipation coefficient (–) | q_i | local heat flux density $W.m^{-2}$ |
| $k^{(4)}$ | forth order dissipation coefficient (–) | R_i | internal radius m |
| L | cylinder length m | R_e | external radius m |
| \dot{m} | mass flow rate $kg.s^{-1}$ | rms | root mean square $m.s^{-1}$ |
| $Mach_{in}$ | inlet Mach number (–) | S_f | slot width m |
| Oz | third axis (–) | T | temperature K |
| | | T_{ex} | wall external temperature K |



| | |
|-----------|--------------------------------|
| T_i | inlet temperature K |
| T_{in} | wall internal temperature K |
| T_o | outlet temperature K |
| u_i | velocity components $m.s^{-1}$ |
| V_{in} | inlet velocity $m.s^{-1}$ |
| x, y, z | spatial axis m |
| x_i | directional components m |

Greek symbols

| | |
|---------------|--------------------------------------|
| δ_{ij} | Kronecker symbol (-) |
| ρ | density $kg.m^{-3}$ |
| τ_{ij} | viscous stress tensor Pa |
| μ | dynamic viscosity $kg.m^{-1}.s^{-1}$ |

1. Introduction and context

“Green aircraft projects” aim at reducing greenhouse gas emissions, pollutants and fuel consumption. The use of electrical systems in aircrafts is growing in all aeronautical programmes for many reasons. Indeed, the “All-Electric E-Fan 2.0 Airplane” project by Airbus and the Boeing “Subsonic Ultra-Green Aircraft Research” programme investigate technologies that might allow the subsonic commercial aircrafts to meet environmental requirements in 2030 to 2050. Recent research like GREENAIR (7th RTD European framework programme) or the recent technological achievements on the A380 as on the Boeing 787 demonstrates that the use of electricity is increasing on-board. The use of electrical energy instead of mechanical energy is a challenge for aircraft equipment manufacturers. Electrical processes lead to an additional thermal charge that needs to be evacuated. Thus, dedicated new cooling system devices have to be developed. Up to now, for industrial applications, using air flow remains one of the best solutions for cooling electrical machines, while satisfying the objective of lower cost and weight.

This project has been partially supported by DGCIS* research funds (France) during four years, after having selected by the French cluster Aerospace Valley. The studied device is representative of any small turbo-engine and his potential for industrial applications is not restricted to aeronautics. Because of the high heat transfer coefficients occurring in the impingement region, cooling by air jet impingement is relevant to several engineering applications such as tempering of glass, cooling of turbine blades, drying of industrial goods and cooling of electronic chips. The physics of jet impingement flows is described in detail by the pioneering work by Gardon and Akfirat (1965). A circular or slot impinging jet on a flat plate serves as a fundamental configuration for many others. A number of studies are devoted to these configurations (Gardon and Akfirat, 1965, 1966; Martin, 1977; Jambunathan *et al.*, 1992; Zuckerman and Lior, 2006). Various nozzles used to generate impinging jets have been studied and reviewed. The effect of nozzle shape (circular or rectangular) on the heat transfer from a circular cylinder by impinging jets was studied recently (Singh *et al.*, 2015a, b) in experiments and numerical investigations. Similarly, applications of the impingement process on various target shapes are gaining popularity in industry. Though most reviews focus on the jet impingement cooling of flat surfaces, jet impingement research on circular cylinders is expanding, both for circular jets (Gori and Bossi, 2000; McDaniel and Webb, 2000) and slot jets (Singh *et al.*, 2013, 2015a, b; Wang *et al.*, 2014). In Zuckerman and Lior (2007), numerical results from various models are compared against test data for flat-plane jet impingement heat transfer, and a numerical turbulent model based on accuracy is selected to perform jet impingement flows over a cylindrical target surface.

According to the authors’ bibliographical study on jet impingement, three key points deserve special attention and are studied in this paper. The first one is the validation of 2D numerical simulations when compared to 3D ones. The second one is

the accuracy of compressible simulations at low Mach number. This is addressed here by comparing the results of incompressible-oriented models and compressible-oriented models. Herein two compressible solvers are compared, a finite volume (FV) method and a high-order finite element method. The third highlight deals with the comparison between numerical results and results of an experiment.

The cooling process studied herein is achieved by four normal (or radial) air jets, which impact on a heating cylinder (Figure 1). The geometry is 2D. The cooling air is injected through four radial slots, respectively oriented north, south, east and west. The confined fluid leaves the cylinder through four others radial slots shifted 45 degrees from the inlets.

A series of CFD simulations were performed using three different numerical methods. The inlet velocity was fixed to 4.37 m/s, which corresponds to an available data set. Two compressible solvers have been considered, namely, the elsA solver based on a FV approach and the Aghora solver based on a discontinuous Galerkin (DG) method, as well as the incompressible solver of ANSYS-FLUENT. Indeed, even if the inlet Mach number is low ($\text{Mach}_{\text{in}} = 0.0125$), the authors are not convinced that the fluid is devoid of any compressibility effect. It is also well known that the numerical resolution of the compressible set of the Navier-Stokes equations at very low Mach numbers is very sensitive to numerical errors, especially when a low-order discretization is used. We compare here the results provided by the elsA and Aghora models, for which the spatial order of accuracy is set to second order. For the Aghora solver, this implies setting the polynomial degree to 1 ($p = 1$). We, however, note that the DG method ensures that the formal order of accuracy is 2 on irregular meshes as opposed to the FV approach, for which the order of accuracy is not preserved when irregular meshes are used. The comparison is made at the global level of the experimental facility and the level of the fluid particle. At the global level, the total convective heat flux and the mass balance in the cavity is considered. At the fluid particle level, the heat-flux variations at the wall along the azimuthal direction and the streamlines pattern inside the cavity are studied.

The paper is organised as follows. The original set-up is described in Section 2. The numerical methods used in the three softwares are presented in Section 3.

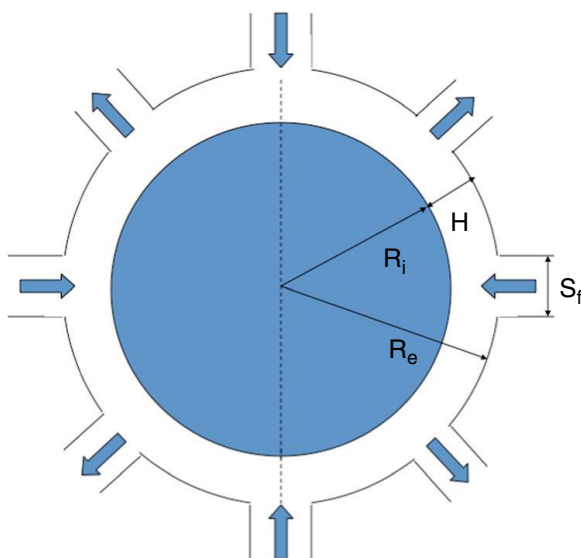


Figure 1.
Cross-section of the
cavity in which the
flow cools the heated
cylinder of radius R_i

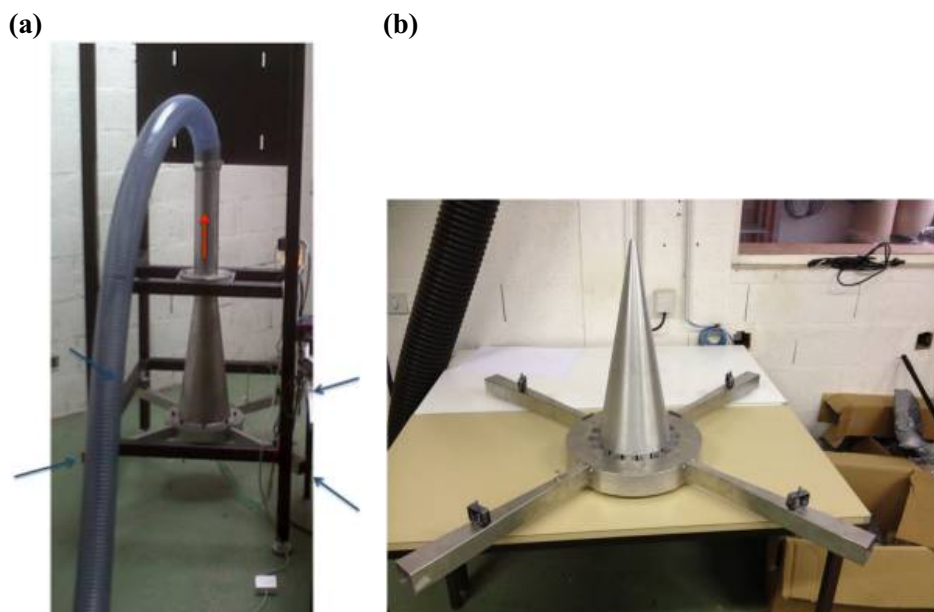
In Section 4, the comparisons between numerical simulations and experiment are discussed. Finally, the last section addresses some of the main difficulties linked to the compressibility assumption for CFD simulations for complex geometries.

2. Experimental design

The experimental set-up achieves the cooling of the surface of a circular cylinder of radius R_i by four plane jets impacting perpendicularly the heated cylinder. As shown in Figure 1, the four impacting jets are directed from the north, east, south and west, respectively. The heated air is extracted through four outlet slots, the directions of which are along the angle bisector between neighbouring inlet jets. The flow is confined in the annular domain with internal radius $R_i = 5.4$ cm and external radius $R_e = 7$ cm. The slot width is $S_f = 3.6$ mm. Numerical simulations were carried out assuming 2D flow, i.e. it does not vary in the direction Oz perpendicular to the cross-section shown in Figure 1. The cylinder length is $L = 4.7$ cm in the experiment.

The photograph in Figure 2(a) shows the experimental set-up. The casing ensuring the inlet distribution of the jets impacting the cylinder and collecting the warm air outside the flow cavity is shown in Figure 2(b). The heated cylinder is inserted under the cone seen in Figure 2(b), which channels the exit warm air into the vertical tube seen in Figure 2(a). The red arrow indicates the direction of the outlet flow into a flexible tube, which is downstream connected to a mass flowmeter (Eldridge 9,700 MPNH), a fan and a vane.

The circular cylinder is heated using an electrical resistance inserted inside an adhesive polyamide mat glued over the inner surface of the cylinder (brown in Figure 3). The surface temperature on the cylinder is measured using thermocouples (type K). The thermocouples wires (green in Figure 3) traverse the mat and the cylinder (thickness 2 mm) and the measuring extremities are bended after coming up to the cylinder surface. The entire surface of the cylinder is wrapped by an adhesive film (supporting high temperature), which maintains the thermocouples in contact with the cylinder.



Note: The blue arrows indicate the flow into four rectangular tubes leading to the entrance slots into the cavity

Figure 2.
Photographs of the experimental set-up

Cooling of a heating cylinder

2017



Figure 3.
Inside view of the heated cylinder

Figure 4 shows an external view of the cylinder. The locations of the thermocouples are shown. The sketch at the bottom indicates that thermocouples 8, 9 and 12 are along the axis line of an impacting jet, whereas thermocouples 1, 10 and 11 are along the axis line of an outlet slot. The experimental conditions given by the mass flow rate and the electrical power P_{elec} result in a steady regime. The temperature variation at the surface of the cylinder, corresponds to the equilibrium of the furnished electrical power with the convective power extracted by the air and the conductive power transmitted through the aluminium casing.

The present paper focuses on a flow configuration at Reynolds numbers lower than 1,100. For the experiments considered in this paper, the electrical power delivered was reduced to 212 W as compared to the maximum electrical power (420 W) in order to maintain the surface temperature less than 100°C (maximum temperature supported by

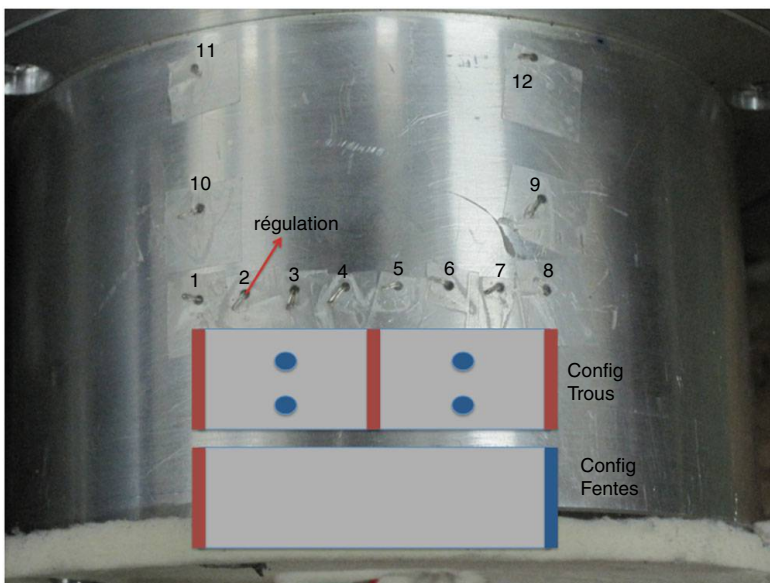


Figure 4.
Outside surface view of the heated cylinder showing the thermocouple positions

the resistance polyamide mat). The electrical power delivered was measured using a wattmeter. The convective thermal power extracted by the air flow was estimated from the temperature difference measured by two thermocouples (type K), one being placed inside one of the inlet tube (T_i) and the other (T_o) at the exit of an outlet slot from the cavity. Estimating the thermal convective power, $P_{conv} = C_p \dot{m} (T_e - T_i)$, relies also on an accurate measurement of the mass flow rate of air \dot{m} . The average surface temperature T_{in} was finally determined from thermocouple measurements on the cylinder surface.

The present paper mainly addresses the ability of different numerical models to determine the heat transfer, for moderate Reynolds number conditions. We basically compare, for a moderate Reynolds number, the convective thermal power P_{conv} and the temperature difference $T_{in} - T_i$, obtained from the different numerical simulations, with the experimental values.

Experimental limitations

In this study the boundary conditions for CFD computations (velocity and temperature at the entrance, temperature at the surface of the heating cylinder) were stated from the laboratory experiment. Results of experiment and simulation are then compared considering the global convective heat transfer achieved. Because of its confinement, the experimental set-up does not provide access to the detailed flow and thermal properties that could be compared to the flow streamlines or the temperature variations all over the surface of the heated cylinder obtained from numerical simulations. Local measurements nevertheless show limited variations of temperature at the surface of the heated cylinder, indicating that a condition of uniform parietal temperature of the cylinder is relevant. The temperature boundary conditions are fixed for the CFD computations using the experimental temperature data and the inlet flow velocity is determined from the mass flow rate measurement. The experiment also delivers the global convective power that is compared to the total convective power computed by the CFD simulations.

3. Numerical methods and softwares

This work investigates the differences between CFD computations of an engineering heat transfer flow, which primarily differ through the assumption that the fluid is incompressible or compressible. This requires knowledge in various disciplines (especially applied mathematics, physics and programming) in order to interpret the results of numerical solutions in full knowledge of their specificity and in order to compare with experimental results, trusting that the CFD simulates effectively the physical case of the experiment. When considering the compressible/incompressible nature of the fluid, the first step consists in fixing the modelling through the determination of the unknown variables and the set of partial differential equations (PDE) to solve. This step is challenging because the numerical resolution of the discretized form of PDE depends also on the nature of PDE considered.

Incompressible simulation by ANSYS-FLUENT

Simulations for an incompressible fluid were carried using the ANSYS_FLUENT software (Kelecy, 2008). Simulating an air flow considered as incompressible is widely used in aeronautics. The ANSYS-FLUENT software was chosen, considering the experience of this software, both for incompressible and compressible fluids.

For incompressible fluid, density is considered as constant. The unknown variables are reduced to vector (P, u, T) – respectively, pressure, velocity and temperature – which are determined from the conservation equations for mass (continuity), momentum and energy as follows in Einstein notation:

Continuity:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Momentum:

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Energy:

$$\rho u_j C_p \frac{\partial T}{\partial x_j} = \mu u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

u_i , ρ , T , P denote the velocity components, density, temperature and pressure, respectively. C_p and μ are the specific heat at constant pressure and the dynamic viscosity, respectively. x_j are the directional components and t is time. The local heat-flux density is given by Fourier's law: $q_i = -k(\partial T / \partial x_i)$ (k is the thermal conductivity of air).

For an incompressible fluid, the relation of perfect gas is not used and the pressure is only velocity dependent. The pressure-based method has been selected and the SIMPLE and PISO algorithms have been both tested, in order to determine the pressure and velocity fields, via the zero-divergence of the velocity. The employed method is segregated, leading to regular corrections of the pressure along the iterative process. As the “steady” option is selected there is no time-marching in the calculation procedure of ANSYS-FLUENT. Finally, the temperature is deduced from the conservation equation of the energy written in terms of temperature and resolved alongside the other variables.

Compressible simulation by elsA and Aghora

The elsA (Cambier *et al.*, 2013) software is a multi-application CFD platform, dealing especially with internal and external aerodynamic flows, ranging from the low subsonic to the high supersonic regimes. elsA is the reference ONERA aerodynamics solver (see Cambier *et al.*, 2013 and <http://elsa.onera.fr> for a exhaustive review of accomplishments both from the research and industrial sides). The software is based on FV schemes for multi-bloc structured and unstructured meshes (de la Llave Plata *et al.*, 2012). The set of PDE solved for compressible flows is given below in Einstein notation:

Continuity:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

Momentum:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

with the viscous stress tensor:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}$$

δ_{ij} is the Kronecker symbol (such that δ_{ij} is 1 if $i=j$ and 0 if $i \neq j$).

Energy:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(C_v T + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_v T + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (p u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} u_i) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

u is the rms velocity ($u = \sqrt{u_i^2}$).

The numerical resolution can be done with different fundamental approximate Riemman solvers. The Roe (Roe, 1981) and Jameson (Jameson *et al.*, 1981) solvers, respectively based on upwind and central schemes, have been chosen for this work. For the Jameson solver, the chosen artificial dissipative coefficients are $k^{(2)} = 1$ and $k^{(4)} = 0.032$.

Motivated by the demand for very accurate CFD predictions at an ever-increasing level of detail ONERA has started the development of a new solver Aghora, based on high-order space time variational methods for unstructured polyhedral elements and mainly using DG type methods (Renac *et al.*, 2014; Chapelier *et al.*, 2014). A number of FV schemes (Lax-Friedrichs, Roe, etc.) are available to approximate the convective fluxes across the element interfaces. The viscous fluxes can be discretized by using the BR2 scheme (Bassi *et al.*, 1997) or the symmetric interior penalty method (Hartmann and Houston, 2008). We also performed the comparison with results from the Aghora solver.

Difficulties inherent in CFD

Building the numerical simulation of the discrete form of PDEs is challenging when the objective is to reproduce accurately the analytical solution, provided that such a solution is known. Here two identified gaps have to be addressed. The first one concerns the right modelling choice about the fluid compressibility. The second gap concerns the numerical resolution at low Mach number. Whatever the choice of the PDE-type set is, its accurate resolution is challenging when the Mach number tends towards zero. This study is far from being exhaustive, considering the huge number of contributions in each of these areas, but the two questions were addressed in this work.

The geometric symmetry is used to reduce the computational domain of the problem. As shown in Figure 5 simulation was carried out in a quarter of the full domain, considering the symmetry in the four injection slots and assuming the same symmetry for the solution. Figure 5 depicts a cross-section of the simulation domain on which boundary conditions are specified.

From the experiment, the boundary conditions for FLUENT and elsA computations are given in Table I.

The different options selected for the CFD with FLUENT and elsA appear in Table II.

4. Results

2D-3D comparisons with elsA+Jameson

In the experiment, the height (z direction) of the cylindrical cavity ($L = 4.7$ cm) is comparable to the medium radius (7 cm). 2D and 3D computations have been carried out in order to investigate the effect of finite height of the cylinder. The 3D mesh grid is

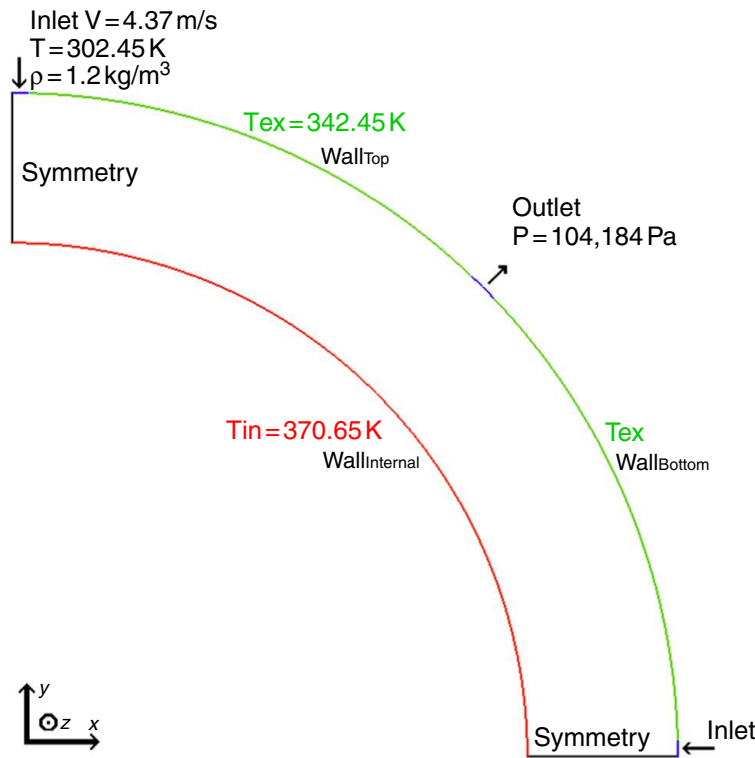


Figure 5. Cross-section of the outflow configuration / computational domain

Inlet, outlet and walls

| | |
|---|------------------------------------|
| Density | 1.2 kg.m ⁻³ |
| Pressure | 104,184.83 Pa |
| Inlet temperature | 302.45 K |
| Velocity magnitude | 4.37 m.s ⁻¹ |
| Temperature – inner/heated wall | 370.65 K |
| Temperature – external wall | 342.45 K |
| Temperature – side walls (z = -0.0235 and 0.0235 m) | Linear between 342.45 and 370.65 K |

Table I. Physical boundary conditions

| | FLUENT (see FLUENT user's guide for more details) | elsA (see the user's reference manual of elsA for more details) |
|-----------------------------|---|---|
| Inlet | Massflow_inlet Normal of inlets = (0, -1, 0) or (-1, 0, 0) mass flux = 5.24 kg.m ⁻² .s ⁻¹ | Injmf1 Normal of inlets = (0, -1, 0) or (-1, 0, 0) Surface mass flow = 5.24 kg.m ⁻² .s ⁻¹ Stagnation enthalpy = 303,872.42 m ² .s ⁻² |
| Outlet | Pressure_outlet | Outpres |
| Internal wall (heated wall) | Wall | Wallisoth |
| External wall | Wall | Wallisoth |

Table II. Selected options with FLUENT and elsA

composed of 726,388 (229 × 52 × 61) nodes and 697,680 quadrilateral cells (Figure 6) build using 61 parallel planes along the z axis and reproducing in each plane the 2D mesh grid (11,628 cells in (x, y)). The plane z = 0 is the plane of symmetry located in the middle of the height of the cylinder.

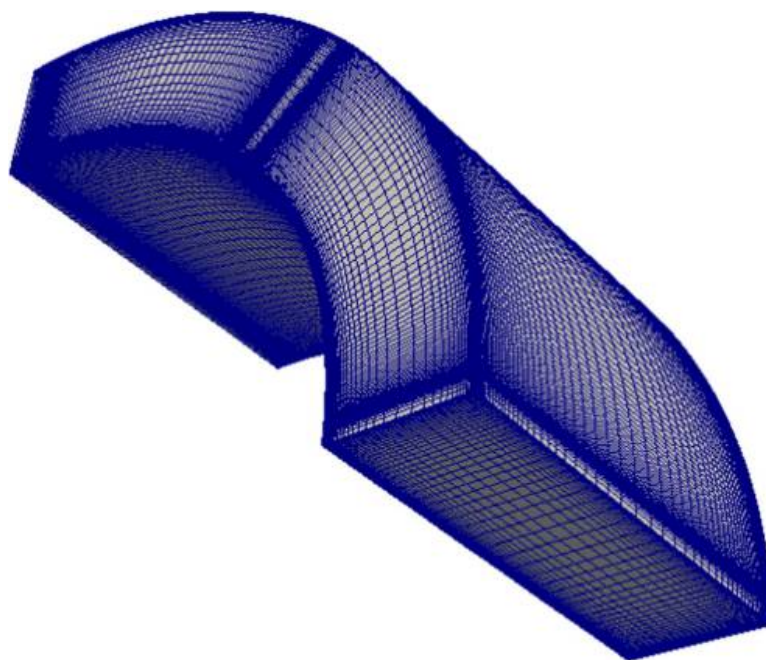


Figure 6.
View of the 3D mesh

Histories of residues for both simulations, shown in Figures 7 (2D) and 8 (3D), indicate that the 2D-3D-elsA computations have converged. The 3D computation time for 400,000 iterations is about 13.5 CPU days using four processors.

Figure 9 shows the 3D computed profiles of the wall heat-flux along three parallel arcs of a circle on the heated cylinder. The positions $x = 0$ and $x = 0.084$ m correspond to the axis of two impacting jets and $x = 0.042$ m to the axis of an outlet slot. The profiles for $z = -0.0195$ and 0.0195 m overlap perfectly, indicating the symmetry of 3D simulations. The comparison (Figure 10) between the 3D profile in the plane of symmetry and the profile obtained from 2D computations displays very similar shapes.

Flow streamlines obtained from 3D computations are plotted in Figure 11 in the plane of symmetry ($z = 0$) and the temperature variations are superimposed using a

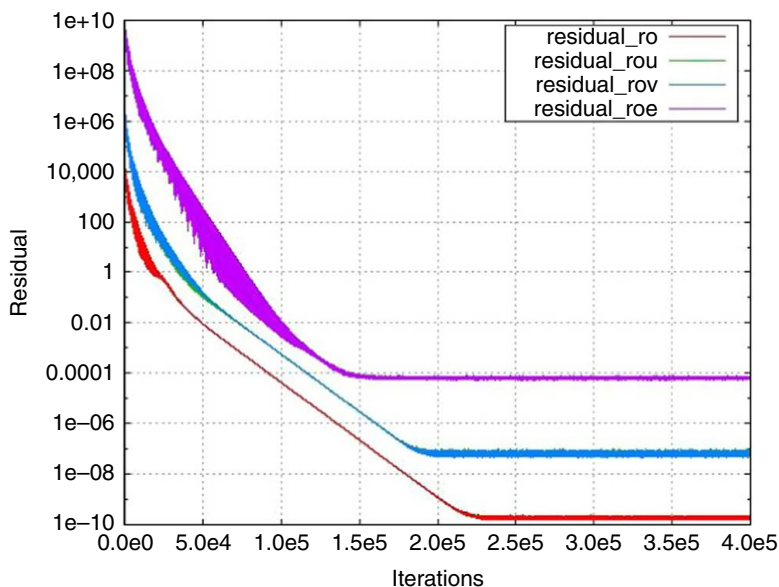


Figure 7.
Evolution of residues during 2D computations with elsA

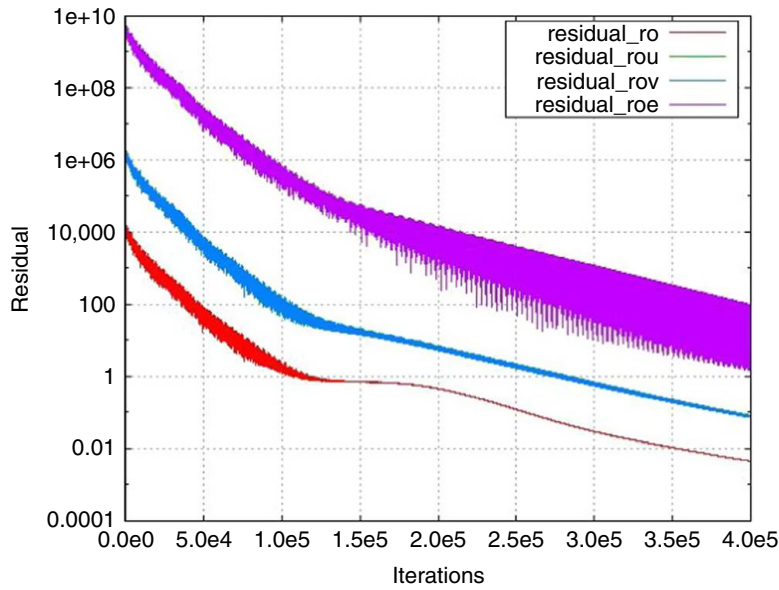


Figure 8.
Evolution of residues during 3D computation with elsA

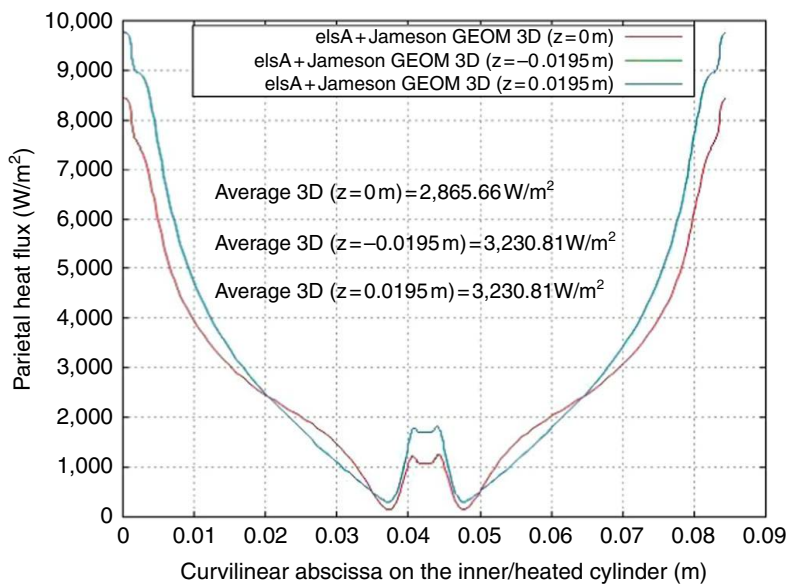


Figure 9.
Comparison of heat-fluxes along arcs of circle on the inner-heated cylinder from 3D computations in three different planes

colour map. The flow and temperature patterns look the same as the results of 2D computations presented in Figure 12. The good agreement between 2D and 3D computations in the vicinity of the plane of symmetry ($z = 0$) leads us to conclude that 2D computations are relevant for further investigations using the FLUENT, elsA and Aghora numerical codes.

The errors on the total mass flow rate passing in the device, given in Table III and in Table VI, are less than 0.4 per cent in relative value of the mass flow rate measured in the experiment. In Table IV the convective heat transfer is 3.9 per cent better in the case of elsA-3D than that of elsA 2D compared to experiment. Indeed there is only -1.4 per cent of difference between the elsA-3D solution and the experiment against -5.3 per cent when comparing the elsA-2D solutions with experiment.

Figure 10.
Comparison of heat-fluxes along an arc of circle on the inner-heated cylinder from 2D and 3D computations

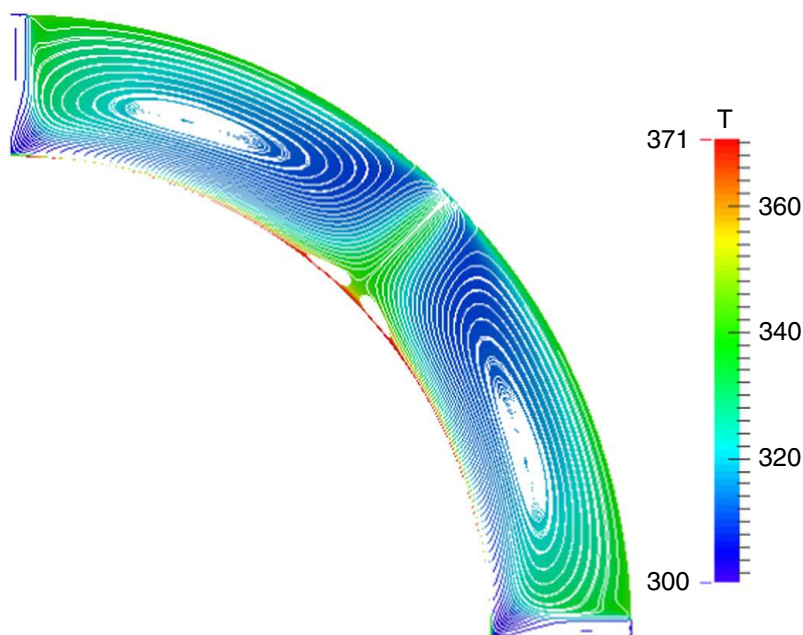
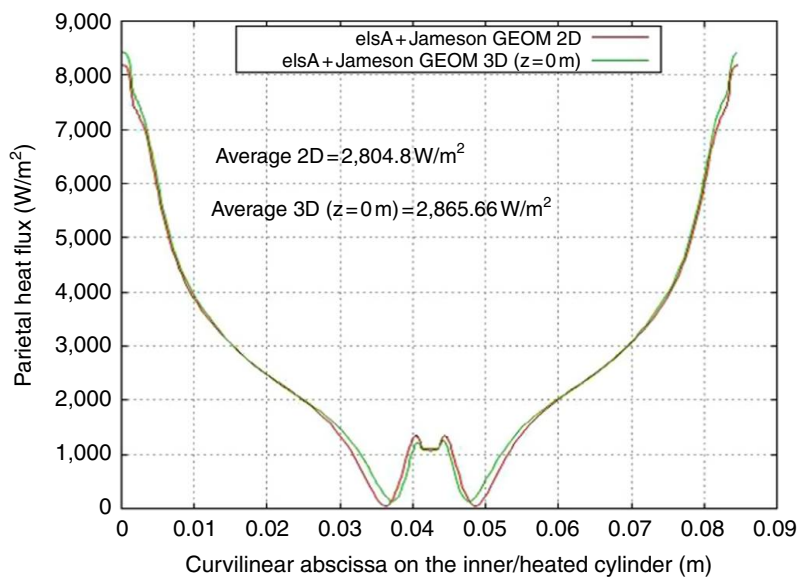


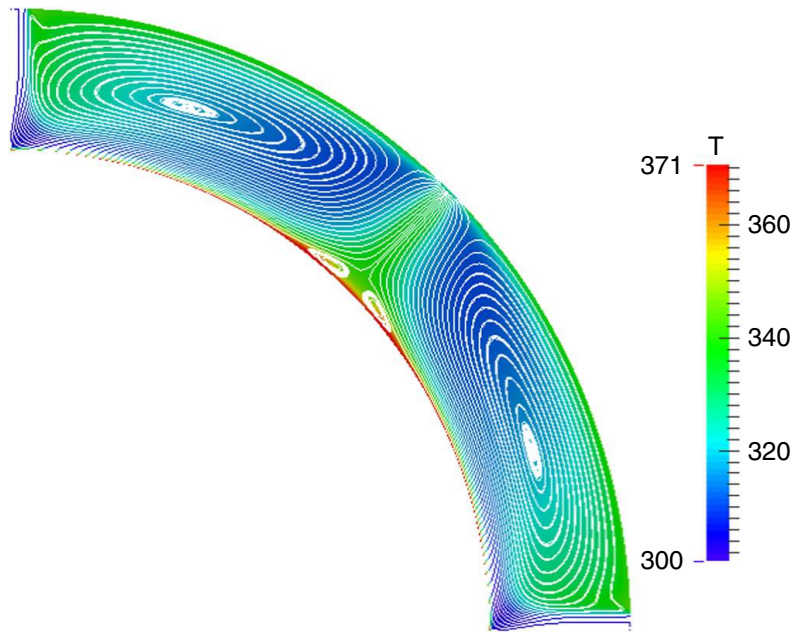
Figure 11.
Flow streamlines superimposed on temperature variations

Notes: 3D computations with elsA+Jameson 3D. Result in plane $z=0\text{m}$

2D-FLUENT-elsA 2D-computations

The same mesh grid has been used in this paper for all 2D computations made using the three models. Its properties are given in Table V.

Figures 12-14 show the streamlines and the temperature fields obtained with ANSYS-FLUENT and elsA. The main differences are observed in the eddy patterns generated in the annular domain. While the two elsA solutions in Figures 12 and 13 look similar, the FLUENT-PISO solution in Figure 14 displays a more complex eddy pattern. Moreover, although the boundary conditions of the simulation are steady, the FLUENT simulation shows slow spatial oscillations in time. Actually, the FLUENT



Note: 2D computations with elsA + Jameson

Figure 12. Flow streamlines superimposed on temperature variations

| | Experiment | elsA 2D with Jameson | elsA 3D with Jameson |
|---|------------|----------------------|----------------------|
| Inlet mass flow rate ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) | 0.000888 | 0.000884 | 0.000884 |
| Error rate (over the experiment) | | -0.4% | -0.4% |
| Outlet mass flow rate ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) | 0.000888 | 0.000886 | 0.000887 |
| Error rate (outlet over inlet) | | 0.2% | 0.3% |

Table III. Error on the inlet/outlet mass flow rate with elsA 2D and elsA 3D

| | Experiment | elsA 2D with Jameson | elsA 3D with Jameson |
|----------------------------------|------------|----------------------|----------------------|
| Convected heat flux (W) | 20.00 | 18.93 | 19.72 |
| Error rate (over the experiment) | | -5.3% | -1.4% |

Note: Experiment is the reference

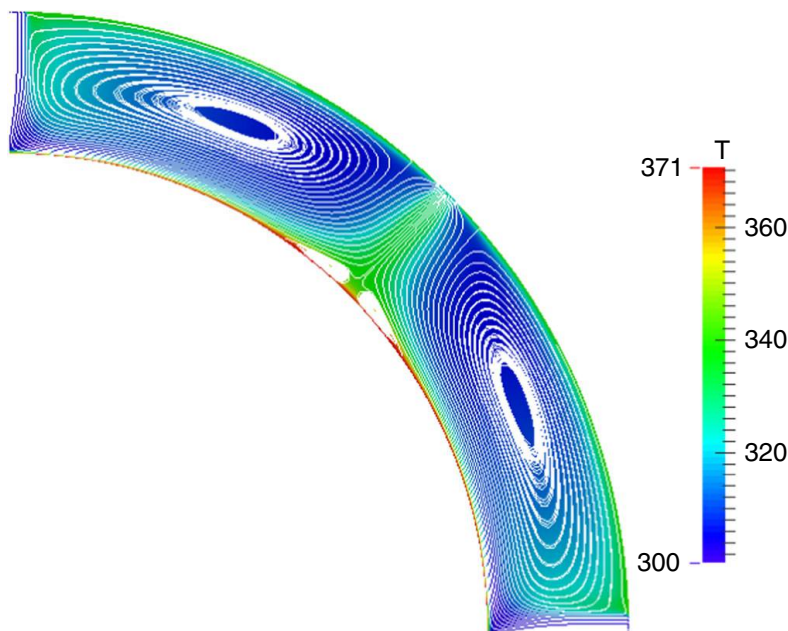
Table IV. Convected heat-flux comparisons with elsA 2D and elsA 3D

| | FLUENT, elsA, AGHORA |
|--|---------------------------|
| Number of points | 11,908 |
| Number of cells | 11,628 |
| Cell geometry | Quadrangular |
| Min and max edge size on the inner-heated cylinder (m) | $6.2e^{-5}$ - $1.1e^{-3}$ |
| Min and max edge size on the outer cylinder (m) | $8.1e^{-5}$ - $1.4e^{-3}$ |

Table V. Grid mesh properties for FLUENT, elsA and AGHORA

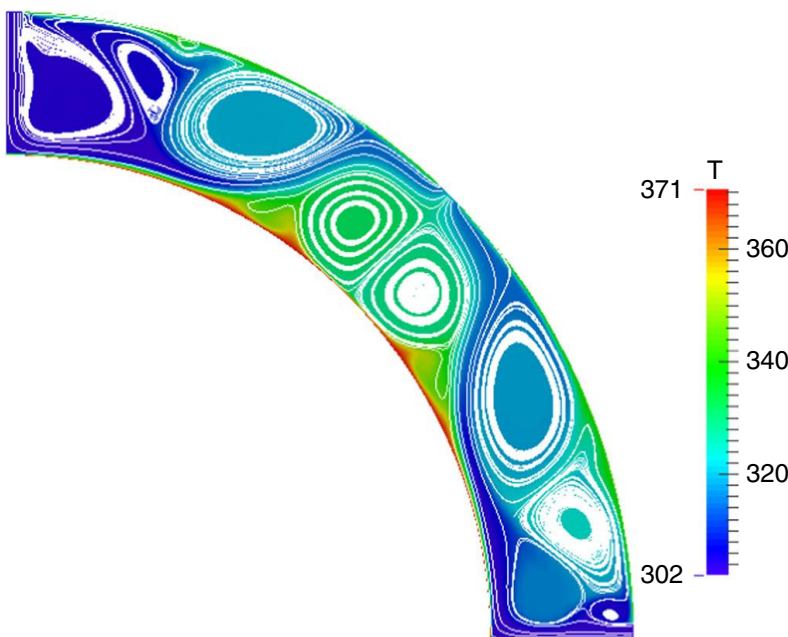
solution does not converge, whichever the numerical method (SIMPLE or PISO) is used. As a consequence, the outlet mass flow rate and the convective heat flux vary in time. For FLUENT simulations Table VI indicates that the relative error in the mass flow rate between outlet and inlet varies from -1.1 to 0.9 per cent while for elsA the relative

Figure 13.
Flow streamlines
superimposed on
temperature
variations



Note: 2D computations with elsA+Roe

Figure 14.
Flow streamlines
superimposed on
temperature
variations



Note: 2D computations with FLUENT+PISO (600,000 iters)

error (0.2 per cent for Jameson and 0.3 per cent for Roe) is stable. Table VII indicates also that the convective heat flux obtained by the different models varies between -25.1 and -5.3 per cent as compared to the experimental value. Again, the heat flux computed by elsA is stable, but it varies in time for the results obtained with FLUENT.

Figure 15 compares the heat flux along the heated cylinder obtained, respectively with ANSYS-FLUENT and with the two elsA cases. Positions $x=0$ and 0.084 correspond to the axes of two impacting jets and their respective heat fluxes are

maximal, as expected. Starting from these extremities, fluxes globally decrease along the cylinder before increasing near the outlet slot axis. Looking at the Jameson and the PISO solutions, although the curve profiles are not strictly identical, the fluxes' average values are the same within 1.7 per cent.

2D-Aghora computations

The 2D Aghora simulations use a nodal approach with polynomials of degree 1. The order of accuracy of the simulation is therefore 2nd-order. We denote this

| | Experiment | FLUENT with SIMPLE | FLUENT with PISO | elsA with Jameson | elsA with Roe |
|---|------------|--------------------|-------------------|-------------------|---------------|
| Inlet mass flow rate (kg.s ⁻¹) | 0.000888 | 0.000886 | 0.000886 | 0.000884 | 0.000884 |
| Error rate (over the experiment) | | -0.2% | -0.2% | -0.4% | -0.4% |
| Outlet mass flow rate (kg.s ⁻¹) | 0.000888 | 0.000878-0.000896 | 0.000883-0.000892 | 0.000886 | 0.000887 |
| Error rate (outlet over inlet) | | -1.1-0.9% | -0.5-0.4% | 0.2% | 0.3% |

Table VI.
Error on the inlet/outlet mass flow rate with FLUENT, elsA

| | Experiment | FLUENT with SIMPLE | FLUENT with PISO | elsA with Jameson | elsA with Roe |
|----------------------------------|------------|--------------------|------------------|-------------------|---------------|
| Convected heat flux (W) | 20.00 | 15.17-16.48 | 14.98-16.43 | 18.93 | 16.85 |
| Error rate (over the experiment) | | -24.1-17.6% | -25.1-17.8% | -5.3% | -15.7% |

Note: Experiment is the reference

Table VII.
Convected heat flux comparisons with FLUENT, elsA

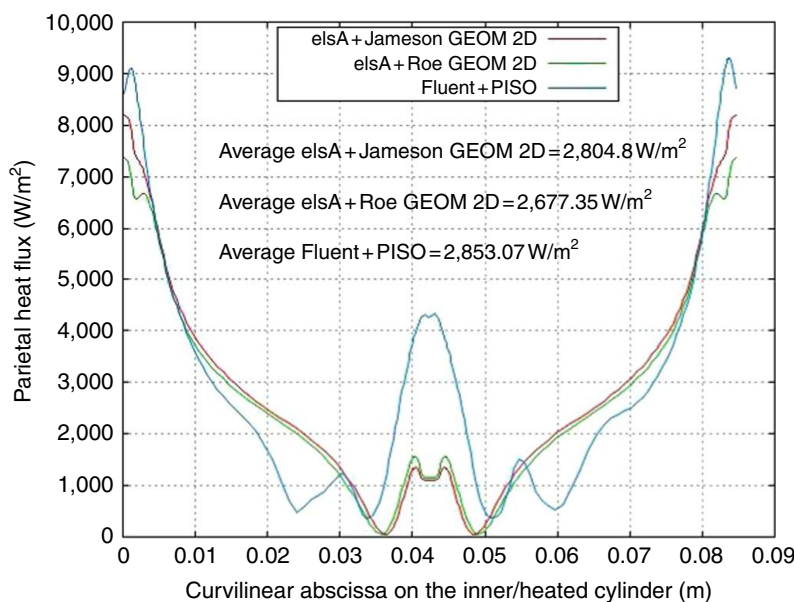


Figure 15.
Comparison of heat-fluxes along an arc of circle on the inner-heated cylinder obtained from 2D computations (elsA and FLUENT)

simulation DG-p1. The boundary conditions (Table VIII) are given in a different manner than specified for the previous 2D-computations (Table III). For the Aghora simulations, the flow is driven by different pressure values at the inlet and outlet, whereas the mass flow rate was specified for the FLUENT and elsA simulations. At the inlet boundaries we impose constant values of the total pressure, total temperature, and the direction of the velocity, instead of the mass flow, the total temperature, and the direction of the velocity as is done in the previous 2D-simulations. This choice leads to an inlet mass flow that is smaller than the mass flow imposed in the experiment, and that imposed in the elsA and FLUENT computations. This is the reason why we cannot compare the convected heat flux obtained from the DG-p1 simulation with that provided by the experiment.

In this paragraph let us have a look at the comparison between the compressible modellings of Aghora and elsA. It is interesting to look at the temperature field and the streamlines pattern displayed by the DG-p1 simulation (Figure 16), as well as the heat flux distribution at the inner wall (Figure 17). Indeed, from our experiment with the elsA code, for a given level of artificial dissipation in Jameson scheme, the overall

Table VIII.
Boundary conditions
with Aghora

| | | Aghora |
|-----------------------------|--|--|
| Inlet | | Pressure: 104,196.29 Pa Temperature: 302.45 K Velocity direction: (0, -1, 0) or (-1, 0, 0) |
| Outlet | | Pressure: 104,184.83 Pa |
| Internal wall (heated wall) | | Temperature: 370.65 K |
| External wall | | Temperature: 342.45 K |

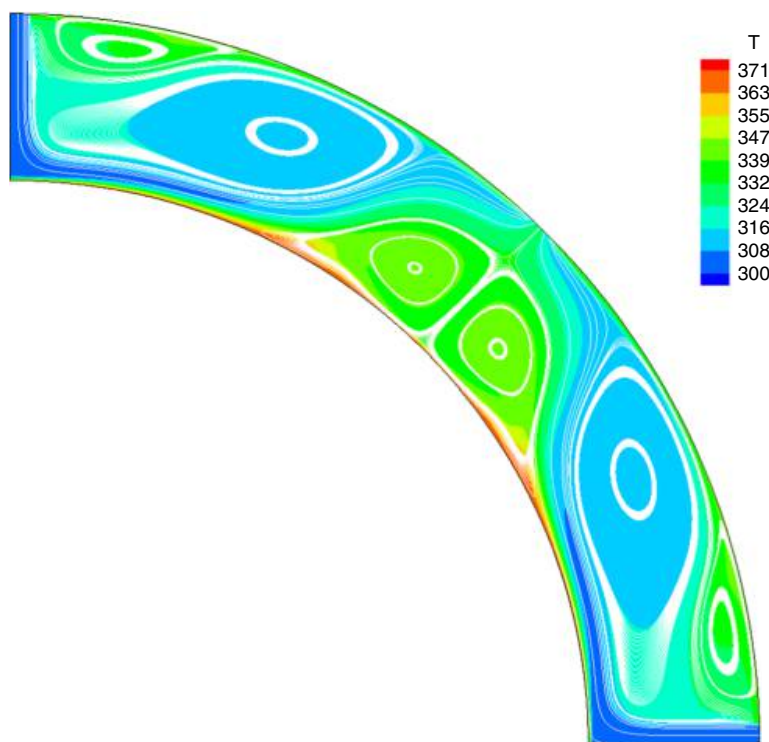


Figure 16.
Streamlines and
temperature field for
the DG-p1 simulation
using Aghora

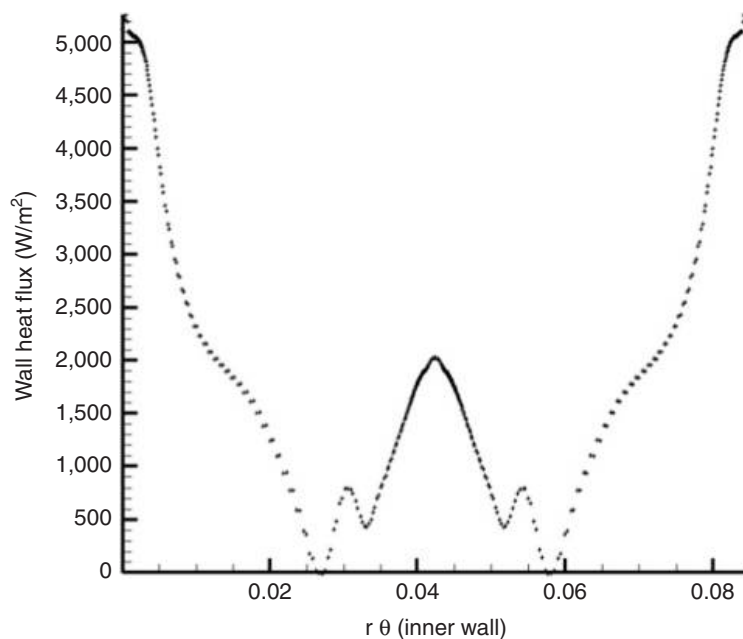


Figure 17. Profile of heat flux at the inner wall along the azimuthal direction. DG-p1 simulation using Aghora

features of the flow are not fundamentally affected by the two different ways of imposing the inlet condition. We can observe from Figure 16 the very different behaviour between the results from the elsA simulations presented above and that from the DG-p1 simulation.

The main difference lies in the much larger size of the two recirculation bubbles right below the outlet slot, as well as the appearance of two new secondary bubbles near the inlet slots. The authors believe that the reason for the significant differences found is the higher level of artificial dissipation selected in Jameson scheme in the elsA computation. Indeed, a number of numerical experiments using elsA and Aghora for different values of the artificial viscosity have demonstrated the strong sensitivity of the results to the accuracy of the numerical scheme. The differences in the flow patterns found between the elsA and the DG-p1 simulation have a direct effect on the profile of the wall heat-flux as seen from Figure 17. A comparison with the profiles shown in Figure 15, highlights the existence of a more intense heat exchange in the vicinity of the outlet axis. The maximum level of heat-flux found in the DG-p1 simulation appears to be lower than that found in the other simulations. This is a logical consequence of the lower level of mass flow present in the DG-p1, as mentioned above, which leads to a reduction of the overall heat-exchange in the cooling cavity.

As surprising as it might seem, the result of Aghora shares a closer similarity with the result of FLUENT obtained by the incompressible modelling. Comparing the eddy patterns of Figures 14 and 16 both have the two recirculation bubbles right below the outlet slot. Moreover looking at Figures 15 and 17, the behaviours of the wall heat-flux looks the same even if the levels are different.

5. Conclusion and perspectives

In the context of on-board green aircraft projects, the increasing use of electrical engines requires more efficient cooling systems. This study presents the results of a comparative study of simulations by various incompressible or compressible CFD

models of the convective heat transfer achieved by impacting jets. The test case is given by a specific laboratory experiment, which is devoted at the University of Pau to the study of cooling of small-sized turbo engines.

Comparisons between the results from 3D and 2D computations support the relevance of 2D models for simulating the convective heat transfer by the impacting jets as carried out in the experiment.

The present study focuses on low Reynolds number confined flow conditions. A comparison is made between the results of numerical simulations obtained using incompressible models of FLUENT and the compressible ones of elsA and Aghora. The flow fields obtained by the three codes show eddy patterns in the simulated annular domain, which differ in detail.

Even though the boundary conditions are steady, the results obtained with the incompressible models of FLUENT display instabilities while the compressible models of elsA are stable with residuals which seem to converge. Thus the parietal heat-flux distributions along the inner wall, predicted by the different models, display differences. Nevertheless, the average of these fluxes are the same within less than 2 per cent. For this flow condition the global convective heat fluxes computed with FLUENT and elsA are ranging from 0.75 to 0.95 of the experimental data. In such a CFD case, the flow stability seems to be a key issue linked with the compressibility effects.

A second order DG simulation has also been performed with a lower inlet mass rate using the Aghora compressible solver, by setting the polynomial degree to 1 (DG-p1) and using the same mesh resolution as in previous 2D-simulations. The solutions from the two compressible solvers (i.e. elsA and Aghora) appear to be fundamentally different. Concerning the Jameson scheme, the authors believe that the significant difference found results from the higher level of artificial dissipation selected in Jameson scheme for the elsA computations. This has a direct effect on the profile of the wall heat-flux, for which the existence of a more intense heat exchange in the vicinity of the outlet axis is observed for the DG-p1 simulation. As the inlet mass flow rate is slightly lower (in the case of Aghora) compared to those used in elsA and FLUENT, it is not surprising that the level of the wall heat-flux is also lower. However, as observed in the eddy pattern, the heat flux profile obtained by Aghora looks rather the same than that provided by the incompressible modelling with FLUENT.

A new boundary condition with imposition of the mass flow is being implemented in the Aghora solver and new simulations are planned in order to verify the conclusions of this preliminary analysis. It would also be of great interest to perform higher-order simulations using Aghora (at least $p=2$ and 3). Indeed, one of the remarkable properties of high-order methods is the little influence of the selected numerical flux (convective and viscous) on the accuracy of the solution.

It is encouraging that the results of simulations are in qualitative agreement with the laboratory experiments and recover the order of magnitude of the total heat transfer measured. Nevertheless, much remain to be done. Modelling compressible fluid flows is known to be difficult for low Mach number conditions. Our goal is orient ourselves into the development of "All Mach" solvers.

Acknowledgements

The authors thank the University of Pau, Conseil Régional d'Aquitaine and SAFRAN-Turbomeca for their financial support to this work. N. Lantos is acknowledged

for his invaluable and daily help in the best use as possible of the elsA software. For her useful help with producing the Gmsh mesh used in the Aghora simulation, the authors wish to express their gratitude to M.-C. Le Pape from ONERA. Part of this research got public financial support from the DGE (Direction Générale des Entreprises) after having been selected by the French clusters Aerospace Valley, ASTech and PEGASE.

References

- Bassi, F., Rebay, S., Mariotti, G., Pedinotti, S. and Savini, M. (1997), "A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows", in Decuyper, R. and Dibelius, G. (Eds), *Proceedings of the 2nd European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics*, Technologisch Instituut, Antwerpen, pp. 99-108.
- Cambier, L., Heib, S. and Plot, S. (2013), "The ONERA elsA CFD software: input from research and feedback from industry", *Mechanics & Industry*, Vol. 14 No. 3, pp. 159-174.
- Chapelier, J.-B., de la Llave Plata, M., Renac, F. and Lamballais, E. (2014), "Evaluation of a high-order discontinuous Galerkin method for the DNS of turbulent flows", *Computer and Fluids*, Vol. 95, pp. 210-226.
- de la Llave Plata, M., Couaillier, V., Marmignon, C., Le Pape, M.C., Gazaix, M. and Cantaloube, B. (2012), "Further developments in the multiblock hybrid CFD solver elsA-H", AIAA Paper No. 2012-1112, Nashville, TN.
- Gardon, R. and Akfirat, J. (1966), "Heat transfer characteristics of impinging two-dimensional air jets", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 88, pp. 101-108.
- Gardon, R. and Akfirat, J.C. (1965), "The role of turbulence in determining the heat-transfer characteristics of impinging jets", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 8, pp. 1261-1272.
- Gori, F. and Bossi, L. (2000), "On the cooling effect of an air jet along the surface of a cylinder", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 27, pp. 667-676.
- Hartmann, R. and Houston, P. (2008), "An optimal order interior penalty discontinuous Galerkin discretization of the compressible Navier-Stokes equations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 9670-9685.
- Jambunathan, K., Lai, E., Moss, M.A. and Button, B.L. (1992), "A review of heat transfer data for single circular jet impingement", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 13, pp. 106-115.
- Jameson, A., Schmidt, W. and Turkel, E. (1981), "Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta stepping schemes", Technical Report 81-1259, AIAA, Palo Alto, CA.
- Kelec, F.J. (2008), "Coupling momentum and continuity increases CFD robustness", *ANSYS Advantage*, Vol. II No. 2, pp. 49-51.
- McDaniel, C.S. and Webb, B.W. (2000), "Slot jet impingement heat transfer from circular cylinders", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 1975-1985.
- Martin, H. (1977), "Heat and mass transfer between impinging gas jets and solid surfaces", *Advances in Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 1-60.
- Renac, F., de la Llave Plata, M., Martin, E., Chapelier, J.-B. and Couaillier, V. (2014), "Aghora: a high-order DG solver for turbulent flow simulations", in Kroll, N., Hirsch, C., Bassi, F., Johnston, C. and Hillewaert, K. (Eds), *IDIHOM: Industrialization of High-Order Methods – A Top-Down Approach*, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 128, Springer, pp. 315-335.

- Roe, P.L. (1981), "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372.
- Singh, D., Premachandran, B. and Kohli, S. (2013), "Experimental and numerical investigation of jet impingement cooling of a circular cylinder", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 60, pp. 672-688.
- Singh, D., Premachandran, B. and Kohli, S. (2015a), "Circular air jet impingement cooling of a circular cylinder with flow confinement", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 91, pp. 969-989.
- Singh, D., Premachandran, B. and Kohli, S. (2015b), "Effect of nozzle shape on jet impingement heat transfer from a circular cylinder", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 96, pp. 45-69.
- Wang, X.L., Motala, D., Lu, T.J., Song, S.J. and Kim, T. (2014), "Heat transfer of a circular impinging jet on a circular cylinder in crossflow", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 78, pp. 1-8.
- Zuckerman, N. and Lior, N. (2006), "Jet impingement heat transfer: physics, correlations, and numerical modeling", *Advances in Heat Transfer*, Vol. 39, pp. 565-631.
- Zuckerman, N. and Lior, N. (2007), "Radial slot jet impingement flow and heat transfer on a cylindrical target", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, Vol. 21 No. 3, pp. 548-561.

Corresponding author

Eric Schall can be contacted at: eric.schall@univ-pau.fr

Bibliographie

- [1] Rutherford Aris. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. 2012.
- [2] Lawrence E Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Number Monograph. 1969.
- [3] Eitan Tadmor. Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems. *Acta Numerica*, 12 :451–512, May 2003.
- [4] R. Becker, K. Gokpi, E. Schall, and D. Trujillo. Comparison of hierarchical and non-hierarchical error indicators for adaptive mesh refinement for the Euler equations. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, 227(6) :933–943, June 2013.
- [5] F. Bassi, S. Rebay, and M. Savini. Discontinuous finite element Euler solutions on unstructured adaptive grids. In *Thirteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 245–249. Springer, 1993.
- [6] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, and D. M. Causon. On the choice of wavespeeds for the HLLC Riemann solver. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(6) :1553–1570, 1997.
- [7] Shuangzhang Tu and Shahrouz Aliabadi. A slope limiting procedure in discontinuous galerkin finite element method for gasdynamics applications. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2(2) :163–178, 2005.
- [8] Laurent Cambier, Sébastien Heib, and Sylvie Plot. The ONERA elsA CFD software : input from research and feedback from industry. *Mechanics & Industry*, 14(03) :159–174, 2013.
- [9] P. L. Roe. Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 18 :337–365, 1986.
- [10] Ivan Mary and Pierre Sagaut. Large eddy simulation of flow around an airfoil near stall. *AIAA journal*, 40(6) :1139–1145, 2002.
- [11] Franklyn J. Kelecyc. Coupling momentum and continuity increases CFD robustness, ANSYS advantage, volume II, issue 2, 2008.
- [12] S.V Patankar and D.B Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(10) :1787–1806, 1972.
- [13] R.I Issa. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*, 62(1) :40–65, 1986.
- [14] L.E. Fraenkel. On corner eddies in plane inviscid shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 11(3) :400–406, 1961.
- [15] Hervé Guillard. On the behavior of upwind schemes in the low Mach number limit. IV : P0 approximation on triangular and tetrahedral cells. *Computers & Fluids*, 38(10) :1969–1972, 2009.

-
- [16] Katate Mastuka. *I do like CFD*, volume 1. Second edition.
- [17] Sébastien Candel. *Mécanique des fluides*. Dunod, 1995.
- [18] Eleuterio F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [19] H.C. Yee, M. Vinokur, and M.J. Djomehri. Entropy splitting and numerical dissipation. *Journal of Computational Physics*, 162(1) :33–81, 2000.
- [20] P. R. M. Lyra and K. Morgan. A review and comparative study of upwind biased schemes for compressible flow computation. Part III : Multidimensional extension on unstructured grids. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9(3) :207–256, 2002.
- [21] Antony Jameson, Wolfgang Schmidt, and Eli Turkel. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. *AIAA paper*, 1259 :1981, 1981.
- [22] M.S Mock. Systems of conservation laws of mixed type. *Journal of Differential Equations*, 37(1) :70–88, 1980".
- [23] S. K. Godunov. An interesting class of quasilinear systems. *Sov.Math.Dokl.*, 2 :947–949, 1961.
- [24] Guillermo Hauke and Thomas JR Hughes. A comparative study of different sets of variables for solving compressible and incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153(1) :1–44, 1998.
- [25] Timothy J. Barth. Numerical methods for gasdynamic systems on unstructured meshes. In *An introduction to recent developments in theory and numerics for conservation laws*, pages 195–285. Springer, 1999.
- [26] Timothy J. Barth. Simplified discontinuous Galerkin methods for systems of conservation laws with convex extension. In *Discontinuous Galerkin Methods*, pages 63–75. Springer, 2000.
- [27] L. Pesch and J.J.W. van der Vegt. A discontinuous Galerkin finite element discretization of the Euler equations for compressible and incompressible fluids. *Journal of Computational Physics*, 227(11) :5426–5446, May 2008.
- [28] Nicolas CHAUCHAT, Eric SCHALL, Mathieu MORY, Marta de la LLAVE PLATA, and Vincent G. COUAILLIER. Cooling of a heating cylinder by confined impacting air jets. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 26(7) :2013–2032, September 2016.
- [29] Nicolas CHAUCHAT, Eric SCHALL, Nicolas LANTOS, and Gilles LEROY. A contribution to the way of the all-Mach number in aerodynamics. In *3AF international conference on Applied Aerodynamics*, March 2015.
- [30] Nicolas CHAUCHAT, Eric SCHALL, Mathieu MORY, Marta de la LLAVE PLATA, and Vincent COUAILLIER. Study of a cooling device of confined impacting air jets on a heating cylinder. In *3AF international conference on Applied Aerodynamics*, March 2015.
- [31] Eric SCHALL, Nicolas CHAUCHAT, and Mathieu MORY. Moving toward green aircraft : More onboard electricity with an efficient cooling system. In *the 28TH international conference on efficiency, cost, optimization, simulation and environmental impact of energy systems*, January 2015.

RÉSUMÉ

Dans de nombreux secteurs industriels, pour de nombreuses raisons (coût, avènement de l'informatique et du numérique...), on s'intéresse de plus en plus à la caractérisation et la détermination de fluides par la simulation numérique. Le travail présenté constitue une contribution à l'analyse par la simulation numérique des écoulements des fluides newtoniens. L'appréhension de ces fluides passe par la détermination spatio-temporelle des quatre grandeurs physiques que sont : le vecteur vitesse \vec{V} , la masse volumique ρ , la pression P et la température T à l'échelle macroscopique d'une particule fluide. Un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) provenant des bilans de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie) est mis en place pour permettre la détermination des quatre inconnues. Il existe toute une panoplie d'algorithmes numériques capables de résoudre le système d'EDP toutefois séparée en deux en raison de l'hypothèse de la compressibilité du fluide, *incompressible* ou *compressible*. La nature du système d'EDP est différente dans les deux cas et il n'existe pas de méthode commune capable de les résoudre. En effet il n'existe pas de code (ou logiciel) capable de simuler correctement un écoulement où siègeraient simultanément des *petits* et *grands* nombres de *Mach*. Dans l'industrie ou dans les laboratoires, il existe ainsi deux types de logiciel différents pour résoudre les écoulements *incompressibles* d'une part et *compressibles* d'autre part. Le travail présenté a pour ambition de chercher une méthode numérique unique capable de résoudre le modèle *compressible* pour des écoulements quelconques et aussi proches que possible de l'*incompressible* dans l'optique du meilleur "*triptyque*" : robustesse, précision et efficacité. Ainsi, l'utilisation d'un seul logiciel pour résoudre n'importe quel type d'écoulement sans avoir à apprécier au préalable l'hypothèse liée à la compressibilité du fluide au risque de se tromper serait très apprécié.

Mots clés : Simulation numérique, écoulements compressibles, fluides newtoniens, tout-Mach.

ABSTRACT

In many industries, for many reasons (cost, advent of computer science and digital age...), there is a growing interest in the knowledge of fluid flows by numerical simulation. The present work is a contribution to the analysis of Newtonian fluids through CFD. The expertise of such fluid flows needs the determination of four physical values which are : the velocity \vec{V} , the density ρ , the pressure p and the temperature T of a fluid particle, all space-time dependent. The system of the partial differential equations coming from the conservation laws (mass, momentum and energy) is needed to get the main four unknowns. There are many numerical methods to solve such a system which are however separated in two parts according to the assumption of the compressibility (*compressible* or *incompressible*) of the fluid. The nature of the system is then fundamentally different in either case and there is no solver able to solve them both. Indeed, there is no software able to correctly solve by computation any fluid motion where small and large *Mach* number coexist. The aim of the presented work is to find a single numerical method able to solve the compressible modeling even in the *incompressible* zone with the best possible "*triptych*" : robustness, accuracy and efficiency. Thus, using only one software to compute any fluid motion whatever the assumption of the compressibility is, would be greatly appreciated.

Key words : Numerical simulation, compressible flows, Newtonian fluids, All-Mach.